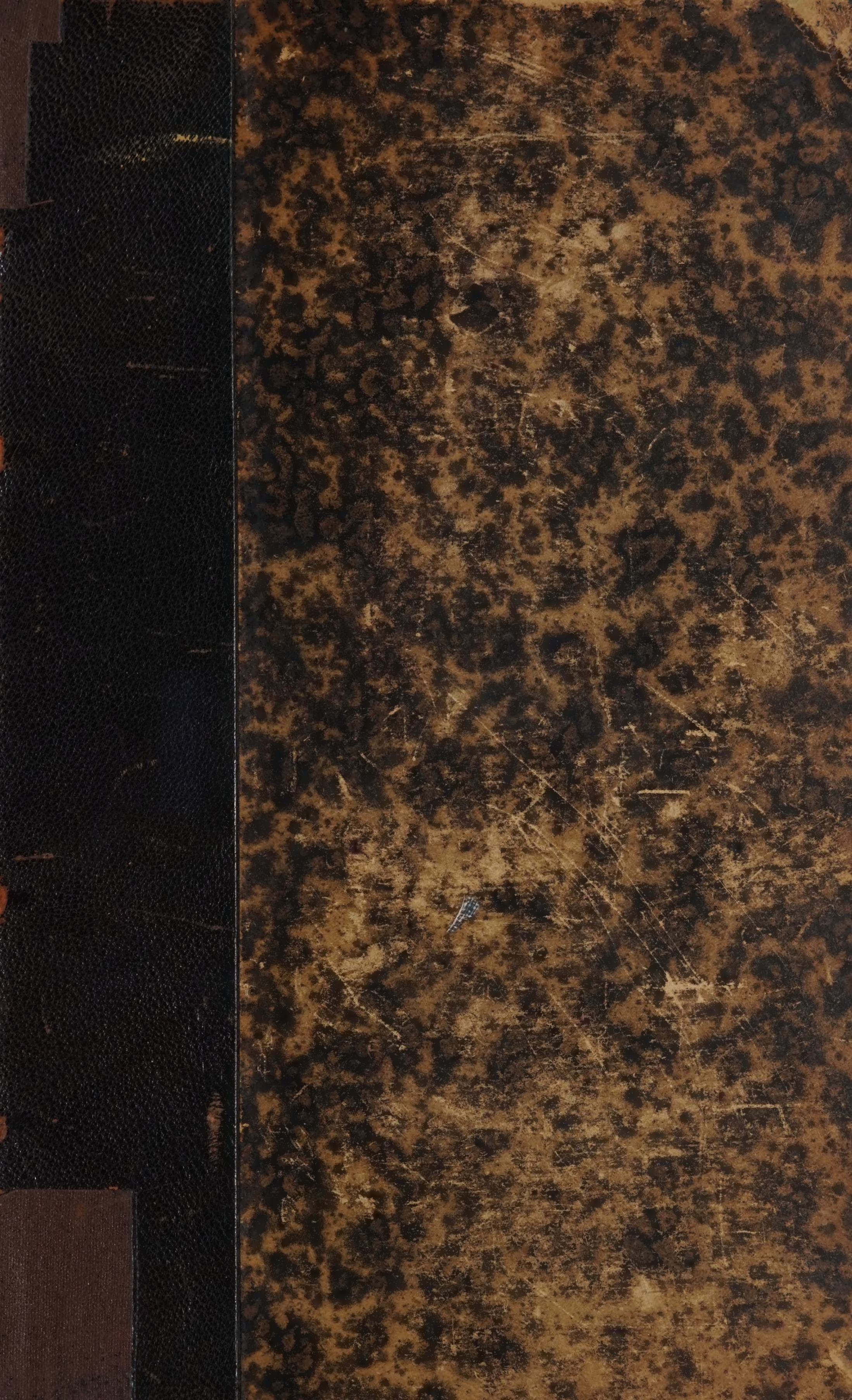
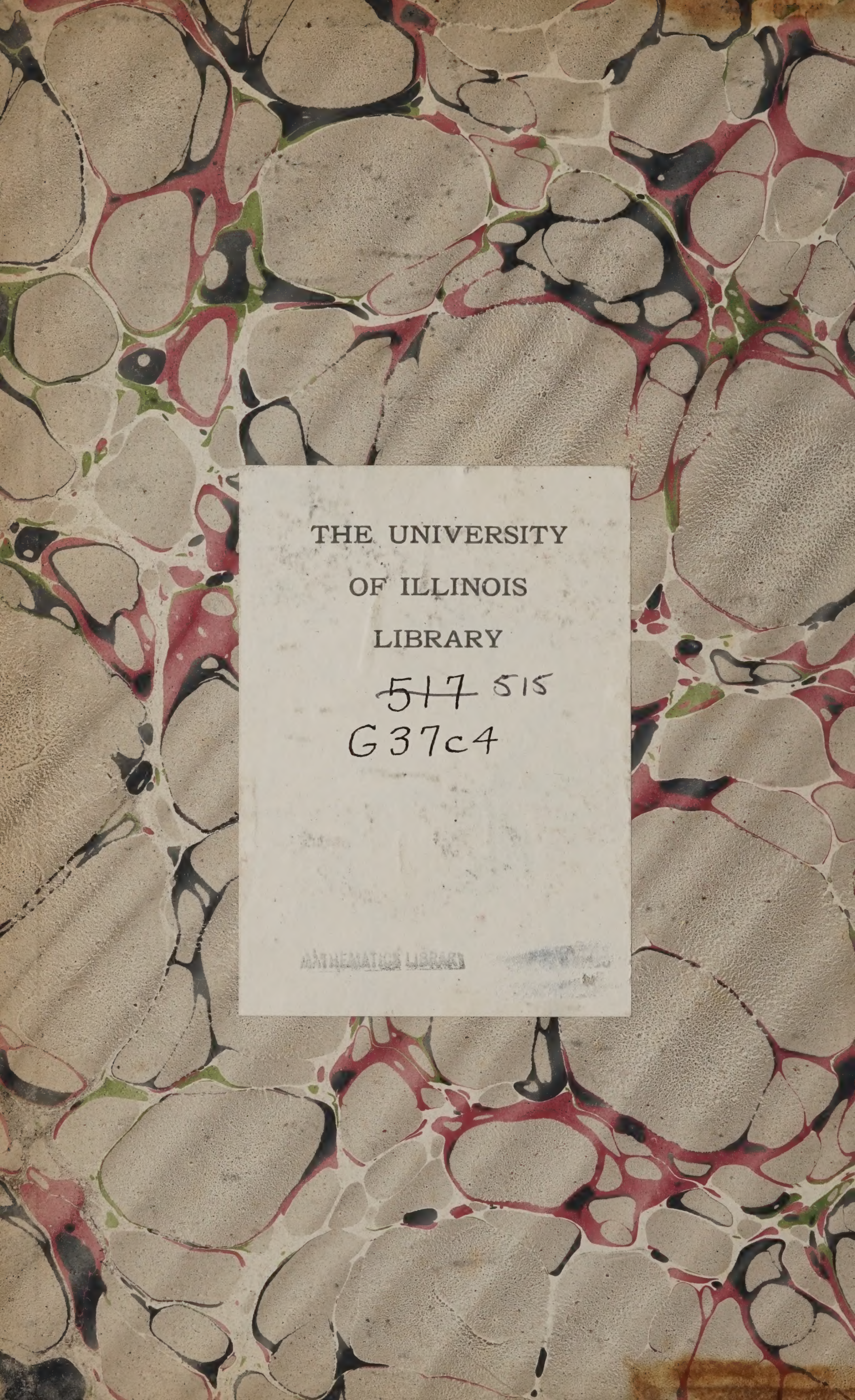



THE UNIVERSITY
OF ILLINOIS
LIBRARY
~~517~~ 515
G37c4
MATHEMATICS LIBRARY





COURS D'ANALYSE INFINITÉSIMALE

PAR

[illegible] GILBERT

[illegible]
[illegible]

PARTIE ÉLÉMENTAIRE

QUATRIÈME ÉDITION



PARIS
GAUTHIER-VILLARS, [illegible]
[illegible]

BRUXELLES
[illegible] DE [illegible]
[illegible]

[illegible]

COURS D'ANALYSE INFINITÉSIMALE

PAR

PH.[illipe Louis] GILBERT

CORRESPONDANT DE L'INSTITUT DE FRANCE (ACADÉMIE DES SCIENCES)
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LOUVAIN

PARTIE ÉLÉMENTAIRE

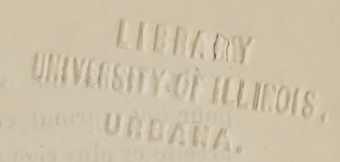
QUATRIÈME ÉDITION



PARIS
GAUTHIER-VILLARS, LIBRAIRE
55, QUAI DES AUGUSTINS

BRUXELLES
SOCIÉTÉ BELGE DE LIBRAIRIE
16, RUE TREURENBERG

1892



PRÉFACE

Philippe Gilbert, surpris par la maladie qui devait bientôt l'enlever à la science, n'a pu mettre la dernière main à cette quatrième édition du Cours d'analyse infinitésimale. Le dernier livre est resté ce qu'il était et la rédaction n'a pas subi en général de modifications considérables, mais le livre deuxième s'est enrichi de deux chapitres entièrement nouveaux, les chapitres XXIV et XXV, qui renferment la théorie de la courbure des surfaces et des lignes de courbure. Nous les signalons au lecteur, et nous reproduisons ci-dessous la préface de la troisième édition (1887).

Quoique la destination de ce livre et son plan général soient restés ce qu'ils étaient lors de la première édition (1872), sa rédaction a subi des modifications profondes. Les chapitres concernant la théorie des limites, les séries, les fonctions et leurs dérivées en général, la théorie des points singuliers, les surfaces réglées, les fonctions d'une variable imaginaire, les intégrales définies simples ou doubles, etc., etc., ont été complétement refondus.

Destiné à fournir aux aspirants ingénieurs les notions de calcul infinitésimal dont ils ont besoin pour aborder la mécanique et les applications, cet ouvrage est assujetti à rester élémentaire dans l'exposition, limité dans l'étendue. Mais il doit aussi servir, pour ceux qui se préparent au doctorat, d'introduction aux théories analytiques plus élevées qui formeront la matière d'un second volume, et à ce titre il réclame, dans l'exposition des principes fondamentaux, toute la rigueur que comporte l'état actuel de la science.

Or, depuis une vingtaine d'années, des écrits nombreux ont eu pour but, surtout en Allemagne, de présenter d'une manière plus précise et plus rigoureuse les théories de l'analyse infinitésimale ; il y avait donc lieu de chercher à introduire ces améliorations dans notre enseignement. Je me suis particulièrement inspiré à ce point de vue des traités publiés dans les dernières années par MM. C. Jordan (*Cours d'Analyse*), Lipschitz (*Lehrbuch der Analysis*), Dini (*Fondamenti per la teorica di variabili reali*), P. du Bois-Reymond (*Allgemeine Functionenlehre*), Stolz (*Vorlesungen über allgemeine Arithmetik*), J. Tannery (*Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*), Peano (*Calcolo differenziale*), ainsi que de divers travaux de MM. Darboux, Weierstrass, Thomae, G. Cantor, Harnack, P. Mansion, etc...

Il faut reconnaître qu'en adoptant ce nouveau mode d'exposition, on est très exposé à tomber dans la pesanteur, l'obscurité, la minutie. Je n'espère pas avoir complètement évité ces écueils; néanmoins, j'ai cru devoir tenter l'entreprise, parce qu'il y a toujours profit à établir sur des bases plus indiscutables le fondement des théories importantes. D'ailleurs, l'introduction progressive du même esprit dans l'enseignement des éléments aura pour effet d'atténuer les difficultés que les élèves y peuvent trouver aujourd'hui et, d'autre part, c'est seulement par le concours de tous les efforts que les méthodes nouvelles acquerront l'élégance et la limpidité qui leur font encore défaut.

Symboles nouveaux employés dans ce volume :

Le signe $\geqslant$ signifie « égal ou supérieur à ».

. . . . $\leqslant$ . . . . « égal ou inférieur à ».

Le signe VA placé devant une quantité signifie « valeur absolue de ».



TABLE DES MATIÈRES.

LIVRE DEUXIÈME. — APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

APPENDICE AU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

FONCTIONS D'UNE VARIABLE IMAGINAIRE.

LIVRE TROISIÈME. — CALCUL INTÉGRAL. (QUADRATURES.)

LIVRE QUATRIÈME. — CALCUL INTÉGRAL.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

NOTES.

COURS D'ANALYSE.

INTRODUCTION.

§ 1. PROPOSITIONS D'UN USAGE FRÉQUENT.

1. On démontre facilement les propriétés suivantes dont nous ferons usage par la suite :

I. *Si l'on a une suite de rapports égaux*

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$$

et n facteurs arbitraires $p_1, p_2, \ldots p_n$, on aura les égalités

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots + p_n a_n}{p_1 b_1 + p_2 b_2 + \cdots + p_n b_n}$$

$$= \pm \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}}.$$

II. *Si $a_1, a_2, a_3, \ldots; b_1, b_2, b_3, \ldots$ sont deux suites composées d'un même nombre de quantités, on a toujours identiquement*

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \cdots) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \cdots)^2$$
$$= (a_1 b_2 - b_1 a_2)^2 + (a_1 b_3 - b_1 a_3)^2 + (a_2 b_3 - b_2 a_3)^2 + \cdots$$

Nous disons qu'une quantité q est *moyenne* entre plusieurs quantités

données $b_1, b_2, \ldots b_n$, lorsqu'elle n'est ni supérieure à la plus grande b_i, ni inférieure à la plus petite b_k de ces quantités, de telle sorte que l'on a

$$b_i \geqslant q \geqslant b_k.$$

Nous exprimons cette propriété par le symbole

$$q = \mathcal{M}\,(b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

Cela posé : III. *Si* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *sont des quantités de même signe,* $b_1, b_2, \ldots b_n$ *des quantités de signes quelconques, on aura toujours*

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\ \mathcal{M}\,(b_1, b_2, \ldots b_n).$$

De plus, si les quantités $b_1, b_2, \ldots, b_n$ ne sont pas toutes égales, la *moyenne* dont il s'agit sera effectivement *plus petite* que b_i et *plus grande* que b_k.

§ 2. DES QUANTITÉS IMAGINAIRES. APPLICATIONS.

2. On appelle *quantité* ou *expression imaginaire* toute expression de la forme $\alpha + \beta i$, α et β désignant des quantités réelles quelconques, i le symbole $\sqrt{-1}$. Une telle expression n'a par elle-même aucun sens et ne représente rien, mais à l'aide de certaines conventions, on introduit ces symboles dans l'analyse et l'on s'en sert pour abréger les calculs, etc.

Conventions. — 1° Deux quantités imaginaires sont dites *égales* lorsque les parties réelles d'une part, les coefficients de i d'autre part, sont égaux dans ces deux quantités. L'équation

$$\alpha + \beta i = \alpha' + \beta' i$$

signifie donc simplement que l'on a

$$\alpha = \alpha', \qquad \beta = \beta',$$

en sorte qu'une équation imaginaire n'est que la représentation symbolique de deux équations réelles.

2° Lorsque, dans l'expression $\alpha + \beta i$, β se réduit à zéro, on admet que l'expression se réduit à α ; ainsi les qualités imaginaires renferment comme cas particulier les quantités réelles.

3° L'*Addition*, la *Soustraction*, la *Multiplication* s'effectuent sur les imaginaires d'après les mêmes règles que sur les qualités réelles, en convenant de traiter i comme une quantité dont le carré serait -1. Par exemple, en opérant d'après cette convention, on trouve

$$(\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b) = \cos(a + b) + i \sin(a + b),$$

c'est-à-dire qu'après avoir développé le premier membre par la multiplication algébrique, on trouvera des termes réels dont la somme est égale à $\cos(a+b)$, et un coefficient de i égal à $\sin(a+b)$; ce qui fournit un moyen simple de retenir ces formules.

4° Deux quantités imaginaires sont *conjuguées* lorsqu'elles diffèrent seulement par le signe du coefficient de i, comme $\alpha+\beta i$ et $\alpha-\beta i$. Leur somme 2α, leur produit $\alpha^2+\beta^2$ sont réels.

5° *Diviser* une quantité imaginaire $\alpha+\beta i$ par une autre $\alpha'+\beta' i$, c'est trouver une troisième expression $\gamma+\delta i$ qui, multipliée par la seconde conformément aux conventions ci-dessus, reproduise la première.

6° *L'élévation aux puissances entières, fractionnaires* ou *négatives* se définit encore comme pour les quantités réelles. Ainsi $(\alpha+\beta i)^m$, m étant entier positif, désigne le produit de m facteurs égaux à $\alpha+\beta i$; $(\alpha+\beta i)^{-m}$ est le quotient de l'unité par ce produit, etc...

3. Le principe des opérations sur les imaginaires est celui-ci : *Si l'on combine entr'elles des quantités ou des équations imaginaires par addition, soustraction, multiplication, en se conformant aux conventions ci-dessus, les équations ainsi obtenues seront toujours rigoureusement exactes, dans le sens attaché à l'égalité des imaginaires,* c'est-à-dire que chacune se dédoublera en deux équations réelles.

En effet, dans les quantités ou équations qu'il s'agit de combiner, remplaçons d'abord i par un facteur réel indéterminé λ, ce qui est permis d'après la définition de l'égalité des imaginaires. Faisons ensuite les opérations indiquées; nous aurons encore des équations exactes quel que soit λ, ce qui exigera que les coefficients d'une même puissance de λ soient égaux dans les deux membres de chacune d'elles. Cette égalité des coefficients subsistera si l'on remplace les puissances de λ par tels symboles que l'on veut; par exemple, $\lambda, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^4, \lambda^5, \ldots$ respectivement par $i, -1, -i, +1, i$, etc... Or, on trouve ainsi le résultat même auquel on serait arrivé en laissant d'abord i au lieu de λ et opérant comme si i était une quantité réelle ayant pour carré -1. Donc, dans ces équations finales, les parties indépendantes de i seront égales dans les deux membres, comme aussi les coefficients de i; C. Q. F. D.

Le symbole i sert donc ici, uniquement, à maintenir séparées dans les opérations des quantités appartenant à des égalités distinctes.

Il est facile de conclure de là que les propriétés fondamentales des opérations primitives subsistent pour les quantités imaginaires; par

exemple, que l'ordre des facteurs d'un produit est indifférent, etc....

4. Toute expression imaginaire $\alpha + \beta i$ peut se mettre sous la forme très usitée $r(\cos\theta + i\sin\theta)$, r et θ étant réels et $r > 0$. En effet, il suffit de poser

$$r\cos\theta = \alpha, \quad r\sin\theta = \beta,$$

d'où

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \cos\theta = \frac{\alpha}{r}, \quad \sin\theta = \frac{\beta}{r},$$

et comme ces valeurs de $\cos\theta$, $\sin\theta$ sont numériquement plus petites que l'unité et vérifient l'équation

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1,$$

il existe un arc réel θ qui, avec la valeur trouvée pour r, satisfait à la question. Il en existe même une infinité, car on peut augmenter θ ou le diminuer d'un nombre quelconque de fois 2π, sans changer les valeurs de $\sin\theta$, $\cos\theta$.

Prenons α, β pour coordonnées rectangulaires d'un point M du plan; r, θ seront ses coordonnées polaires. On dit que r est le *module*, θ l'*argument*, le point M l'*affixe* de la quantité imaginaire $\alpha + \beta i$. Les équations précédentes montrent que

1° *L'égalité de deux expressions imaginaires entraîne celle de leurs modules;*

2° *Leurs arguments ne peuvent différer que d'un nombre entier de circonférences;*

3° *Toute quantité imaginaire s'annule en même temps que son module et réciproquement*, car les égalités

$$\alpha^2 + \beta^2 = 0, \quad \text{et} \quad \alpha = 0, \quad \beta = 0,$$

sont équivalentes, α et β étant réels.

4° *Une quantité réelle a pour module sa valeur absolue, et pour argument un nombre pair ou impair de fois π, selon qu'elle est positive ou négative;* car, si β est nul, on a

$$r = \sqrt{\alpha^2} = \mathrm{VA}\,\alpha, \quad \cos\theta = \pm 1,$$

suivant que α est $>$ ou < 0.

5. *Addition.* — Soient $r, r', r'', \ldots$ les modules; $\theta, \theta', \theta'', \ldots$ les

arguments respectifs de plusieurs quantités imaginaires; leur somme sera

$$S = r(\cos\theta + i\sin\theta) + r'(\cos\theta' + i\sin\theta') + \cdots = r\cos\theta + r'\cos\theta' + r''\cos\theta'' + \cdots + i(r\sin\theta + r'\sin\theta' + r''\sin\theta'' + \cdots).$$

Portons bout à bout, à partir de l'origine des coordonnées, des longueurs OM, MM', M'M'', ... respectivement égales à r, r', r'', ... et inclinées sur l'axe des x positifs des angles θ, θ', θ'', ... L'extrémité P de la dernière droite aura pour coordonnées rectangulaires

$$r\cos\theta + r'\cos\theta' + r''\cos\theta'' + \cdots,$$
$$r\sin\theta + r'\sin\theta' + r''\sin\theta'' + \cdots.$$

P est donc l'affixe de S; ses coordonnées polaires R et T sont donc respectivement le module et l'argument de la somme S. Il en résulte immédiatement *que le module de la somme de plusieurs imaginaires est inférieur ou tout au plus égal à la somme de leurs modules.*

6. *Multiplication et division.* — D'après la définition de la multiplication des imaginaires et la formule rappelée au n° **2** (3°), on a

$$r(\cos\theta + i\sin\theta) \times r'(\cos\theta' + i\sin\theta') = rr'[\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')].$$

Multipliant les deux membres par une nouvelle imaginaire $r''(\cos\theta'' + i\sin\theta'')$, on aura de même

$$r(\cos\theta + i\sin\theta) \times r'(\cos\theta' + i\sin\theta') \times r''(\cos\theta'' + i\sin\theta'') = rr'r''[\cos(\theta + \theta' + \theta'') + i\sin(\theta + \theta' + \theta'')],$$

et ainsi de suite. Donc *le produit de plusieurs expressions imaginaires est une quantité imaginaire qui a pour module le produit de leurs modules, et pour argument la somme de leurs arguments.*

Si l'on désigne par x le quotient de la *division* de $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ par $r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$, on a, d'après la définition (**2**, 5°),

$$x \times r'(\cos\theta' + i\sin\theta') = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Multiplions les deux membres par $1 : r'$ et par

$$\cos\theta' - i\sin\theta' = \cos(-\theta') + i\sin(-\theta');$$

nous aurons, eu égard à la règle précédente,

$$x(\cos^2\theta' + \sin^2\theta') = \frac{r}{r'}[\cos(\theta - \theta') + i\sin(\theta - \theta')].$$

Donc

$$x = \frac{r(\cos\theta + i\sin\theta)}{r'(\cos\theta' + i\sin\theta')} = \frac{r}{r'}[\cos(\theta - \theta') + i\sin(\theta - \theta')].$$

Le quotient de deux imaginaires a pour module le rapport de leurs modules, pour argument la différence de leurs arguments.

Prenons comme cas particulier $r = 1, \theta = 0$;

$$\frac{1}{r'(\cos\theta' + i\sin\theta')} = \frac{1}{r'}(\cos\theta' - i\sin\theta').$$

7. *Élévation aux puissances.* — Pour élever $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ à la puissance m, m étant entier et positif, il suffit de faire le produit de m facteurs égaux à cette imaginaire d'après la règle de la multiplication. De là

$$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^m = r^m(\cos m\theta + i\sin m\theta).$$

De même, on aura, d'après la règle de la division,

$$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{-m} = \frac{1}{r^m(\cos m\theta + i\sin m\theta)} = \frac{1}{r^m}(\cos m\theta - i\sin m\theta)$$
$$= r^{-m}[\cos(-m\theta) + i\sin(-m\theta)],$$

formule qui rentre dans la précédente en changeant m en $-m$.

Restent les puissances fractionnaires. Élever $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ à la puissance $1 : n$, c'est, par définition, trouver une expression imaginaire $\rho(\cos\zeta + i\sin\zeta)$ qui, élevée à la puissance $n^{ième}$, reproduise la première. On doit donc avoir

$$\rho^n(\cos n\zeta + i\sin n\zeta) = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

d'où les relations

$$\rho^n = r, \quad \cos n\zeta = \cos\theta, \quad \sin n\zeta = \sin\theta,$$

et par suite

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad n\zeta = \theta + 2k\pi, \quad \zeta = \frac{\theta + 2k\pi}{n},$$

k désignant un nombre entier arbitraire, positif ou négatif. On a donc, en substituant à ρ et à ζ ces valeurs,

$$(\alpha) \quad \ldots [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right].$$

Portons sur une circonférence de rayon égal à l'unité, à partir d'un point A, un arc AP égal à $\theta : n$, puis divisons la circonférence, en partant du point P, en n parties égales. Les arcs comptés de l'origine A jusqu'aux points de division successifs auront pour valeurs respectives

$$\frac{\theta}{n}, \quad \frac{\theta + 2\pi}{n}, \quad \frac{\theta + 4\pi}{n}, \quad \ldots \quad \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \quad \ldots$$

et seront conséquemment les arguments des diverses racines $n^{\text{ièmes}}$ de la quantité donnée. D'où il suit que l'expression

$$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{\frac{1}{n}}$$

admet n *valeurs distinctes*, sans plus, que l'on obtiendra en prenant pour k, dans l'équation (α), n nombres consécutifs de la suite indéfinie

$$(\beta) \cdots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

car les autres valeurs de k ramèneraient évidemment les mêmes valeurs du cosinus et du sinus. Si, dans l'équation (α), on pose successivement $r = 1$, $\theta = 0$, et $r = 1$, $\theta = \pi$, on en déduit

$$1^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n},$$

$$(-1)^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{2k+1}{n}\pi + i\sin\frac{2k+1}{n}\pi,$$

les n valeurs de k étant toujours fixées par la même règle. La première de ces deux égalités montre que l'on a

$$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right) \times 1^{\frac{1}{n}},$$

les n valeurs du premier membre correspondant aux n valeurs de $1^{\frac{1}{n}}$.

Supposons enfin que l'on élève une expression imaginaire à la puissance $m:n$, m et n étant entiers et premiers entr'eux. On combinera les règles précédentes et l'on aura

$$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{\frac{m}{n}} = r^{\frac{m}{n}}\left(\cos m\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin m\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right).$$

Remarque. En résumé, toutes les règles pour élever une imaginaire $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ à une puissance μ entière ou fractionnaire, positive ou négative, sont comprises dans la formule

$$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{\mu} = r^{\mu}(\cos\mu\theta + i\sin\mu\theta),$$

θ désignant l'un quelconque des arguments que comporte l'imaginaire proposée ou l'affixe de la quantité $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ (**4**).

8. *Résolution des équations.* — On observera que les diverses valeurs des expressions

$$1^{\frac{1}{n}}, \quad (-1)^{\frac{1}{n}}, \quad [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{\frac{1}{n}},$$

n étant entier et positif, ne sont autre chose que les valeurs de z propres à vérifier les équations

$$z^n = 1, \quad z^n = -1, \quad z^n = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

et qu'ainsi les formules données plus haut fournissent la solution de ces équations. Les racines des deux premières jouissent, comme on sait, de propriétés remarquables(1).

Soit maintenant un polynôme rationnel et entier en x,

$$X = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

les coefficients $a_0, a_1, \ldots a_n$ ayant des valeurs réelles ou imaginaires. Si l'on y attribue à x une valeur de la forme $\alpha + \beta i$, il résulte des développements précédents que X se réduira à une certaine expression imaginaire $A + Bi$, A et B étant réels. Or, si la valeur donnée à x est telle que l'on ait à la fois

$$A = 0, \quad B = 0, \quad \text{d'où} \quad A + Bi = 0,$$

on dira que $\alpha + \beta i$ est une *racine* de l'équation $X = 0$. Si β est nul, la racine est *réelle*. L'algèbre prouve qu'il existe toujours n valeurs de x de la forme dite, qui vérifient cette condition, et que si l'on désigne par $\alpha + \beta i$ l'une d'elles, X est divisible algébriquement par $x - \alpha - \beta i$, en sorte que l'on a, quelque soit x,

$$X = (x - \alpha - \beta i)X_1,$$

X_1 étant un polynôme rationnel et entier de degré $n - 1$ en x. Il en résulte que si $\alpha_1 + \beta_1 i$, $\alpha_2 + \beta_2 i$, ..., $\alpha_n + \beta_n i$ désignent les n racines de l'équation $X = 0$, on aura identiquement, quelque soit x,

$$X = H(x - \alpha_1 - \beta_1 i)(x - \alpha_2 - \beta_2 i)\ldots(x - \alpha_n - \beta_n i),$$

H étant indépendant de x.

L'algèbre prouve encore que, si les coefficients $a_0, a_1, \ldots a_n$ sont réels, et si l'équation $X = 0$ admet une racine imaginaire $\alpha + \beta i$, elle admettra aussi la racine conjuguée $\alpha - \beta i$, au même degré de multiplicité.

9. Proposons-nous, comme application des principes précédents, d'*exprimer* $\cos m\theta$, $\sin m\theta$, m étant un nombre entier, *au moyen des puissances de* $\cos\theta$, $\sin\theta$. On reprendra l'équation

$$\cos m\theta + i\sin m\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^m,$$

---

(1) Voir *l'Algèbre supérieure* de SERRET.

on développera le second membre par la formule du binôme, et l'on égalera séparément, d'après le principe fondamental, les parties réelles et les coefficients de i dans les deux membres. On aura ainsi

$$\cos m\theta = \cos^m \theta - \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cos^{m-2} \theta \sin^2 \theta$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cos^{m-4} \theta \sin^4 \theta + \cdots$$

$$\sin m\theta = m \cos^{m-1} \theta \sin \theta - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos^{m-3} \theta \sin^3 \theta + \cdots,$$

équations qu'on peut d'ailleurs présenter sous diverses formes(1).

Le problème inverse consiste à exprimer $\cos^m \theta$ et $\sin^m \theta$ par les sinus et cosinus des multiples de θ. Pour cela, posons

$$\cos \theta + i \sin \theta = \lambda, \quad \cos \theta - i \sin \theta = \mu,$$

d'où l'on tire

$$(\gamma) \; \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} \lambda\mu = 1, \quad \lambda + \mu = 2 \cos \theta, \quad \lambda - \mu = 2i \sin \theta, \\ \lambda^k + \mu^k = 2 \cos k\theta, \quad \lambda^k - \mu^k = 2i \sin k\theta, \end{array} \right.$$

k étant entier. On aura donc

$$2^m \cos^m \theta = (\lambda + \mu)^m = \lambda^m + m\lambda^{m-1}\mu + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \lambda^{m-2}\mu^2$$

$$+ \cdots + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \lambda^2\mu^{m-2} + m\lambda\mu^{m-1} + \mu^m.$$

Groupons les termes également éloignés des extrêmes et appliquons les relations(γ); il viendra, en divisant par 2,

$$2^{m-1} \cos^m \theta = \cos m\theta + m \cos(m-2)\theta + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cos(m-4)\theta + \cdots$$

Si m est pair ($m = 2p$), le nombre des termes au second membre sera $p + 1$, et le dernier aura pour valeur

$$\frac{1}{2} \frac{2p(2p-1)\ldots(p+1)}{1 \cdot 2 \ldots p}.$$

Si m est impair ($m = 2p + 1$), le nombre des termes sera encore $p + 1$ et le dernier sera

$$\frac{(2p+1)\, 2p \cdots (p+2)}{1 \cdot 2 \ldots p} \cos \theta.$$

---

(1) *Cours d'analyse algébrique* de Cauchy, p. 230.

De même, si l'on développe par la formule du binôme le second membre de l'équation

$$(2i \sin \theta)^m = (\lambda - \mu)^m,$$

et que l'on groupe encore les termes également éloignés des extrêmes, on trouvera, au moyen des relations (γ) et en divisant par $2i$,

1° Si $m = 2p$,

$$\left\{ \begin{aligned} &(-1)^p\, 2^{2p-1} \sin^{2p}\theta = \cos 2p\,\theta - 2p \cos(2p-2)\,\theta \\ &+ \frac{2p(2p-1)}{1 \cdot 2} \cos(2p-4)\,\theta + \cdots + \frac{(-1)^p}{2} \frac{2p(2p-1)\ldots(p+1)}{1 \cdot 2 \ldots p}. \end{aligned} \right.$$

2° Si $m = 2p+1$,

$$(-1)^p\, 2^{2p} \sin^{2p+1}\theta = \sin(2p+1)\,\theta - (2p+1)\sin(2p-1)\,\theta$$
$$+ \frac{(2p+1)\,2p}{1 \cdot 2} \sin(2p-3)\,\theta - \cdots + (-1)^p \frac{(2p+1)\,2p\ldots(p+2)}{1 \cdot 2 \ldots p} \sin\theta.$$

Ces formules résolvent le problème proposé.

§ 3. DES NOMBRES IRRATIONNELS ET DES LIMITES.

10. La mesure des grandeurs concrètes au moyen d'une unité de même nature donne naissance aux nombres entiers et aux nombres fractionnaires, dont on étudie ensuite les propriétés abstraction faite des grandeurs qu'ils mesurent, et qu'on nomme ensemble *nombres rationnels* ou *commensurables*. On reconnaît qu'entre deux nombres rationnels, si petite que soit leur différence, on peut toujours intercaler un nombre illimité d'autres nombres rationnels; en d'autres termes, ε désignant une fraction aussi petite qu'on le veut, il est toujours possible de former une suite indéfinie des nombres rationnels tels que la différence de deux consécutifs soit moindre que ε. Nous supposons ici acquises les propriétés des nombres rationnels qui se démontrent en arithmétique.

Au point de vue purement abstrait, l'idée de nombre ne paraît pas comporter une plus grande extention. Ainsi, la recherche d'un nombre dont le carré soit égal à 2, après qu'il a été prouvé qu'aucun nombre entier ou fractionnaire ne peut vérifier cette condition, n'aurait *par elle-même* aucun objet; le symbole $\sqrt{2}$ représente une chose qui n'existe pas. Mais la mesure des grandeurs concrètes nous entraîne à élargir encore la conception des êtres numériques. Par exemple, la géométrie fait voir que la comparaison de deux droites bien définies, la diagonale du carré

et son côté, se ramène précisément à trouver un nombre qui ait 2 pour carré. Cet exemple et une foule d'autres prouvent que, sous peine de ne pouvoir représenter par des nombres les rapports d'une infinité de grandeurs concrètes à l'unité de leur espèce, il faut donner au mot *nombre* un sens plus général.

11. Formons une suite indéfinie de nombres rationnels dont chacun surpasse ou égale le précédent,

(I) $$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \ldots \leqslant a_n \ldots,$$

et une autre semblable composée de nombres décroissants

(II) $$b_1 \geqslant b_2 \geqslant b_3 \ldots \geqslant b_n \ldots,$$

satisfaisant à ces deux conditions : 1° Un nombre quelconque de la série (I) est toujours plus petit qu'on nombre quelconque de la série (II), soit

$$a_n < b_p ;$$

2° Étant donnée une fraction ε aussi petite qu'on le veut, on peut assigner une valeur n' de n telle que, pour toute valeur de n supérieure à n', on aura constamment $b_n - a_n < \varepsilon$.

Je dis que la double suite

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots; \quad b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

définit absolument un certain *nombre* q par la propriété d'être toujours compris entre a_n et b_n, quelque grand que soit n, soit que q puisse s'exprimer par un nombre rationnel, soit qu'il ne le puisse pas, et dans ce dernier cas q sera dit un nombre *irrationnel* ou *incommensurable*. Pour prouver cela, nous montrerons d'abord que ce nombre q occupe une place bien déterminée dans la série des grandeurs numériques; en d'autres termes que tout nombre rationnel donné s sera toujours, ou plus grand que q, ou plus petit que q, ou égal à q.

Or, si l'on compare le nombre donné s aux nombres des deux suites (I) et (II), trois cas seulement sont possibles :

1° Ou bien, pour une valeur suffisamment grande k de n, on aura $a_k > s$, et *a fortiori*, d'après l'hypothèse,

$$a_{k+1} > s, \quad a_{k+2} > s, \quad \ldots \quad a_n > s, \quad \ldots$$
$$b_k > s, \quad b_{k+1} > s, \ldots b_n > s, \ldots$$

Tous les nombres successifs des deux suites à partir d'un certain rang surpasseront s d'une quantité qui ne sera jamais inférieure à un nombre déterminé $a_k - s$, et le nombre q, étant *défini* par la condition d'être

indéfiniment compris entre a_n et b_n, ne peut être qualifié autrement que *plus grand que* s;

2° Ou bien, à partir d'une certaine valeur k de n, on aura constamment $b_n < s$ et *a fortiori* $a_n < s$, et l'on prouvera de la même manière que la double suite (I) et (II) définit un nombre q *plus petit que* s;

3° Ou enfin, il pourra se faire que, quelque grand que soit n, on ait toujours

$$a_n < s, \quad b_n > s,$$

en sorte que s restera *indéfiniment* compris entre a_n et b_n. Dans ce cas, les différences

$$s - a_n, \quad b_n - s,$$

étant plus petites que $b_n - a_n$, finiront par rester constamment moindres que toute fraction donnée, et s sera le nombre q défini par la double suite : celle-ci définira un nombre rationnel.

Ce nombre s est en effet le seul qui jouisse de cette propriété, car si s' était un autre nombre rationnel, plus grand, par exemple, que s, et qui serait supposé rester compris entre a_n et b_n quelque grand que soit n, la différence $s' - s = \delta$ aurait une valeur déterminée. On aurait toujours

$$a_n < s < s' < b_n,$$

et par conséquent la différence $b_n - a_n$, étant toujours plus grande que δ ne pourrait pas décroître au-dessous de toute fraction donnée ε quand n croît indéfinement, ce qui est contre l'hypothèse.

12. Montrons ensuite que le nombre q défini par les suites (I) et (II) peut, aussi bien qu'un nombre rationnel, mesurer des grandeurs concrètes, et prenons comme type simple des segments comptés sur une même droite.

Sur une droite OO' portons, à partir du point O dans le sens OO', des longueurs $OA_1, OA_2, \ldots OA_n, \ldots; OB_1, OB_2, \ldots, OB_n, \ldots$ respectivement mesurées par les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ Le nombre n croissant indéfiniment, le point A_n s'éloigne constamment du point O, le point B_n s'en rapproche constamment et la distance A_nB_n, sans pouvoir devenir nulle, finit par rester con stamment plus petite qu'une longueur donnée quelconque. L'espace

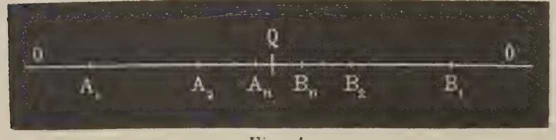


Fig. 1.

OA_n dans lequel tombent tous les points $A_1, A_2, A_3, \ldots$, et l'espace $O'B_n$ dans lequel tombent tous les points $B_1, B_2, B_3, \ldots$ ne peuvent jamais avoir aucune partie commune; ils restent donc toujours séparés, soit par un espace déterminé, soit par un point. La première supposition est impossible, car la différence $b_n - a_n$ ne deviendrait pas alors plus petite qu'une fraction donnée quelconque; il existe donc sur la droite OO′ un point unique Q toujours compris entre A_n et B_n, ou une longueur unique OQ toujours comprise entre OA_n et OB_n, quelque grand que soit n, et c'est cette longueur que mesure le nombre q défini par les suites (I) et (II).

13. Réciproquement, toute grandeur, qu'elle soit ou non susceptible d'être représentée par un nombre rationnel, sera mesurable par un nombre q défini par des suites analogues aux suites (I) et (II). Concevons par exemple, une longueur OQ portée sur la droite OO′, telle que la diagonale du carré qui a pour côté l'unité de longueur. Soient a_1 le nombre d'unités comprises dans OQ; $OA_1 = a_1$, $OB_1 = a_1 + 1$ deux longueurs entre lesquelles OQ sera évidemment compris. Partageant la longueur-unité en 10 parties égales, on portera à partir de A_1 une longueur A_1A_2 comprenant autant de ces *dixièmes* qu'il y en a dans A_1Q, et une longueur A_1B_2 en comprenant une de plus; Q sera compris entre A_2 et B_2. Puis on divisera chaque dixième de l'unité en 10 parties égales et on opérera de la même manière. En poursuivant cette opération, ou bien le point Q finira par coïncider avec l'un des points A_n, et dans ce cas OQ sera mesuré par un nombre rationnel; ou bien nous déterminerons deux suites indéfinies de longueurs $OA_1, OA_2, \ldots OA_n \ldots$; OB_1, $OB_2, \ldots OB_n, \ldots$ entre lesquelles la longueur OQ restera indéfiniment comprise, et deux suites correspondantes de nombres rationnels

$$a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots; \quad b_1, b_2, \ldots b_n, \ldots$$

jouissant des mêmes propriétés que les suites (I) et (II), et définissant conséquemment un nombre q qui mesurera exactement la longueur OQ (1).

---

(1) Ainsi, le côté du carré étant pris pour unité, les longueurs mesurées par les nombres

1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; ... d'une part, et
2; 1,5; 1,42; 1,415; 1,4143; ... d'autre part,

finiront par différer aussi peu qu'on voudra de la diagonale du carré.

Ce que nous disons d'une longueur portée sur une ligne droite se dira de toute autre grandeur susceptible de mesure à l'aide d'une unité bien définie.

14. L'*égalité* ou l'*inégalité* de deux nombres irrationnels résulte de ce qui a été dit plus haut sur leur comparaison avec un nombre rationnel.

Soient q, q' deux nombres irrationnels définis respectivement par les doubles suites

$$a_1, a_2, \dots a_n, \dots; \quad b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$$
$$a'_1, a'_2, \dots a'_m, \dots; \quad b'_1, b'_2, \dots, b'_m, \dots$$

S'il existe un nombre rationnel s tel que l'on ait, suivant les principes développés au N° **11**,

$$s > q, \quad s < q',$$

les nombres irrationnel q et q' seront *inégaux* et q' sera *plus grand que* q. S'il n'existe aucun nombre rationnel s satisfaisant à cette condition, c'est-à-dire, si l'on a toujours, pour des valeurs de n et de n' croissant indéfiniment,

$$a_n < b'_m, \quad a'_m < b_n,$$

les nombres irrationnels q et q', bien que définis par des suites différentes, seront égaux et mesureront des grandeurs concrètes égales, comme il serait facile de le faire voir.

15. Les définitions et les principes ci-dessus permettent de définir et d'étendre aux nombres irrationnels toutes les opérations de l'arithmétique; de prouver que les propriétés établies pour les nombres rationnels, telles que l'indifférence de l'ordre des facteurs dans un produit, etc..., subsistent pour les nombres irrationnels; que l'on peut, en un mot, traiter ceux-ci comme des nombres ordinaires(1). Ils permettent en outre d'établir les proprétés suivantes :

1° On peut définir les nombres par des suites doubles analogues aux suites (I) et (II), composées de nombres *irrationnels*, mais il n'est aucun nombre ainsi déterminé qui ne puisse être défini par une suite double de nombres rationnels.

---

(1) Pour ces détails, en dehors de l'objet de ce cours, on pourra consulter J. Tannery, *Introd. à la théorie des fonct. d'une variable*, ch. I; — Dini, *Teorica delle funzioni di variabili reali;* — Stolz, *Vorlesungen über allgem. Arithmetik*, etc.

2° Tous les multiples et sous multiples d'un nombre irrationnel sont eux-mêmes des nombres irrationnels ;

3° Dans un *intervalle* arbitrairement petit, c'est-à-dire entre deux nombres rationnels ou irrationnels, si petite que soit leur différence, on peut toujours intercaler un nombre illimité de nombres rationnels et un nombre illimité de nombres irrationnels ;

4° Dans un tel intervalle, il existe toujours des nombres rationnels de la forme

$$\frac{E}{p_1^\alpha p_2^\beta \dots p_m^\mu},$$

E étant entier, $p_1, p_2, \dots p_m$ des nombres premiers *donnés*; $\alpha, \beta, \dots \mu$ des exposants entiers convenablement choisis ;

5° Étant donné un nombre irrationnel q et un nombre entier D aussi grand qu'on le veut, il est toujours possible de déterminer une fraction ε telle que, entre $q - \varepsilon$ et $q + \varepsilon$, il n'existe aucun nombre fractionnaire dont le dénominateur soit moindre que D ; etc...

Enfin, les nombres irrationnels peuvent être affectés des signes + et —, et entrer ainsi dans la catégorie des *quantités* positives et négatives. Par la suite, nous attacherons toujours aux mots *nombre* et *quantité* la signification généralisée qui vient d'être expliquée.

16. *Des limites.* — On appelle *variable* toute quantité qui, dans la question où on la considère, peut recevoir successivement une infinité de valeurs différentes, tandis que les quantités auxquelles on attribue des valeurs déterminées et fixes sont appelées *constantes*.

On appelle *limite* d'une quantité variable x, une quantité fixe a dont les valeurs successives de la variable s'approchent indéfiniment, tellement que la différence $x - a$ entre la variable et cette quantité fixe, prise en valeur absolue, finit par rester constamment plus petite qu'un nombre donné ε, si petit qu'il soit, sans cependant se réduire *définitivement* à zéro.

Ainsi, soit n un nombre auquel on attribue toutes les valeurs entières successives, jusqu'à surpasser tout nombre donné ; le rapport de $n + 1$ à n aura pour limite l'unité, car la différence

$$\frac{n+1}{n} - 1 = \frac{1}{n}$$

sera constamment moindre qu'une fraction donnée ε pour toutes les

valeurs de n au-dessus d'un nombre déterminé, mais ne sera jamais rigoureusement nulle.

De même, la somme des n premiers termes de la suite indéfinie

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2^2}, \quad \frac{1}{2^3}, \quad \ldots \quad \frac{1}{2^n}, \quad \ldots$$

a pour limite l'unité quand n croît indéfiniment, car on reconnaît sans peine qu'elle diffère de l'unité d'une fraction $1 : 2^n$ qui finit par devenir et rester moindre qu'une fraction donnée ε.

De même encore, la fraction $9 : 11$ est la limite de la fraction décimale périodique 0,818181 ...; un nombre irrationnel q peut être considéré, en vertu de sa définition même, comme la limite des nombres rationnels $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$ ou des nombres $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ qui en fournissent des valeurs indéfiniment approchées; en géométrie, l'aire du cercle est la limite de l'aire d'un polygone régulier inscrit dont le nombre des côtés croît indéfiniment, etc...

La *limite* d'une quantité variable s'indique par le symbole *lim* placé devant celle-ci. Ainsi on écrira

$$\lim \frac{n+1}{n} = 1,$$

ou mieux,

$$\lim_{n=\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

17. Il importe d'observer qu'une variable ne *doit* pas s'approcher *constamment* de sa limite, elle peut s'en approcher et s'en éloigner alternativement, et même l'atteindre un nombre indéfini de fois. Soit, par exemple,

$$x = a + \frac{\alpha}{2^n} \cos \frac{n\pi}{2},$$

a et α étant des constantes données, n un nombre entier indéfiniment croissant. Pour $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ les valeurs successives de x sont

$$a + \alpha, \quad a, \quad a - \frac{\alpha}{4}, \quad a, \quad a + \frac{\alpha}{16}, \quad a, \quad a - \frac{\alpha}{64}, \quad \cdots;$$

la différence $x - a$ est donc alternativement positive, nulle, négative, etc..., et pourtant x a pour limite a. Le caractère essentiel de la limite est en effet vérifié, puisque la différence *absolue* $x - a$ finit pour rester

constamment plus petite qu'une fraction donnée ε, quelque petite qu'elle soit, pour toutes les valeurs de n surpassant un certain nombre.

18. *Principes de la théorie des limites.* — I. *Soit*

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$$

une suite indéfinie de quantités, convergeant vers une limite déterminée u. La différence $u_{n+p} - u_n$ aura pour limite zéro, lorsque n croîtra indéfiniment, p restant arbitraire.

Lorsque n croît indéfiniment, les différences $u_n - u$, $u_{n+p} - u$ ont pour limite zéro, d'après la définition de la limite; par suite

$$u_{n+p} - u_n = (u_{n+p} - u) - (u_n - u)$$

a aussi pour limite zéro.

II. Réciproquement, *si la différence $u_{n+p} - u_n$ a pour limite zéro lorsque n croît indéfiniment, pour toute valeur de p, le terme général u_n tend vers une limite déterminée u.*

A) Soit, en effet, ε une fraction déterminée, choisie aussi petite qu'on le veut. D'après le sens du mot *limite* tel que nous l'avons précisé, on pourra trouver un nombre k suffisamment grand pour que, pour toute valeur de $n \geqslant k$, on ait

$$\mathrm{VA}\,(u_{n+p} - u_n) < \varepsilon,$$

quel que soit p, de sorte que $u_{k+1}, u_{k+2}, \ldots, u_n, \ldots, u_{n+p}, \ldots$ seront compris entre $u_k - \varepsilon$ et $u_k + \varepsilon$, c'est-à-dire entre deux quantités *fixes*, et d'ailleurs aussi voisines qu'on le veut l'une de l'autre, puisque ε est arbitrairement petit.

B) Cela admis, prenons un nombre fixe q compris dans cet intervalle $(u_k - \varepsilon, u_k + \varepsilon)$ égal à 2ε. Nous pouvons faire décroître cet intervalle 2ε autant que nous le voulons, pourvu que nous prenions le nombre correspondant k assez grand, et deux hypothèses seules sont possibles :

1° Ou bien, si petit que soit ε et si grand que soit k, q fera toujours partie de l'intervalle indéfiniment décroissant; donc la différence $\mathrm{VA}\,(u_n - q)$ sera toujours moindre que 2ε pour $n > k$, et par suite u_n aura pour limite le nombre fixe q quand n croîtra indéfiniment; donc $u = q$.

2° Ou bien, on pourra prendre ε assez petit et k assez grand pour que q cesse d'être compris entre les valeurs $u_k - \varepsilon$ et $u_k + \varepsilon$. Dans ce cas, d'après A), u_n restant toujours compris pour $n \geqslant k$ entre $u_k - \varepsilon$ et $u_k + \varepsilon$,

c'est-à-dire entre deux valeurs fixes dont la plus rapprochée de q en diffère d'un nombre déterminé δ, la différence absolue entre u_n et q sera supérieure à δ pour toute valeur de $n > k$.

Pour que cette seconde hypothèse se réalisât pour *tout* nombre fixe q compris dans l'intervalle primitif 2ε, comme le raisonnement s'applique à chacun de ces nombres, il faudrait donc que u_n finît par différer constamment d'une quantité supérieure à un nombre déterminé, de *toute* valeur comprise dans un intervalle fixe dans lequel u_n doit rester lui même toujours compris, ce qui est impossible.

19. — III. *Si les termes u_1, u_2, ... u_n, ... forment une suite indéfinie toujours croissante, sans pouvoir jamais surpasser un nombre fixe* A, *u_n tend vers une limite égale ou inférieure à* A *lorsque n croît indéfiniment*

Soit

$$u_1 \leqslant u_2 \leqslant u_3 \ldots \leqslant u_n \ldots,$$

en sorte que la différence $u_{n+p} - u_n$ soit toujours positive ou nulle pour toute valeur de n et de p. Deux cas seulement sont possibles : 1° Ou bien la différence $u_{n+p} - u_n$ aura pour limite zéro, quel que soit p, lorsque n croîtra indéfiniment. Dans ce cas u_n aura une limite qui ne pourra surpasser A, d'après le théorème II.

2° Ou bien $u_{n+p} - u_n$ ne tendra pas vers la limite zéro, et comme cette différence est nécessairement positive, il existera un nombre positif ε' tel que, si grand que soit n, la différence $u_{n+p} - u_n$ surpassera ε' pour une valeur suffisamment grande de p. En effet, si cela n'était pas, $u_{n+p} - u_n$ finirait par être constamment moindre que toute fraction donnée, quelque valeur qu'on attribue à p. On aura donc, en désignant par n, n_1, n_2, ..., n_p, des nombres entiers croissants convenablement choisis,

$$u_{n_1} - u_n > \varepsilon', \quad u_{n_2} - u_{n_1} > \varepsilon', \ldots \quad u_{n_p} - u_{n_{p-1}} > \varepsilon',$$

et par suite

$$u_{n_p} - u_n > p\varepsilon'.$$

La différence $u_{n_p} - u_n$ surpasserait donc $p\varepsilon'$, et comme le nombre p est arbitrairement grand, cette différence pourrait surpasser tout nombre donné, par conséquent la limite assignée A, ce qui est contre l'hypothèse.

Le second cas étant impossible, le théorème est démontré. On prouverait de même que *si la suite u_1, u_2, ..., u_n, ... est constamment décroissante sans qu'un terme quelconque puisse devenir moindre qu'une quantité*

donnée A, *le terme général* u_n *tendra, pour des valeurs indéfiniment croissantes de* n, *vers une limite supérieure ou égale à* A.

Corollaire. — *Si, dans la suite indéfinie* (u) *de quantités croissantes ou décroissantes*

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots$$

à chaque terme u_n *correspond un terme* u_{n+p} *à partir duquel tous les termes surpassent* u_n, *le terme général* u_n *croît indéfiniment ou tend vers une limite lorsque* n *croît indéfiniment.*

Il résulte de l'hypothèse que l'on peut prendre, dans la suite proposée, une suite indéfinie (v) de termes toujours croissants, que nous désignerons par v_1, v_2, ..., v_m, ... en sorte qu'après un terme quelconque de l'une des deux suites (u), (v) il en existe une infinité appartenant à l'autre suite.

D'après le théorème III, le terme général v_m de la seconde suite croît indéfiniment ou tend vers une limite fixe L. Dans le premier cas, il existe un terme $v_{m'}$ qui surpasse tout nombre donné G, si grand qu'il soit; et comme tous les termes de la suite (u), à partir d'un certain terme $u_{n'}$, surpassent $v_{m'}$, ils surpassent G; la suite u_1, u_2, ... est indéfiniment croissante.

Dans le second cas, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite (v) restent compris entre L et L — ε, ε étant une quantité positive arbitrairement petite. Donc, à partir d'une valeur de n suffisamment grande, tous les termes u_n de la suite (u) seront moindres que L, puisqu'il sont surpassés par des termes de la suite (v) qui sont inférieurs à L; et ils seront supérieurs à L — ε, puisqu'à tout terme v_m de la suite (v) correspond un terme u_n de la série (u) à partir duquel on a constamment $u_{n+p} > v_m$. Les termes de la suite (u) finissent donc par rester compris entre L et L — ε et ont pour limite L.

20. — IV. *Deux quantités variables* x *et* y *assujetties à rester constamment égales entr'elles, tendent nécessairement vers des limites égales*, car si a est la limite de x, $y - a = x - a$ a pour limite zéro. Autrement : Une même quantité variable ne peut tendre en même temps vers deux limites distinctes.

V. *Lorsqu'une quantité variable* z *reste toujours comprise entre deux autres* x *et* y, *et que celles-ci ont une même limite* a, z *a aussi pour limite* a; car la différence $z - a$ est toujours comprise entre $x - a$ et $y - a$; elle deviendra donc, en même temps que celles-ci, numériquement inférieure à toute fraction donnée.

21. — VI. La limite de la somme de deux ou de plusieurs variables $x, y, z, \ldots$, qui ont respectivement pour limites des quantités déterminées $a, b, c, \ldots$ est la somme des limites $a, b, c, \ldots$ de ces variables. — La limite de la différence $x - y$ de deux variables, est la différence $a - b$ de leurs limites. — La limite du produit $xyz \ldots$ de plusieurs variables est le produit $abc \ldots$ de leurs limites, ce qui s'étend de soi-même à la limite de la puissance $n^{ième}$ d'une variable. — La limite du rapport $x : y$ de deux variables x et y qui ont respectivement pour limites a et b est égale au rapport $a : b$ de ces limites, pourvu que b soit différent de zéro.

Toutes ces propositions se démontrent facilement ; nous prendrons comme exemple la dernière. On a, par hypothèse,

$$\lim x = a, \quad \lim y = b, \quad b \gtrless 0;$$

donc

$$x = a + \alpha, \quad y = b + \beta,$$

α et β étant des quantités qui ont pour limite zéro. On a donc, puisque b n'est pas nul,

$$\frac{x}{y} - \frac{a}{b} = \frac{a+\alpha}{b+\beta} - \frac{a}{b} = \frac{b\alpha - a\beta}{b(b+\beta)}.$$

Puisque α et β tendent simultanément ver la limite zéro, VA $(b\alpha - a\beta)$ finira par rester constamment plus petit qu'une fraction donnée quelconque ε. D'autre part, $b(b+\beta)$ ayant pour limite b^2, le dénominateur finira par surpasser constamment un nombre fixe h convenablement choisi. Le quotient finira donc par être toujours, en valeur absolue, plus petit que $\varepsilon : h$, c'est-à-dire qu'une fraction arbitrairement petite. La différence

$$\frac{x}{y} - \frac{a}{b}$$

aura donc pour limite zéro, C. Q. F. D.

On conclut des propriétés ci-dessus que la limite du quotient de deux polynômes dont les termes sont des produits de puissances entières de variables $x, y, z, ., \ldots$ s'obtient en remplaçant simplement chaque variable par sa limite $a, b, c, \ldots$ sauf dans le cas où ces substitutions rendraient le dénominateur égal à zéro.

22. *Méthode des limites.* — Pour trouver les relations qui existent entre certaines grandeurs analytiques, géométriques, etc., que l'on ne

saurait comparer directement entr'elles, on les considère comme limites d'autres grandeurs *variables* de nature plus simple, entre lesquelles il est plus facile d'établir la relation. Cette relation s'exprimera par une équation dont les deux membres seront des sommes, des produits, des quotients, des puissances, etc., de ces quantités variables, et en vertu des propriétés rappelées ci-dessus (IV et VI), l'égalité ne cessera pas de subsister lorsqu'on y remplacera chaque variable par sa limite. On aura ainsi une relation entre ces limites, c'est-à-dire entre les grandeurs mêmes que l'on voulait comparer.

Supposons, par exemple, que l'on cherche une relation entre le volume V, la hauteur h et le base B d'un cône circulaire droit. Inscrivons dans le cercle, base du cône, un polygone régulier d'un nombre n de côtés; soient B′ l'aire de ce polygone, V′ le volume de la pyramide qui a même sommet que le cône. On sait, par voie directe, établir l'égalité

$$V' = \frac{1}{3} B'h.$$

D'autre part, on sait établir que lorsque n croît indéfiniment, l'aire du polygone et le volume de la pyramide finissent par différer respectivement, de l'aire du cercle et du volume du cône, de quantités moindres qu'une grandeur donnée quelconque. On a donc, dans cette hypothèse

$$\lim B' = B, \quad \lim V' = V,$$

et par suite, remplaçant les deux membres de l'égalité ci-dessus par leurs limites,

$$V = \frac{1}{3} Bh.$$

Ici donc, la méthode des limites conduit à une relation entre des grandeurs qui ne seraient pas comparables directement.

Quelquefois, la méthode sert à tirer d'une relation générale entre diverses quantités, la relation correspondant à un cas particulier dans lequel la formule générale ne subsiste plus, et qui exigerait autrement une démonstration spéciale. Ainsi la relation

$$1 + aa' + (a + a') \cos \gamma = 0,$$

entre les coefficients angulaires a et a' de deux droites rectangulaires et l'angle γ des axes coordonnés, ne s'applique pas au cas où l'une des droites serait parallèle à l'axe des y, car son coefficient angulaire a serait

infini. Mais si l'on divise l'équation par a, si l'on suppose que la droite qui a le coefficient angulaire a se rapproche indéfiniment de l'axe des y, $1 : a$ et $a' : a$ auront pour limite zéro, et par l'application de la méthode des limites on aura

$$\lim a' + \cos \gamma = 0.$$

On peut prouver que lim a' représente le coefficient angulaire de la droite perpendiculaire à l'axe des y; donc, l'équation détermine ce coefficient.

Les exemples suivants, qui se rapportent d'ailleurs à des points importants pour la suite, montrent d'autres applications de la méthode des limites et des théorèmes II et III.

23. *Limite de l'expression* $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$, *lorsque* α *a pour limite zéro.* — I. Nous supposerons d'abord que m désigne un entier positif, indéfiniment croissant, et nous chercherons la limite de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$. La formule du binôme nous donne

$$\text{(A)} \quad \left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{m}{1}\cdot\frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{1.2}\,\frac{1}{m^2} + \cdots + \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p}\,\frac{1}{m^p} + \cdots + \frac{1}{m^m}.$$

Le $p+1^{\text{ième}}$ terme peut s'écrire, p étant $< m$,

$$\frac{1}{1.2\ldots p}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{p-1}{m}\right),$$

et sous cette forme on voit 1° qu'il est toujours positif comme composé de facteurs positifs; 2° que, pour une même valeur de p, ce terme croît constamment avec m; 3° qu'il reste toujours moindre que $\frac{1}{1.2\ldots p}$, puisque tous les autres facteurs sont inférieurs à l'unité. L'expression proposée est donc constamment croissante avec m, puisque, d'une part, le nombre $m+1$ de ses termes augmente; d'autre part, un terme de rang fixe croît constamment. En outre, on a

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < 1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\cdots+\frac{1}{1.2\ldots p}+\cdots+\frac{1}{1.2\ldots m}$$

$$< 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{p-1}}+\cdots+\frac{1}{2^{m-1}} < 3$$

car, d'après la remarque du N° **16**, la somme des $m-1$ derniers termes reste inférieure à l'unité.

La valeur de l'expression (A) étant constamment croissante lorsque m croît indéfiniment, et ne pouvant surpasser 3, a une limite e inférieure ou égale à 3 (N° **19**).

II. Supposons maintenant que α tende vers zéro d'une manière quelconque, en restant positif; $1:\alpha$ sera toujours compris entre deux nombres entiers consécutifs m, $m+1$, lesquels croîtront indéfiniment. On pourra donc poser

$$\frac{1}{\alpha}=m+\gamma, \quad \text{où} \quad 0<\gamma<1,$$

et par suite on aura

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\left(1+\frac{1}{m+\gamma}\right)^{m+\gamma}<\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+\gamma}<\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\left(1+\frac{1}{m}\right),$$

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}>\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+\gamma}>\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}:\left(1+\frac{1}{m+1}\right).$$

Quand m et $m+1$ croissent indéfiniment,

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} \quad \text{et} \quad \left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}$$

ont pour limite e, d'après I. D'autre part, $1+\frac{1}{m}$ et $1+\frac{1}{m+1}$ ont pour limite l'unité, donc (**21**) les derniers membres de ces inégalités ont pour limite e et l'expression (A), constamment comprise entr'eux, a pour limite e.

III. Si α tend vers zéro en restant *négatif*, $1+\alpha$ aura pour limite l'unité en lui restant inférieur, et l'on posera

$$1+\alpha=\frac{1}{1+\beta}.$$

β étant *positif* et ayant pour limite zéro. On a donc

$$\frac{1}{\alpha}=-\frac{1+\beta}{\beta}, \quad (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=(1+\beta)^{\frac{1+\beta}{\beta}}=(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}(1+\beta),$$

et comme le premier facteur a pour limite e d'après II, tandis que le second tend vers l'unité, le produit a pour limite e.

Enfin, si α tend vers la limite zéro d'une manière quelconque, puisque

l'expression (A) à la même limite e pour les valeurs positives et pour les valeurs négatives de α, on aura dans tous les cas

$$(1) \qquad \lim_{\alpha=0} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

Nous verrons plus loin comment on évalue ce nombre e, qui est irrationnel et sert de base au système des logarithmes *népériens* ou *naturels*, que nous désignerons par la caractéristique l.

Corollaire. Cherchons la limite, lorsque α tend vers zéro, de l'expression

$$z = \frac{\mathrm{l}.(1+\alpha)}{\alpha}.$$

Cette équation nous donne

$$z = \mathrm{l}.[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}], \quad (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e^z.$$

Le premier membre a pour limite le nombre e, donc e^z a pour limite e, ce qui ne peut avoir lieu que si z a pour limite l'unité. On a donc

$$(2) \qquad \lim_{\alpha=0} \frac{\mathrm{l}.(1+\alpha)}{\alpha} = 1.$$

24. Cherchons encore la limite, quand x croît indéfiniment, de l'expression

$$u = \frac{a^x}{x^n}, \quad (a>1, \quad n>0).$$

Considérons deux valeurs très grandes de x, soient x et $x+h$; la différence $u_{x+h} - u_x$ des valeurs de u sera

$$\frac{a^{x+h}}{(x+h)^n} - \frac{a^x}{x^n} = \frac{a^x}{x^n}\left[\frac{a^h}{\left(1+\frac{h}{x}\right)^n} - 1\right].$$

Supposant $h>0$ et constant, faisons croître x indéfiniment; $a^x : x^n$ étant évidemment positif, et le facteur entre crochets ayant pour limite $a^h - 1$ qui est aussi positif, $u_{x+h} - u_x$ sera positif, quel que soit h, pour toute valeur de x surpassant un certain nombre X. On en conclut que u est une variable toujours croissante avec x, au moins à partir de $x = \mathrm{X}$; il en résulte (**19**) qu'elle doit tendre vers une limite déterminée ou croître au-dessus de tout nombre donné.

Or, le facteur $a^x : x^n$ ne peut avoir pour limite zéro, puisqu'il est

positif et croissant ; le facteur entre crochets a pour limite $a^h - 1 > 0$, h restant constant ; donc le produit, c'est-à-dire la différence $u_{x+h} - u_x$, ne tend pas vers zéro, donc (**18**)

$$u = \frac{a^x}{x^n}, \quad (a > 1, n > 0),$$

croît indéfiniment en même temps que x.

Posons

$$z = n\mathrm{l}x, \quad \text{ou} \quad x^n = e^z,$$

d'où

$$\frac{n\mathrm{l}x}{x^n} = \frac{z}{e^z}.$$

Si l'on fait croître indéfiniment x et par conséquent z, le second membre de cette équation tendra vers zéro, d'après ce qui précède. Nous aurons donc

$$\lim_{x=\infty} \frac{\mathrm{l}x}{x^n} = 0,$$

et en particulier, pour $n = 1$,

(3) $$\lim_{x=\infty} \frac{\mathrm{l}x}{x} = 0.$$

Posons encore

$$x = \frac{1}{y}, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{l}x = -\mathrm{l}y, \quad \frac{1}{x^n} = y^n;$$

nous aurons, y ayant pour limite zéro quand x croît à l'infini,

$$\lim_{y=0} y^n \mathrm{l}.y = 0, \quad n > 0.$$

On conclut aussi facilement, de l'équation (3), que x^x a pour limite l'unité lorsque x tend vers zéro.

25. Les quantités peuvent être regardées comme limites d'expressions de formes très variées, et à chacun de ces modes correspond une branche de la méthode des limites. Nous en considérerons trois principaux :

1° *Une quantité peut être regardée comme la limite vers laquelle tend la somme d'un nombre de plus en plus grand de termes pris dans une suite indéfinie de quantités déterminées* (Séries).

C'est le cas du deuxième exemple du N° **16**.

2° *Une quantité peut dépendre de la limite du rapport de deux quantités*

variables qui tendent simultanément vers la limite zéro (tangentes, calcul différentiel).

3° *Une quantité peut être considérée comme la limite vers laquelle tend une somme de quantités variables qui ont pour limite zéro, mais dont le nombre croît indéfiniment* (aires planes, calcul intégral).

Nous allons développer successivement les principes essentiels de ces trois sections de la méthode des limites. On considère aussi les limites de produits composés d'un nombre de facteurs indéfiniment croissant, etc., etc...

§ 4. DES SÉRIES.

26. On appelle *série* une suite indéfinie de quantités $u_0, u_1, \dots u_n, \dots$ formées suivant une loi déterminée. Le terme u_n se nomme le *terme général* de la série; son expression, donnée en fonction de l'indice n, fait connaître toute la série. Soit

$$s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$$

la somme des n premiers termes de la série. Si, pour une valeur indéfiniment croissante de n, la somme s_n tend vers une limite finie et déterminée s, la série est dite *convergente* ; s est la *somme* de la série. Si, au contraire, s_n ne tend vers aucune limite ou croît indéfiniment, on dit que la série est *divergente*. Ainsi, d'après les élements, la série

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^n + \dots$$

est convergente si $\alpha < 1$; elle a pour somme, dans ce cas $(1 - \alpha)^{-1}$. Si $\alpha \geqslant 1$, la série est divergente, s_n croît indéfiniment avec n. Si $\alpha = -1$, la série

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

est encore divergente, car s_n a alternativement pour valeur $+1$ et 0 lorsque n croît indéfiniment. Soit encore la série

$$\frac{1}{\alpha(\alpha+1)} + \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + \dots + \frac{1}{(\alpha+n-1)(\alpha+n)} + \dots$$

En observant que l'on a

$$\frac{1}{(\alpha+n-1)(\alpha+n)} = \frac{1}{(\alpha+n-1)} - \frac{1}{\alpha+n},$$

en voit que

$$s_n = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+2} + \dots + \frac{1}{\alpha+n-1} - \frac{1}{\alpha+n} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha+n}$$

et que cette expression a pour limite $1 : \alpha$ lorsque n croît sans limite. La série est donc convergente et a pour somme $1 : \alpha$, pour toute valeur de α autre que zéro.

La série

(1) $$u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots$$

se désigne souvent, pour abréger, par Σu_n.

27. Si la série Σu_n est convergente, il est clair que la série $u_n + u_{n+1} + \cdots$ est aussi convergente et a pour somme $s - s_n$. Désignons par R_n la somme de cette série. Nous aurons

$$s = s_n + R_n\,;$$

R_n est ce qu'on nomme le *reste* à partir du $n^{ième}$ terme. Réciproquement, si la série $u_n + u_{n+1} + \cdots$ est convergente pour une valeur donnée de n, la série totale Σu_n sera aussi convergente. On peut donc toujours, dans l'étude de la convergence d'une série, faire abstraction d'un nombre arbitraire de termes à partir du premier.

28. *Propriétés générales des séries.* — I. *Dans toute série convergente, le terme général u_n a pour limite zéro lorsque n croît indéfiniment.*

De l'équation

$$s_{n+1} - s_n = u_n$$

on déduit que, s_{n+1} et s_n ayant une même limite s, leur différence u_n tend nécessairement vers zéro. Le théorème I du N° **18** montre qu'il en est de même pour la différence

$$s_{n+p} - s_n = u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p-1},$$

p désignant un nombre entier tout à fait arbitraire.

29. — II. *La condition nécessaire et suffisante de la convergence de la série*

(1) $$u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots$$

est que la somme

(2) $$u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p-1} = s_{n+p} - s_n$$

d'un nombre p de termes successifs à partir du $n^{ième}$ ait pour limite zéro, lorsque n croît indéfiniment, p restant toujours arbitraire.

Cette condition est nécessaire, d'après la remarque précédente; elle est suffisante, d'après le deuxième principe de la théorie des limites (**18**). Il faut toujours observer que p peut être constant, ou variable suivant une loi quelconque, même indéfiniment croissant.

30. — III. *Si les termes d'une série* (A), *à partir d'un rang déterminé, sont tous, en valeur absolue, inférieurs ou égaux aux termes correspondants d'une série convergente* (B) *à termes positifs, la série* (A) *sera elle-même convergente;* car, dans la série (A), la différence $s_{n+p} - s_n$ aura une valeur absolue inférieure ou tout au plus égale à celle qu'elle possède dans la série (B), et comme, dans celle-ci, elle a pour limite zéro quand n croît indéfiniment (**28**), elle a aussi pour limite zéro dans la série (A), qui est donc convergente.

31. — IV. *Si l'on multiplie les termes successifs* $u_0, u_1, \dots u_n, \dots$ *d'une série convergente à termes positifs par des facteurs* $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots$ *de signes quelconques, mais dont la valeur absolue ne surpasse pas un nombre déterminé* A, *la série* $\Sigma\alpha_n u_n$ *ainsi formée sera encore convergente.*

On a en effet (**1**)

$$\alpha_n u_n + \alpha_{n+1} u_{n+1} + \cdots + \alpha_{n+p-1} u_{n+p-1} = (u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p-1}) \times \mathcal{M}(\alpha_n, \alpha_{n+1}, \dots, \alpha_{n+p-1});$$

le premier facteur a pour limite zéro quand n croît à l'infini, puisque la série Σu_n est convergente; le deuxième est égal ou inférieur à A, donc le produit a pour limite zéro, ce qui entraîne, d'après le théorème II, la convergence de la série.

Si l'on a $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \dots$, la somme de la série $\Sigma\alpha_n u_n$ sera évidemment $\alpha_0 s$, s étant la somme de la série Σu_n.

32. Une série dont les termes ne sont pas tous de même signe est dite *absolument* convergente, lorsque la série formée des valeurs absolues de ses termes est convergente.

V. *Dans une série absolument convergente, on peut changer l'ordre des termes comme on le veut, sans que la série cesse d'être convergente et d'avoir la même somme.*

Soit

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots \tag{1}$$

une série absolument convergente, s sa somme, r_n la valeur absolue de u_n, et admettons que Σr_n soit convergente. En disposant dans un autre ordre les termes de la série (1), on formera une nouvelle série

$$v_0 + v_1 + \cdots + v_m + \cdots; \tag{3}$$

soit s'_m la somme des m premiers termes de cette série. On pourra prendre m assez grand pour que s'_m renferme les n premiers termes de

la série (1), avec d'autres indices supérieurs à $n - 1$, mais inférieurs à $n + p$. Donc

$$s'_m = s_n + u_\alpha + u_\beta + \cdots + u_\lambda,$$

d'où

$$\mathrm{VA}\,(s'_m - s_n) \leqq r_\alpha + r_\beta + \cdots + r_\lambda \leqq r_n + r_{n+1} + \cdots + r_{n+p-1}.$$

Comme la série Σr_n est convergente par hypothèse, cette dernière somme tend vers zéro quand n croît indéfiniment (**28**); il en est donc de même *à fortiori* de $s'_m - s_n$, et comme m croît indéfiniment avec n, que s_n a pour limite s, il s'ensuit que s'_m a pour limite s lorsque m croît à l'infini, ce qui démontre la proposition.

Remarques. — 1° La démonstration même suppose que la différence des rangs qu'un terme *déterminé* u_r occupe dans les deux séries ne puisse surpasser tout nombre donné. Dans le cas contraire, si, par exemple, on formait la série (3) en écrivant d'abord tous les termes de rang pair de (1), puis tous les termes de rang impair, on tomberait sur les *séries multiples* dont nous ne nous occupons pas ici.

2° La propriété n'est vraie que pour les séries absolument convergentes. Ainsi, la série

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \cdots$$

est convergente et a pour somme zéro, mais elle est *relativement convergente*, car la série

$$1 + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3} + \cdots$$

composée des mêmes termes écrits dans un ordre différent, équivaut à la série

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

qui est convergente, comme on le verra plus loin, et dont la somme est supérieure à 0,5.

On peut même établir cette propriété curieuse : *Quand une série est relativement convergente, il est possible de disposer ses termes dans un ordre tel que la série converge vers une limite arbitrairement choisie* A[1].

---

(1) Voir Thomæ, *Elem. Theorie der Anal. Funct. einer complexen Veränd.*, p. 21.

Les séries convergentes étant les seules dont l'emploi soit légitime, nous allons donner les caractères qui font voir si une série est convergente ou divergente, en commençant par les séries dont tous les termes sont de même signe.

33. *Séries à termes positifs.* — Lorsqu'une série Σu_n a tous ses termes positifs, si s_n ne croît pas indéfiniment avec n, la série sera convergente d'après le théorème du N° **19**.

VI. *Si, à partir d'une certaine valeur de n, le rapport $u_{n+1} : u_n$ reste constamment plus petit qu'une quantité fixe k moindre que l'unité, la série est convergente; s'il reste constamment supérieur à l'unité, la série est divergente.*

On a en effet, dans le premier cas,

$$u_{n+1} < ku_n, \quad u_{n+2} < ku_{n+1} < k^2u_n, \quad u_{n+3} < k^3u_n, \quad \ldots,$$

donc la série Σu_n a tous ses termes, à partir d'un certain rang, égaux ou inférieurs à ceux de la progression géométrique

$$u_n + u_nk + u_nk^2 + \cdots,$$

laquelle est convergente puisque l'on a $k < 1$; elle est donc aussi convergente (III).

Dans le second cas, les termes, à partir d'un certain rang, sont toujours croissants, et l'on n'a pas $\lim u_n = 0$.

Corollaire. — Si le rapport $u_{n+1} : u_n$ a une limite déterminée λ lorsque n croît à l'infini, la série est convergente si $\lambda < 1$, divergente si $\lambda > 1$. Car, dans le premier cas, l'on choisira un nombre k tel que l'on ait

$$\lambda < k < 1;$$

le rapport $u_{n+1} : u_n$, ayant pour limite λ, finira par être toujours plus petit que k, et la série sera convergente d'après le théorème. Dans le second, le rapport $u_{n+1} : u_n$ finira par surpasser constamment l'unité.

Exemples : La série

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \cdots + \frac{1}{1.2\ldots n} + \cdots$$

est convergente, car

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n+1}$$

a pour limite zéro.

Dans la série

$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots, \quad (x>0)$$

le rapport d'un terme au précédent est égal à

$$\frac{x^{n+1}}{n+1}:\frac{x^n}{n}=\frac{n}{n+1}x,$$

et sa limite est x. La série est convergente si $x<1$, divergente si $x>1$.

34. — VII. *Si, dans la série* (1) *l'expression* $\sqrt[n]{u_n}$ *finit par rester toujours plus petite qu'un nombre fixe* k *moindre que l'unité, la série est convergente; si cette expression finit par rester constamment supérieure à l'unité, la série est divergente.*

Dans le premier cas, pour toutes les valeurs de n qui surpassent un certain nombre, on a

$$\sqrt[n]{u_n}<k \quad \text{ou} \quad u_n<k^n;$$

la série a donc tous ses termes plus petits que les termes correspondants de la progression géométrique convergente

$$1+k+k^2+\cdots+k^n+\cdots$$

et elle est convergente. Dans le second cas, u_n finit par être toujours plus grand que l'unité et la série est divergente.

Corollaire. — *Si* $\sqrt[n]{u_n}$ *a une limite* λ *lorsque* n *croît indéfiniment, la série* (1) *est convergente si* λ *est* <1, *divergente si* λ *est* >1.

Exemple : Dans la série

$$1+\frac{3x}{2}+\left(\frac{4x}{3}\right)^2+\left(\frac{5x}{4}\right)^3+\cdots+\left(\frac{n+2}{n+1}x\right)^n+\cdots,$$

l'expression considérée plus haut a pour valeur

$$\frac{n+2}{n+1}x,$$

dont la limite est x lorsque n croît indéfiniment.

La série est donc convergente ou divergente suivant que x est <1 ou >1.

35. Dans les cas douteux où $\lambda=1$, on peut faire usage de la remarque suivante :

Si Σu_n, Σv_n sont deux séries à termes positifs dont la première est convergente et si, à partir d'une valeur N *de n, on a constamment*

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \leqq \frac{u_{n+1}}{u_n},$$

la série Σv_n sera aussi convergente.

Car on aura

$$v_{n+1} \leqq \frac{v_n}{u_n} u_{n+1}, \quad v_{n+2} \leqq \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} u_{n+2} \leqq \frac{v_n}{u_n} u_{n+2}, \quad \dots$$

la série Σv_n aura donc tous ses termes, à partir de $n = \mathrm{N}$, égaux ou inférieurs aux termes de même rang de la série convergente

$$\frac{v_n}{u_n} u_{n+1}, \quad \frac{v_n}{u_n} u_{n+2}, \quad \dots, \quad \frac{v_n}{u_n} u_{n+p}, \quad \dots$$

et sera convergente. De même, *si la série Σu_n était divergente et que, à partir de $n = \mathrm{N}$, on eût toujours*

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \geqq \frac{u_{n+1}}{u_n},$$

la série Σv_n serait divergente.

36. Pour tirer parti de cette remarque, nous considérons d'abord la série

$$(4) \qquad \frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} + \dots = \Sigma \frac{1}{n^\alpha},$$

α désignant une constante *positive*. Dans la série

$$(4') \qquad \frac{1}{1^\alpha} + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha}\right) + \dots,$$

chaque terme est égal ou supérieur au terme de même rang de la série (4); or, en groupant les termes de la série (4') par 1, 2, 4, 8, ... on trouve la série

$$\frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{4^{\alpha-1}} + \frac{1}{8^{\alpha-1}} + \dots,$$

progression géométrique dont la raison est $1 : 2^{\alpha-1}$, qui est donc convergente si $\alpha > 1$, et dont la convergence entraîne celle de la série (4'), puisque la somme de ses n premiers termes est la même que celles des $2^n - 1$ premiers termes de (4'). La série (4) est donc aussi convergente (**30**).

Prenons, d'autre part, la série

$$(4'')\qquad \frac{1}{2^\alpha}+\left(\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}\right)+\left(\frac{1}{8^\alpha}+\frac{1}{8^\alpha}+\frac{1}{8^\alpha}+\frac{1}{8^\alpha}\right)+\cdots$$

dont chaque terme est inférieur au terme du même rang de la série (4). En groupant les termes par 1, 2, 4, 8, ... on trouve la progression géométrique

$$\frac{1}{2^\alpha}+\frac{2}{4^\alpha}+\frac{4}{8^\alpha}+\cdots=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}+\frac{1}{4^{\alpha-1}}+\frac{1}{8^{\alpha-1}}+\cdots\right)$$

qui a pour raison $1:2^{\alpha-1}$, et qui est divergente, par conséquent, si $\alpha \leqslant 1$, puisque la raison est $\geqslant 1$. La série (4) est donc *a fortiori* divergente. D'où cette importante proposition :

La série

$$\frac{1}{1^\alpha}+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}+\cdots=\Sigma\frac{1}{n^\alpha},\quad (\alpha>0),$$

est convergente lorsque α est plus grand que 1, *divergente lorsque α est égal ou inférieur à* 1. Ainsi la série

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots,$$

dite *série harmonique*, a une somme infinie, quoique le terme général u_n ait pour limite zéro, ce qui montre bien que la condition I est nécessaire, mais non suffisante pour la convergence.

37. VIII. — *Soient Σu_n, Σv_n deux séries à termes positifs. Si l'on a constamment, à partir d'une certaine valeur de n,*

$$(5)\qquad v_n-\frac{u_{n+1}}{u_n}v_{n+1}>A>0,$$

A étant une constante positive, la série Σu_n est convergente. Si l'on a au contraire

$$(6)\qquad v_n-\frac{u_{n+1}}{u_n}v_{n+1}<0,$$

et si la série $\Sigma\frac{1}{v_n}$ est divergente, la série Σu_n sera divergente.

Il suit de l'inégalité (5) que l'on a

$$u_nv_n-u_{n+1}v_{n+1}>Au_n>0;$$

l'expression $u_n v_n$, constamment positive et décroissante, a une limite positive ou nulle k (**19**) ; la série

$$\Sigma(u_n v_n - u_{n+1} v_{n+1}) = u_0 v_0 - u_1 v_1 + u_1 v_1 - u_2 v_2 + \cdots = u_0 v_0 - k$$

est donc convergente, et la série $\Sigma A u_n = A \Sigma u_n$ l'est *a fortiori*, puisqu'elle a ses termes moindres. De l'inégalité (6), il résulte

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{v_n}{v_{n+1}} = \frac{1}{v_{n+1}} : \frac{1}{v_n},$$

et puisque la série $\Sigma \frac{1}{v_n}$ est divergente par hypothèse, la série Σu_n l'est à plus forte raison (**35**).

Si, dans ce théorème, on prend $v_n = 1$, ce qui est permis, puisque $\Sigma \frac{1}{v_n}$ est divergente, on retrouve le criterium VI. Dans le cas douteux où le rapport $u_{n+1} : u_n$ tend vers l'unité, on fera $v_n = n - 1$, ce qui est permis (**36**). On aura

$$v_n - \frac{u_{n+1}}{u_n} v_{n+1} = n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) - 1,$$

et l'on en conclura cette règle :

IX. *Si, dans la série* (**1**) *à termes positifs, le rapport d'un terme au précédent tend vers l'unité, la série sera convergente ou divergente suivant que l'on aura, à partir d'une certaine valeur de* n,

$$n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) > 1 + A, \quad n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) < 1,$$

A *étant une constante positive quelconque.*

Si le premier membre tend vers une limite, la première condition sera remplie si cette limite est > 1, la seconde si cette limite est < 1.

38. Par exemple, dans la série

$$1 - mx + \frac{m(m-1)}{1.2} x^2 - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} x^3 + \cdots,$$

On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n-m}{n+1} x.$$

La limite de ce rapport est x, la série est convergente si $x < 1$, divergente si $x > 1$, d'après la règle VI. Si $x = 1$, on a

$$\lim n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \lim n \frac{m+1}{n+1} = m + 1,$$

la série est convergente pour $x = 1$ si m est > 0. — La série de Gauss

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2 + \cdots,$$

dans laquelle γ n'est pas supposé un nombre entier négatif, donne

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)}x.$$

La limite de ce rapport pour $n = \infty$ est x, la série est convergente ou divergente suivant que x est < 1 ou > 1. Si $x = 1$, on applique la règle IX. On a

$$n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = n\frac{(\gamma - \alpha - \beta + 1)n + \gamma - \alpha\beta}{(1+n)(\gamma+n)}$$

dont la limite est $\gamma - \alpha - \beta + 1$. La série est convergente ou divergente suivant que γ est plus grand ou plus petit que $\alpha + \beta$.

39. Le théorème suivant, dû à Abel, peut aussi servir à décider de la convergence d'une série :

X. *La série* (1) *étant à termes positifs, posons* $\sigma_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. *La série* (1) *et la série*

$$(\gamma) \qquad \frac{u_0}{\sigma_0} + \frac{u_1}{\sigma_1} + \cdots + \frac{u_n}{\sigma_n} + \cdots = \Sigma\frac{u_n}{\sigma_n}$$

seront ensemble convergentes ou divergentes.

Si la série (1) est convergente, σ_n croît avec n sans pouvoir surpasser une valeur fixe, $1 : \sigma_n$ décroît donc constamment, et la convergence de la série (γ) est une conséquence du théorème IV.

Si la série (1) est divergente, on a, à cause des relations

$$\sigma_n < \sigma_{n+1} < \sigma_{n+2} < \cdots,$$

$$\frac{u_n}{\sigma_n} + \frac{u_{n+1}}{\sigma_{n+1}} + \cdots + \frac{u_{n+p}}{\sigma_{n+p}} > \frac{u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}}{\sigma_{n+p}}.$$

Cette dernière fraction peut s'écrire

$$\frac{u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}}{\sigma_{n-1} + u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}} = 1 : \left[1 + \frac{\sigma_{n-1}}{u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}}\right].$$

La série (1) étant divergente, si l'on attribue à n et par suite à σ_{n-1} une valeur fixe, on peut faire p assez grand pour que l'expression

$$u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}$$

surpasse tout nombre donné. On a donc

$$\frac{u_n}{\sigma_n} + \frac{u_{n+1}}{\sigma_{n+1}} + \cdots + \frac{u_{n+p}}{\sigma_{n+p}} > \frac{1}{1+\varepsilon},$$

ε étant aussi petit qu'on le veut. Donc, quelque grand que soit n, on peut faire croître p jusqu'à ce que, dans la série (γ), la différence $s_{n+p} - s_n$ diffère très-peu de l'unité, ce qui, en vertu du théorème II, montre que la série (γ) est divergente. Le théorème est donc démontré.

Ainsi, de la série évidemment divergente

$$1 + 1 + 1 + 1 + \ldots,$$

on tire la série divergente

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

On démontrerait de même que, si σ'_n désigne la somme des $n+1$ premiers termes de la série (γ), la série qui a pour terme général $u_n : \sigma_n \sigma'_n$ converge ou diverge en même temps que la série (1), etc. On peut donc, au moyen d'une série divergente, en former une infinité d'autres également divergentes, quoique le rapport des termes de même rang de deux séries consécutives ait pour limite zéro (1).

40. *Séries dont les termes ne sont pas tous de même signe.* — Les séries dont tous les termes sont négatifs rentrent, au point de la convergence, dans celles que nous venons d'étudier.

Quand les termes sont affectés de différents signes la remarque suivante est souvent utile : *Une série*

(1) $$u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots$$

est toujours convergente lorsqu'elle est absolument convergente. C'est une conséquence évidente du théorème III.

Il suit de là que les règles de convergence données pour les séries à termes positifs s'appliqueront aussi aux séries à termes positifs et négatifs.

---

(1) P. du Bois-Reymond a démontré un théorème en quelque sorte inverse du précédent, savoir que, si dans la série (1) supposée convergente on pose $s - s_n = t_n$, la série

$$\sum \frac{u_n}{\sqrt{t_n} + \sqrt{t_{n+1}}}$$

sera encore convergente. Voir aussi, dans le *Journal de Crelle*, t. 76, un important mémoire de cet auteur sur la théorie des séries.

Ainsi, si le rapport $u_{n+1} : u_n$, pris en valeur absolue, finit par rester plus petit qu'un nombre fixe k moindre que l'unité, la série (1) sera convergente, etc. Mais une série peut être convergente sans être absolument convergente, et voici quelques règles applicables à ces cas.

41. XI. — *Si les termes de la série* (1) *sont, à partir d'un certain rang, alternativement positifs et négatifs, et de plus constamment et indéfiniment décroissants, la série sera convergente.*

Soit u_n un terme à partir duquel ces conditions sont remplies. Nous aurons

$$s_{n+p} - s_n = u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p-1} = \pm (r_n - r_{n+1} + r_{n+2} \cdots \pm r_{n+p}),$$

r_m désignant toujours la valeur absolue de u_m.

Puisque l'on a $r_n > r_{n+1} > r_{n+2} \ldots$, la quantité

$$(r_n - r_{n+1}) + (r_{n+2} - r_{n+3}) + \cdots$$

est positive; elle est moindre que r_n puisque l'expression

$$-(r_{n+1} - r_{n+2}) - (r_{n+3} - r_{n+4}) - \cdots$$

a une valeur négative. L'expression $s_{n+p} - s_n$ ayant une valeur absolue comprise entre zéro et r_n qui tend vers zéro lorsque n croît indéfiniment, tend elle même vers zéro quel que soit p; la série est convergente (**29**). On remarque que, si l'on suppose n fixe et p indéfiniment croissant, il résulte de la propriété ci-dessus que l'on a $\text{VA}(s - s_n) < r_n$, donc, *l'erreur commise en arrêtant la série après le $n^{\text{ième}}$ terme est plus petite que le terme suivant, en valeur absolue.*

Le théorème XI prouve la convergence de la série

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \pm \frac{1}{n} \mp \cdots$$

qui n'est pas absolument convergente (**36**).

On généralise ce théorème en observant qui si *une série est composée de termes de signes variés, et si les valeurs absolues des groupes successifs formés par les termes positifs et par les termes négatifs décroissent constamment et indéfiniment, la série est convergente.*

Car 1° la série qui a pour termes ces groupes successifs est convergente, d'après XI; 2° la somme d'un nombre indéfiniment croissant de termes de la série proposée ne peut différer, de la somme d'un nombre indéfiniment croissant de termes de la seconde, que d'une quantité inférieure, en valeur absolue, au premier groupe incomplet, et qui tend par conséquent vers zéro.

Les séries non absolument convergentes étant peu fournies en règles de convergence, nous ajouterons les suivantes.

11. *Lemme. — Soient $z_p = u_0 + \cdots + u_p$ une somme dont la valeur absolue ne peut surpasser un nombre donné ε quelque grand que soit p; $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ des quantités positives décroissantes. On aura*

$$\text{VA}\,(\alpha_0 u_0 + \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_p u_p) \leqq \alpha_0 \varepsilon.$$

En effet, on a

$$u_0 = z_0,\ u_1 = z_1 - z_0,\ u_2 = z_2 - z_1,\ \ldots,\ u_p = z_p - z_{p-1},$$

d'où

$$\alpha_0 u_0 + \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p = (\alpha_0 - \alpha_1)\, z_0 + (\alpha_1 - \alpha_2)\, z_1 + \cdots + (\alpha_{p-1} - \alpha_p)\, z_{p-1} + \alpha_p z_p$$

$$= (\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_1 - \alpha_2 + \cdots + \alpha_{p-1} - \alpha_p + \alpha_p)\ \mathcal{M}\ (z_0, z_1, \ldots, z_p)$$

attendu que $\alpha_0 - \alpha_1$, $\alpha_1 - \alpha_2$, ... sont positifs (**1**, III).

Mais les quantités $z_0, z_1, \ldots z_p$ étant, en valeur absolue, égales au plus à ε, on aura

$$\text{VA}\ \mathcal{M}\ (z_0, z_1, \ldots, z_p) \leqq \varepsilon,$$

ce qui démontre la proposition.

XII. — *Si la série à termes positifs ou négatifs*

(1) $$u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots = \Sigma\, u_n$$

est convergente, et si $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \ldots$ sont des quantités positives décroissantes, la série

(7) $$\alpha_0 u_0 + \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n + \cdots = \Sigma\, \alpha_n u_n$$

sera convergente (Abel).

La série Σu_n étant convergente, on peut supposer n assez grand pour que $u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}$ ait une valeur absolue moindre qu'une quantité arbitrairement petite ε, quelque valeur qu'on attribue à p. Le lemme précédent nous donnera

$$\text{VA}\,(\alpha_n u_n + \alpha_{n+1} u_{n+1} + \cdots + \alpha_{n+p} u_{n+p}) < \alpha_n \varepsilon,$$

ce qui entraînera la convergence de la série (7).

XIII. — *Si la série à termes positifs ou négatifs Σu_n est convergente ou divergente, sans que la somme s_n des n premiers termes puisse jamais surpasser un nombre fixe* A, *et si $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont des quantités positives décroissantes et telles que* $\lim_{n=\infty} \alpha_n = 0$, *la série*

$$\alpha_0 u_0 + \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n + \cdots$$

sera convergente.

On considérera encore la somme $\alpha_n u_n + \cdots + \alpha_{n+p} u_{n+p}$; les sommes s_n, s_{n+1}, ..., s_{n+p} ayant, par hypothèse, des valeurs absolues égales ou inférieures à A, les quantités

$$u_n = s_{n+1} - s_n,\ u_n + u_{n+1} = s_{n+2} - s_n,\ \ldots$$
$$u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p} = s_{n+p+1} - s_n$$

auront, quel que soit p, des valeurs absolues égales au plus à $2A$. Il résulte donc du lemme que l'on a

$$\text{VA}\,(\alpha_n u_n + \alpha_{n+1} u_{n+1} + \cdots + \alpha_{n+p} u_{n+p}) < 2A\,\alpha_n,$$

quel que soit p. Si l'on fait croître n indéfiniment, α_n tend vers zéro par hypothèse, donc la série (5) est convergente.

43. *Séries imaginaires.* — *Une série imaginaire* est celle dont le terme général u_n est une expression imaginaire $p_n + q_n i$. Soit s_n la somme de ses n premiers termes,

$$\begin{aligned} s_n &= (p_0 + q_0 i) + (p_1 + q_1 i) + \cdots + (p_{n-1} + q_{n-1} i) \\ &= (p_0 + p_1 + \cdots + p_{n-1}) + (q_0 + q_1 + \cdots + q_{n-1})\, i. \end{aligned}$$

Si, n croissant à l'infini, les séries réelles Σp_n, Σq_n sont convergentes et ont pour sommes respectives P, Q, on dit que s_n a pour *limite* $P + Qi$; la série imaginaire est convergente et a pour somme $P + Qi$.

XIV. *Une série imaginaire est convergente lorsque la série des modules de ses termes est convergente.*

Posons

$$u_n = p_n + q_n i = r_n (\cos \theta_n + i \sin \theta_n),$$

et supposons que la série à termes positifs Σr_n soit convergente. Il en résulte, d'après le théorème IV, que les séries

$$\Sigma p_n = \Sigma r_n \cos \theta_n, \quad \Sigma q_n = \Sigma r_n \sin \theta_n$$

sont convergentes, car $\cos\theta_n$, $\sin\theta_n$ ne peuvent surpasser l'unité en valeur absolue. Donc, d'après la définition ci-dessus, la série Σu_n est convergente.

La réciproque n'est pas générale : une série imaginaire peut être convergente sans que la série des modules le soit. Mais lorsque cette dernière est convergente, la série proposée est dite *absolument convergente.*

XV. *Lorsqu'une série imaginaire est absolument convergente, on peut intervertir arbitrairement l'ordre de ses termes sans que la série cesse d'être convergente et d'avoir la même somme.*

La démonstration se fait exactement comme au n° **32**; il suffit de remplacer le mot « valeur absolue » par le mot « module ».

44. *Combinaison des séries.* — XVI. *Soient Σu_n, Σv_n deux séries convergentes, réelles ou imaginaires, ayant pour sommes respectives s et t La série*

$$(u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + \cdots + (u_n + v_n) + \cdots = \Sigma(u_n + v_n)$$

sera toujours convergente et aura pour somme $s + t$.

Soient s_n, t_n, S_n les sommes des n premiers termes des séries respectives Σu_n, Σv_n, $\Sigma(u_n + v_n)$. On a

$$S_n = s_n + t_n.$$

Mais s_n, t_n ont pour limites respectives, par hypothèse, s et t; donc (**21**) on aura

$$\lim_{n=\infty} S_n = s + t.$$

45. XVII. *Si les séries Σu_n, Σv_n sont absolument convergentes, la série $\Sigma u_\alpha v_\beta$ formée par la multiplication deux à deux des termes des deux séries, pris dans un ordre arbitraire, sera convergente et aura pour somme $s\,t$.*

Posons

$$\text{mod } u_n = r_n, \quad \text{mod } v_n = r'_n,$$

et supposons les séries Σr_n, $\Sigma r'_n$ convergentes. Le nombre n étant choisi aussi grand qu'on le veut, on peut toujours prendre dans la série $\Sigma u_\alpha v_\beta$ un nombre m de termes assez grand pour que tous les termes du produit

$$s_n t_n = (u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1})(v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1})$$

figurent dans la somme S_m de ces m premiers termes. S_m se composera donc de ces n^2 termes, et d'une série d'autres dans lesquels u ou v au moins aura un indice supérieur à $n - 1$, en sorte que l'on peut écrire

$$S_m - s_n t_n = \Sigma\,(u_{n+\alpha} v_\beta + u_{\beta'} v_{n+\alpha'}),$$

α, β, α' β' étant des nombres entiers ou nuls. Soit $n + p$ le plus grand indice qui figure dans cette somme de termes. On aura évidemment

$$\begin{aligned} \text{mod } (S_m - s_n t_n) &< \Sigma\,(r_{n+\alpha} r'_\beta + r_{\beta'} r'_{n+\alpha'}) \\ &< (r_n + r_{n+1} + \cdots + r_{n+p})(r'_1 + r'_2 + \cdots + r'_{n+p}) \\ &+ (r_1 + r_2 + \cdots + r_{n+p})(r'_n + r'_{n+1} + \cdots + r'_{n+p}). \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse, pour n indéfiniment croissant, les sommes

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_{n+p}, \quad r'_1 + r'_2 + \cdots + r'_{n+p}$$

tendent vers des limites finies, et

$$r_n + r_{n+1} + \cdots + r_{n+p}, \quad r'_n + r'_{n+1} + \cdots + r'_{n+p}$$

ont pour limite zéro. Donc on a

$$\lim (S_m - s_n t_n) = 0 \quad \text{ou} \quad \lim S_m = st. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Le théorème s'applique aux séries réelles ; les modules des termes se réduisent alors à leurs valeurs absolues.

Parmi les modes de groupement des termes, on considère surtout celui où l'on réunit les produits dans lesquels la somme des indices est o, 1, 2, ... On a alors

$$st = u_0v_0 + (u_0v_1 + u_1v_0) + (u_0v_2 + u_1v_1 + u_2v_0) \cdots$$
$$+ (u_0v_n + u_1v_{n-1} + \cdots + u_nv_0 + \cdots$$

§ 5 MÉTHODE INFINITÉSIMALE.

46. Nous avons dit, au n° **25**, qu'une quantité peut encore être regardée comme *la limite du rapport de deux quantités variables tendant simultanément vers zéro*, ou *de la somme d'un nombre indéfiniment croissant de quantités de cette espèce.* La partie de la méthode des limites dans laquelle on cherche les relations qui existent entre des grandeurs quelconques, en les considérant comme limites sous l'un de ces deux points de vue, porte le nom de *méthode infinitésimale.*

Cette méthode se simplifie au moyen de deux propositions que nous établirons après avoir posé les définitions suivantes :

Une *quantité infiniment petite*, ou *un infiniment petit*, est une *quantité variable qui a pour limite zéro.* Telle est α dans la question du n° **23**.

Lorsqu'une variable reçoit des valeurs indéfiniment croissantes, en sorte qu'elle finit par rester constamment plus grande qu'un nombre donné quelconque, on dit qu'elle *devient infiniment grande* ou qu'*elle a pour limite l'infini.*

Lorsque le rapport qu'une quantité variable à une autre a pour limite zéro, la première est dite *infiniment petite par rapport à la seconde.*

47. Théorème I. — *La limite du rapport de deux infiniment petits α et β n'est pas changée lorsqu'on les remplace par d'autres, α' et β', pourvu que les rapports $\alpha : \alpha'$, $\beta : \beta'$ aient pour limite l'unité.*

Désignons par p, p' les rapports $\alpha : \beta$, $\alpha' : \beta'$; nous aurons

$$\frac{p}{p'} = \frac{\alpha}{\beta} : \frac{\alpha'}{\beta'} = \left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right) : \left(\frac{\beta}{\beta'}\right).$$

Les deux termes de ce rapport ayant pour limite l'unité, par hypothèse, le rapport a lui-même pour limite l'unité (**21**); on a donc

$$\lim \frac{p}{p'} = 1, \quad \text{d'où} \quad \lim p = p',$$

ce que nous voulions établir.

Pour reconnaître si le rapport de deux infiniment petits tend vers l'unité, on se sert souvent de la remarque suivante :

Soient α, α' deux infiniment petits dont le rapport a pour limite l'unité; ε une quantité comprise entre α et α', en sorte que l'on ait

$$\alpha > \varepsilon > \alpha'.$$

Divisant par α' supposé > 0, on aura

$$\frac{\alpha}{\alpha'} > \frac{\varepsilon}{\alpha'} > 1,$$

et comme $\alpha : \alpha'$ est supposé tendre vers l'unité, il suit du principe V (n° **20**) que $\varepsilon : \alpha'$ tend vers la même limite. On aura donc

$$\lim \frac{\varepsilon}{\alpha'} = 1, \quad \lim \frac{\varepsilon}{\alpha} = \lim \frac{\varepsilon}{\alpha'} \cdot \frac{\alpha'}{\alpha} = 1.$$

Si α' était < 0, les inégalités changeraient de sens, mais la conclusion subsisterait.

Par exemple, on sait que la longueur d'un arc moindre qu'un quadrant est toujours comprise entre celles de son sinus et de sa tangente. Si donc α désigne un arc infiniment petit, on aura

$$\operatorname{tg} \alpha > \alpha > \sin \alpha.$$

Mais

$$\lim_{\alpha = 0} \frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = \lim \cos \alpha = 1,$$

donc on a aussi

$$\lim \frac{\alpha}{\sin \alpha} = 1, \quad \lim \frac{\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = 1.$$

On pourra donc, dans un rapport dont l'un des termes serait α, $\sin \alpha$, $\operatorname{tang} \alpha$, remplacer ces quantités l'une par l'autre sans altérer la limite du rapport.

48. Théorème II. — *La limite d'une somme d'infiniment petits de même signe, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, dont le nombre n croît indéfiniment, n'est pas changée lorsqu'on remplace ces infiniment petits respectivement par*

d'autres $\beta_1, \beta_2 \ldots, \beta_n$, *pourvu que les rapports* $\beta_i : \alpha_i$ *tendent uniformément vers l'unité.*

Nous entendons par là que, si l'on pose en général

$$\frac{\beta_i}{\alpha_i} = 1 + \varepsilon_i,$$

on peut faire en sorte que tous les ε_i soient moindres simultanément, en valeur absolue, qu'une quantité arbitrairement petite donnée σ.

On a en effet, dans cette hypothèse, d'après le n° **1**,

$$\begin{aligned}\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) + (\alpha_1\varepsilon_1 + \alpha_2\varepsilon_2 + \cdots + \alpha_n\varepsilon_n) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)(1 + \varepsilon),\end{aligned}$$

ε étant une quantité moyenne entre $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, et, par conséquent, moindre en valeur absolue que σ. De là

$$\text{VA}\left(\frac{\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n} - 1\right) < \sigma;$$

donc, lorsque n croît indéfiniment, on a

$$\lim \frac{\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n} = 1,$$

ce qui exige que $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ et $\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n$ aient même limite finie, nulle ou infinie.

Si l'une des sommes avait une valeur constante A, l'autre aurait pour limite A.

49. Théorème III. — *Quand deux infiniment petits* α *et* α' *ont pour limite de leur rapport l'unité, leur différence* δ *est infiniment petite par rapport à chacun d'eux, et réciproquement.*

En effet, l'équation $\delta = \alpha - \alpha'$ peut s'écrire

$$\text{(A)} \qquad \frac{\delta}{\alpha'} = \frac{\alpha}{\alpha'} - 1;$$

le second membre a pour limite zéro, d'après l'hypothèse, donc aussi le premier, donc δ est infiniment petit par rapport à α' (**46**). On verrait de même que $\delta : \alpha$ tend vers zéro. Réciproquement, l'équation (A) montre que si $\delta : \alpha'$ a pour limite zéro, $\alpha : \alpha'$ a pour limite l'unité.

Cette remarque permet d'énoncer les théorèmes I et II sous cette autre forme :

On peut, sans altérer la limite du rapport de deux infiniment petits,

négliger dans chaque terme de ce rapport une partie infiniment petite par rapport à lui.

On peut, sans altérer la limite d'une somme d'infiniment petits dont le nombre croît indéfiniment, négliger dans chaque terme une partie infiniment petite par rapport à lui.

On aura égard, dans ce dernier énoncé, à la restriction du nº **48**.

L'utilité de ces théorèmes dans l'emploi de la méthode infinitésimale consiste, comme on va le voir, en ce qu'ils permettent de négliger, dans la plupart des cas, précisément les parties des infiniment petits qui font la difficulté du problème; et cela, sans que l'exactitude des résultats soit altérée. Nous allons donner des exemples des deux classes de problèmes auxquelles s'appliquent ces théorèmes.

50. Le problème des tangentes aux courbes planes dépend de la limite d'un rapport d'infiniment petits.

Soit M un point donné sur une courbe plane; MM′ une sécante menée par ce point. Si, lorsque le point M′ se rapproche indéfiniment du point M, la sécante MM′ tend vers une position limite MT, cette limite des sécantes se nomme la *tangente* à la courbe au point M.

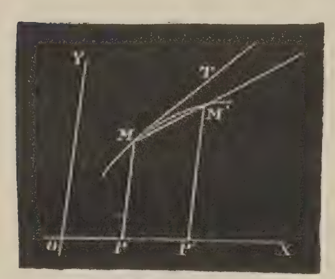


Fig. 2.

Appelons (x, y) les coordonnées du point M; $x+h$, $y+k$ celles du point M′, σ le coefficient angulaire de la sécante MM′, τ celui de la tangente. On a

$$\sigma = \frac{y+k-y}{x+h-x} = \frac{k}{h}.$$

Quand M′ se rapproche indéfiniment de M, σ a pour limite τ. D'autre part, h et k tendent simultanément vers zéro, mais leur rapport devra tendre vers une limite déterminée, et l'on aura (**20**)

$$(1) \qquad \tau = \lim \frac{k}{h}.$$

Or, h et k sont ce que nous avons appelé des quantités infiniment petites.

L'équation de la courbe permet de trouver cette limite de $k : h$. Considérons la courbe donnée par l'équation

$$\sin 2x + \sin 2y = a,$$

a étant constant. Les coordonnées x et y du point M vérifieront cette équation ; celles du point M′ la relation

$$\sin 2(x+h)+\sin 2(y+k)=a.$$

Retranchant la première de celle-ci, et transformant les différences de sinus en produits, on a

$$2\sin h\cos(2x+h)+2\sin k\cos(2y+k)=0.$$

De là

$$\frac{\sin k}{\sin h}=-\frac{\cos(2x+h)}{\cos(2y+k)}.$$

Ici se présente l'application du théorème I; h et k étant infiniment petits, on peut, d'après une remarque faite plus haut, remplacer $\sin k$ par k, $\sin h$ par h, sans altérer la limite du rapport. On a ainsi

$$\lim\frac{k}{h}=\lim\left[-\frac{\cos(2x+h)}{\cos(2y+k)}\right]=-\frac{\cos 2x}{\cos 2y}.$$

Tel est, d'après l'équation (1), le coefficient angulaire de la tangente à la courbe donnée, au point M (x, y).

51. Ce problème des tangentes nous mène à une question importante : l'équation (1) montre que la détermination générale de la tangente à une courbe dont l'équation est donnée, revient à la recherche de la limite du rapport $k : h$ des accroissements infiniment petits correspondants de l'ordonnée et de l'abscisse, à partir d'une valeur quelconque de cette dernière. Or, en vertu de l'équation de la courbe, l'ordonnée est une variable qui dépend de l'abscisse et est déterminée par elle; nous sommes donc conduits à ce problème d'analyse :

Trouver la limite du rapport des accroissements infiniment petits correspondants de deux variables qui dépendent l'une de l'autre, à partir d'une valeur quelconque de l'une d'entr'elles.

Ce problème fait l'objet du *calcul différentiel.*

52. *Limites de sommes.* — La mesure des aires des courbes planes offre une application du deuxième principe de la méthode infinitésimale. Soit ABMP l'aire à évaluer (fig. 3), comprise entre une courbe BM, l'axe des x et deux ordonnées AB, MP. Partageons cette aire en n segments par des parallèles mp, $m'p'$,... à l'axe des y; l'évaluation de chacun de ces segments offrirait les mêmes difficultés que celle de l'aire totale. Supposons, pour simplifier, que l'ordonnée croisse constamment du point

B au point M, et menons, par les sommets m des ordonnées, des parallèles mq à l'axe des x. L'aire du segment $mpp'm'$ sera comprise entre celles des parallélogrammes construits sur la même base pp', et sur les ordonnées mp, $m'p'$ respectivement, aires qui sont entr'elles dans le même rapport que ces ordonnées. Si donc on peut faire voir que le rapport $m'p' : mp$ diffère de l'unité, quel que soit le segment considéré, d'une quantité moindre qu'une fraction arbitrairement petite ε, lorsque n croît indéfiniment, il en sera de même, *a fortiori*, du rapport des aires $mpp'm'$, $mpp'q$, et l'aire cherchée ABMP sera, en vertu du théorème II, la limite de la somme des aires des parallélogrammes construits sur les ordonnées et sur les accroissements correspondants de l'abscisse.

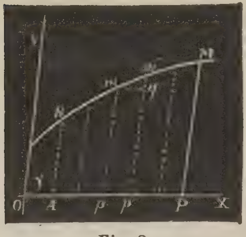


Fig. 3.

Soit à chercher l'aire S de la courbe $y = e^x$ entre les ordonnées qui répondent à $x = a$, $x = b$, et faisons $b - a = n\alpha$. Les ordonnées qui répondent aux abscisses $a, a + \alpha, \ldots, a + (n - 1)\alpha$ ont pour valeurs $e^a, e^{a+\alpha}, \ldots e^{a+(n-1)\alpha}$, le rapport de deux ordonnées consécutives e^α diffère de l'unité aussi peu qu'on le veut; la somme des aires des rectangles intérieurs sera

$$\alpha\left[e^a + e^{a+\alpha} + \cdots + e^{a+(n-1)\alpha}\right] = \frac{e^{a+n\alpha} - e^a}{e^\alpha - 1}\alpha = (e^b - e^a)\frac{\alpha}{e^\alpha - 1},$$

d'où

$$S = (e^b - e^a)\lim_{\alpha=0}\frac{\alpha}{e^\alpha - 1}.$$

Mais, si l'on pose

$$e^\alpha - 1 = \beta, \text{ d'où } \alpha = \mathrm{l.}\,(1 + \beta),$$

β sera infiniment petit en même temps que α, et l'on aura (**23**)

$$\lim_{\alpha=0}\frac{\alpha}{e^\alpha - 1} = \lim_{\beta=0}\frac{\mathrm{l.}\,(1+\beta)}{\beta} = 1,$$

donc $S = e^b - e^a$ sera l'expression de l'aire cherchée. La même méthode s'applique à d'autres courbes planes.

53. *Remarques.* — 1° Dans cette question, nous avons, sans altérer l'exactitude des résultats, remplacé les éléments de l'aire par d'autres plus simples, mais ceux-ci auraient pu être choisis différemment. Ainsi, nous aurions pu prendre, soit les parallélogrammes extérieurs, soit les

trapèzes inscrits $pmm'p'$, etc. Il suffit toujours que la condition énoncée au N° **48** pour l'application du théorème II soit vérifiée.

2° Dans la mesure de l'aire de la courbe $y = e^x$, nous avons été conduits à faire la somme des ordonnées des différents points de la courbe multipliées par l'accroissement infiniment petit de l'abscisse quand on passe d'un point au suivant, et à prendre la limite de cette somme. La même question se présenterait pour toute autre courbe. Donc, d'après l'observation faite au N° **51**, nous sommes amenés à ce problème d'analyse :

Étant données deux variables x et y dont la seconde est déterminée par la première, trouver la limite de la somme des valeurs successives de y multipliées respectivement par les accroissements infiniment petits correspondants de x, celle-ci étant supposée passer d'une valeur a à une valeur b.

Ce problème appartient au *calcul intégral*, et offre avec celui du calcul différentiel, énoncé plus haut, une relation intime.

54. *Longueur d'un arc de courbe.* — La longueur de l'arc d'une courbe donnée, plane ou non, entre deux de ses points, fournit un autre exemple de la limite d'une somme d'infiniment petits.

Les coordonnées x, y, z d'un point quelconque de la courbe étant censées exprimées au moyen d'une variable t, si A, B sont deux points correspondant aux valeurs $t = \alpha$, $t = \beta$ de la variable, nous dirons qu'un point M appartient à l'arc AB s'il répond à une valeur de t comprise entre α et β. Nous admettons, on verra plus loin sous quelles conditions cela a lieu, que l'on puisse inscrire dans l'arc AB un polygone à sommets assez rapprochés pour que la distance de deux points quelconques de la courbe, compris entre deux sommets consécutifs, soit moindre qu'une quantité arbitrairement petite a. Nous désignerons par P_a un polygone satisfaisant à cette condition, par Π_a son périmètre.

Soient M_aN_a (fig. 4) un côté du polygone P_a, R un point déterminé et fixe, pris sur l'arc sous-tendu par ce côté ; δ une quantité moindre que la plus petite des longueurs

$$M_aR, \quad RN_a, \quad M_aR + RN_a - M_aN_a,$$

considérées sur chacun des arcs sous-tendus par les côtés du polygone P_a. Soit c une quantité satisfaisant à l'inégalité

$$c < \frac{\delta}{4},$$

et considérons la portion $K_cH_c \cdots M_cN_c \cdots U_cV_c$ du polygone P_c comprise entre les points M_a et N_a : nous allons montrer que son périmètre est plus grand que M_aN_a.

Pour cela, prenons trois points E, F, G sur l'arc M_aR dont la corde surpasse δ ; menons les cordes ; nous aurons

$$M_aE + EF + FG + GR > M_aR > \delta > 4c,$$

donc, au moins un des côtés de ce périmètre M_aEFGR surpassera c ; ainsi, il est impossible que le polygone P_c n'ait pas plus de trois sommets entre M_a et R, il en aura donc au moins *quatre*, et de même sur l'arc RN_a, et sur tous les autres arcs analogues du polygone P_a.

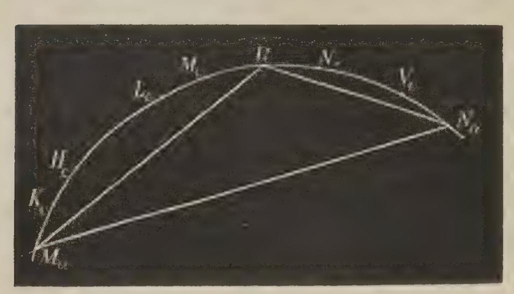


Fig. 4.

Observons maintenant que, la distance de deux points sur un arc sous-tendu par un côté du polygone P_c étant $< c$, et $\delta > 4c$, on a

$$M_aK_c + M_cR + RN_c + V_cN_a < \delta ;$$

d'autre part, on a évidemment

$$M_aR + RN_a < M_aK_c + \cdots + M_cR + RN_c + \cdots + U_cV_c + V_cN_a,$$

et enfin, par hypothèse,

$$\delta < M_aR + RN_a - M_aN_a.$$

Ajoutant membre à membre ces inégalités et réduisant, on a

$$0 < K_cH_c + \cdots + L_cM_c + N_cP_c + \cdots + U_cV_c - M_aN_a,$$

d'où, *a fortiori*, en ajoutant le côté M_cN_c,

$$\textit{Périm.}\ K_cH_c \cdots M_cN_c \cdots U_cV_c > M_aN_a,$$

ce qui démontre la propriété énoncée.

La même démonstration s'applique à chacun des arcs sous-tendus par les côtés du polygone P_a, et l'on en conclut évidemment que l'on a, dans l'hypothèse $4c < \delta$, $\Pi_c > \Pi_a$.

55. Il suit de là que si l'on attribue à a une suite indéfinie de valeurs $a, a', a'', \ldots$ ayant pour limite zéro, et suivant une loi quelconque, on

formera une suite indéfinie de polygones P_a, $P_{a'}$, $P_{a''}$..... dont les périmètres Π_a, $\Pi_{a'}$, ..., seront tels, que l'un quelconque d'entr'eux Π_a, sera moindre que tous les termes qui suivent un certain terme Π_c de la série. D'après une lemme établi (**19**), ces périmètres forment une suite tendant vers une limite déterminée ou croissant indéfiniment.

56. Cette limite, finie ou infinie, des périmètres Π_a, ne dépend pas de la loi suivant laquelle a tend vers zéro. Imaginons, en effet, que deux systèmes différents conduisent à des limites différentes L et L′. On formera un troisième système en combinant les deux premiers, c'est-à-dire en considérant une série de polygones inscrits dans laquelle la valeur de a serait empruntée alternativement au premier et au deuxième système. Le raisonnement fait plus haut montrera qu'à ce troisième système correspondra encore une limite L″, finie ou infinie, pour les périmètres inscrits. Or, il est impossible qui cette limite L″ diffère de L, puisque les polygones qui conduisent à la limite L font tous partie de la troisième suite; ni de L′, pour le même motif. On a donc $L = L' = L''$.

Nous conclurons donc que si, dans un arc de courbe AB, on inscrit une série de polygones dont les côtés décroissent indéfiniment, les périmètres de ces polygones inscrits tendront vers une limite finie L, toujours la même, ou croîtront indéfiniment.

Dans le premier cas, L est ce qu'on nomme la *longueur de l'arc* AB; dans le second, cet arc a une longueur infinie.

57. La méthode des infiniment petits s'applique de bien des manières à la solution des problèmes de géométrie, et nous en donnerons comme exemple la recherche de la tangente dans un cas où la méthode du n° **50** ne s'appliquerait pas.

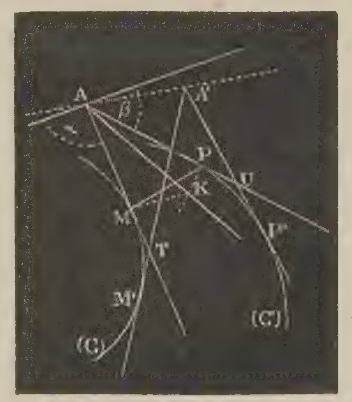


Fig. 5.

Un angle constant A *se déplace, ses côtés restant toujours tangents respectivement à deux courbes données* (C) *et* (C′) (fig. 5). *Son sommet décrit une courbe* Σ *à laquelle on demande de mener la tangente.*

Soient A, A′ deux positions infiniment voisines du sommet de l'angle; M, M′ les points de contact correspondants sur (C); P, P′ sur (C′); T, U les rencontres des tangentes infiniment voisines. Les triangles ATA′,

AUA′ ont, comme on le voit facilement, des angles égaux en T et en U, ce qui donne les égalités

$$\frac{\sin AA'T}{AT} = \frac{\sin T}{AA'} = \frac{\sin U}{AA'} = \frac{\sin A'AU}{A'U}.$$

Désignons par α et β les angles que font les tangentes AT, AU avec la direction AA′ considérée à la limite, c'est-à-dire avec la tangente cherchée à la courbe Σ en A.

On reconnaît sans peine que

$$\lim AA'T = \alpha, \quad \lim A'AU = \beta,$$
$$\lim AT = AM, \quad \lim A'U = AP,$$

et l'on a, par suite (**20**, IV)

$$\frac{\sin \alpha}{AM} = \frac{\sin \beta}{AP}.$$

Mais le triangle MAP fournit la relation

$$\frac{\sin APM}{AM} = \frac{\sin AMP}{AP},$$

et comme la somme des angles α et β est la même que celle des angles APM et AMP, savoir, le supplément de l'angle A, on en conclut que l'on a

$$\alpha = APM, \quad \beta = AMP,$$

car on sait que deux angles dont la somme donnée est moindre que 180° et dont les sinus sont dans un rapport donné, sont déterminés.

Il est donc facile de construire la tangente à la courbe Σ d'après ces relations. De plus, on voit par là que *la tangente cherchée est en même temps la tangente au cercle circonscrit au triangle* MAP. La *normale* en A à la courbe Σ passe donc par le centre de ce cercle, ou par le point de rencontre des perpendiculaires aux milieux de AE et de AP; *elle passe donc aussi par le point de rencontre* K *des perpendiculaires en* M *et en* P *aux tangentes* AM, AP *respectivement*, ce qui conduit à une construction fort simple.

58. *Des divers ordres d'infiniment petits.* — Ces applications de la méthode infinitésimale aux questions de géométrie sont facilitées par la considération des infiniment petits d'ordres différents, basée sur les limites de leurs rapports mutuels.

Deux infiniment petits sont de même ordre lorsque leur rapport tend vers une limite finie différente de zéro.

Généralement, dans une question, on choisit un infiniment petit principal α auquel on rapporte les autres, et si r désigne un nombre entier ou fractionnaire, *tout infiniment petit ρ dont le rapport à α^r tend vers une limite finie k différente de zéro est dit un infiniment petit de l'ordre r*. On a donc

$$\lim \frac{\rho}{\alpha^r} = k, \quad \text{d'où} \quad \rho = \alpha^r(k + \omega),$$

ω désignant une quantité qui tend vers zéro en même temps que α. Telle est la formule générale d'un infiniment petit de l'ordre r.

Si $r = 1$, ρ est de même ordre que α.

59. Les propriétés suivantes sont souvent utiles. Soient $\rho, \rho', \rho'', \ldots$ des infiniment petits d'ordres $r, r', r'', \ldots$ par rapport à α; supposons $r < r' < r'' < \cdots$

1° *La somme $\rho + \rho' + \rho'' + \cdots$ sera un nouvel infiniment petit de l'ordre r*, car on a

$$\rho + \rho' + \rho'' + \cdots = \alpha^r(k + \omega) + \alpha^{r'}(k' + \omega') + \alpha^{r''}(k'' + \omega''),$$

et la limite du rapport de cette expression à α^r est k, $\alpha^{r'-r}, \alpha^{r''-r}, \ldots$, ayant pour limite zéro.

2° *Le produit $\rho\rho'$ est un infiniment petit de l'ordre $r + r'$*, car

$$\frac{\rho\rho'}{\alpha^{r+r'}} = \frac{\rho}{\alpha^r} \cdot \frac{\rho'}{\alpha^{r'}}$$

a pour limite (**21**) kk', quantité finie différente de zéro. On en déduit facilement que $\rho\rho'\rho''$ est de l'ordre $r + r' + r''$, et ainsi de suite.

3° *Le rapport $\rho' : \rho$ est de l'ordre $r' - r$*, car on a

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{\alpha^{r'}(k' + \omega')}{\alpha^r(k + \omega)} = \alpha^{r'-r}\frac{k' + \omega'}{k + \omega},$$

et ce dernier facteur a une limite finie $k' : k$. On voit par là que, *de deux infiniment petits ρ et ρ', celui qui est de l'ordre le plus élevé est infiniment petit par rapport à l'autre*, et que, par suite, *il finit par avoir constamment une valeur absolue plus petite que celle de cet autre*.

4° *Si l'on prend un nouvel infiniment petit principal β, de même ordre*

que le premier α, on ne change pas l'ordre infinitésimal des autres infiniment petits, car on a

$$\frac{\rho}{\beta^r} = \frac{\rho}{\alpha^r}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^r,$$

et ρ étant de l'ordre r par rapport à α, les deux facteurs du second membre ont des limites finies différentes de zéro; ρ est donc de l'ordre r par rapport à β.

60. Les figures géométriques présentent de fréquents exemples d'infiniment petits de différents ordres. Si l'on projette une droite de longueur α sur une droite qui fait avec elle un angle infiniment petit C, la projection α' est donnée par l'équation

$$\alpha' = \alpha \cos C, \quad \alpha - \alpha' = \alpha(1 - \cos C) = 2\alpha \sin^2 \tfrac{1}{2} C.$$

La différence entre la droite et sa projection est du second ordre par rapport à l'angle compris.

Dans un triangle rectangle dont l'hypothénuse α et un angle adjacent C sont du premier ordre, les autres côtés ont respectivement pour expressions

$$\alpha \cos C, \quad \alpha \sin C,$$

et sont, l'un du premier, l'autre du second ordre, car sin C est de même ordre que C (**47**).

De même, *si l'on projette un angle* X *sur un plan faisant avec le plan de l'angle un angle infiniment petit* δ, *la différence* $X - X'$ *entre l'angle et sa projection sera du second ordre au moins par rapport à* δ.

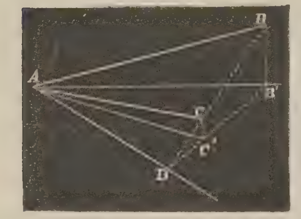


Fig. 6.

Soient (fig. 6) $BAC = X$, $B'AC' = X'$, AD l'intersection des deux plans, BDB' un plan perpendiculaire à AD; l'angle $BDB' = \delta$. On a, par les triangles rectangles ADB, ADB',

$$\operatorname{tg} DAB' = \operatorname{tg} DAB \cos \delta,$$

$$\operatorname{tg} DAB - \operatorname{tg} DAB' = \operatorname{tg} DAB(1 - \cos \delta) = 2 \operatorname{tg} DAB \sin^2 \frac{\delta}{2},$$

d'où l'on tire sans peine

$$\sin(DAB - DAB') = 2 \sin DAB \cos DAB' \sin^2 \frac{\delta}{2}.$$

Mais l'angle $DAB - DAB'$ et son sinus sont des infiniment petits de même ordre; donc le premier est aussi du second ordre. Le même

raisonnement montre que DAC — DAC′ est du second ordre par rapport à δ, et par suite

$$X - X' = (DAB - DAB') - (DAC - DAC')$$

sera tout au moins du second ordre, d'après le N° **59**, 1° (1).

---

(1) L'application de la méthode infinitésimale à la géométrie, indépendamment de l'algorithme différentiel, n'a pas été exposée méthodiquement, mais on en trouvera d'excellents exemples dans les ouvrages suivants : DUHAMEL, *Éléments de Calcul infinitésimal*, 3e édit. — J. BERTRAND, *Traité de Calcul différentiel*, Ch. I. — PAUL SERRET, *Théorie géométrique des lignes à double courbure*. — A. MANNHEIM, *Cours de géométrie descriptive*. — RUCHONNET, *Exp. géométrique des propriétés générales des courbes*, 1880, etc....

LIVRE PREMIER.

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

CHAPITRE PREMIER.

PRINCIPES DE LA THÉORIE DES FONCTIONS D'UNE SEULE VARIABLE.

61. On dit qu'une variable x varie *dans un intervalle* (a, b) lorsqu'elle peut recevoir toutes les valeurs réelles depuis $x = a$ jusqu'à $x = b$, inclusivement (1).

On dit qu'une variable y est *fonction* de x dans l'intervalle (a, b) lorsque, à toute valeur déterminée de x appartenant à l'intervalle, correspondent une ou plusieurs valeurs *déterminées* de y, de quelque manière que cette dépendance s'établisse. On représente une fonction de x par la notation $f(x)$, ou $F(x)$, ou $\varphi(x)$, ou d'autres du même genre.

Les expressions tirées de l'algèbre et de la trigonométrie, lorsqu'elles renferment une variable x, sont des fonctions de celle-ci; telles sont

$$a + bx^m, \quad \log x^2, \quad \sin 2x, \quad \text{etc...}$$

On en a choisi un certain nombre que l'on nomme *fonctions élémentaires*, savoir :

$$a + x, \quad x^a, \quad A^x, \quad \sin x, \quad \cos x, \quad \operatorname{tg} x, \quad \text{etc...}$$

---

(1) Nous supposerons habituellement, sauf indication contraire, $a < b$.

et leurs inverses

$$a - x, \quad x^{\frac{1}{a}}, \quad \log x, \quad \text{arc}\sin x, \quad \text{arc}\cos x, \quad \text{etc...}$$

Dans ces expressions, a est une constante positive ou négative, A une constante positive; *log.* désigne le logarithme pris dans un système à base quelconque A; les fonctions trigonométriques se rapportent toujours à un cercle dont le rayon est pris pour unité de longueur.

Une fonction $f(x)$ est *explicite* lorsque son expression au moyen de la variable x est donnée en symboles connus; elle est *implicite* dans le cas contraire. Dans l'équation

$$\log x + \log y = 1,$$

y est fonction implicite de x. Une fonction explicite est *algébrique* lorsque, dans son expression, la variable n'est soumise qu'aux opérations fondamentales, l'addition, la soustraction, la multiplication, la division et l'élévation à des puissances *constantes*, en nombre limité. Elle est *transcendante* dans le cas contraire. Une fonction algébrique est *rationnelle* ou *irrationnelle*, *entière* ou *fractionnaire*, dans les cas définis en algèbre. Ainsi

$$a + bx + cx^2 + \cdots + kx^n$$

est une fonction *rationnelle* et *entière* de degré n.

On représente géométriquement une fonction de x en portant sur l'axe des abscisses, à partir de l'origine, des longueurs OP représentant les valeurs de la variable x, et élevant, à l'extrémité de chacune de ces longueurs, une ordonnée PM mesurée par la valeur correspondante de la fonction. Le lieu des points M obtenus de cette manière donnera la figuration géométrique de la fonction.

62. Lorsque la fonction $f(x)$ n'admet qu'une seule valeur pour chaque valeur de x dans un intervalle (a, b), nous disons qu'elle en est une fonction *simple*. C'est de ces fonctions seulement qu'il s'agira dans les propriétés générales que nous allons établir dans ce chapitre et dans les suivants.

Théorème I. — *Toute fonction simple $f(x)$ qui, dans un intervalle (a, b) de la variable, reste toujours comprise entre deux valeurs fixes* A *et* B, $A < B$, *admet dans cet intervalle une limite minimum l telle que 1° aucune valeur de la fonction ne peut être moindre que l; 2° la fonction admet la valeur l ou des valeurs qui en diffèrent d'une quantité moindre que toute grandeur donnée ε.*

Partageons la différence B — A en n parties égales $\alpha = \frac{B - A}{n}$, et considérons la suite des valeurs

$$A, \quad A + \alpha, \quad A + 2\alpha, \quad \ldots, \quad A + (n - 1)\alpha, \quad A + n\alpha = B.$$

La fonction $f(x)$ restant comprise entre A et B, désignons par $A' = A + p\alpha$ le plus grand des termes de cette suite qui est tel qu'aucune valeur de $f(x)$ ne puisse devenir moindre que A'. S'il existe des valeurs de x pour lesquelles $f(x) = A'$, A' est la limite cherchée l; sinon, on aura toujours $f(x) > A'$, et il y aura des valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ sera $< A' + \alpha$. Raisonnons sur l'intervalle $(A', A' + \alpha)$ comme sur l'intervalle (A, B) : soit

$$\alpha' = \frac{\alpha}{n} = \frac{B - A}{n^2};$$

il existera un plus grand terme $A' + p'\alpha' = A''$ (p' entier) tel qu'aucune valeur de $f(x)$ ne sera inférieure à A'', et si $f(x)$ admet des valeurs égales à A'', A'' sera la limite minimum l; sinon, il existera des valeurs de $f(x)$ comprises entre A'' et $A'' + \alpha'$. Partageant de nouveau cet intervalle en n parties égales à $\frac{B - A}{n^3}$, et continuant de même, on formera une suite de quantités croissantes (ou non décroissantes).

$$A, A', A'', \ldots A^{(m)}, \ldots$$

telle que $f(x)$ n'aura, dans l'intervalle (a, b), aucune valeur inférieure à ces quantités. Si $f(x)$ peut acquérir la valeur $A^{(m)}$, la suite s'arrête et $A^{(m)}$ est la limite cherchée; sinon, la suite est indéfinie et tend (**19**) vers une limite fixe l. Je dis que l est la limite minimum cherchée, car 1° la fonction $f(x)$ ne peut jamais acquérir une valeur inférieure à l, sans quoi, la différence $l - A^{(m)}$ finissant par devenir moindre que toute grandeur donnée lorsque m croît à l'infini, $f(x)$ pourrait acquérir des valeurs plus petites que $A^{(m)}$; 2° la fonction $f(x)$ acquerra des valeurs aussi voisines qu'on le voudra de l, puisqu'il existe toujours des valeurs de $f(x)$ plus grandes que $A^{(m)}$ et plus petites que $A^{(m)} + \alpha^{(m-1)}$, quantités que comprennent l et qui diffèrent l'une de l'autre d'une quantité moindre que toute grandeur donnée ε.

On verrait semblablement que, dans les mêmes conditions, *la fonction* $f(x)$ *admet une limite maximum* L *telle que* 1° *aucune valeur de la fonc-*

tion ne peut surpasser L; 2° *la fonction admet la valeur* L *ou des valeurs qui en diffèrent d'une quantité moindre que toute grandeur donnée* ε.

La différence $L - l$ se nomme *l'oscillation* de la fonction dans l'intervalle (a, b).

Remarque. — Soit (a', b') un intervalle faisant partie de l'intervalle (a, b), c'est-à-dire tel que l'on ait $a' \geqslant a$, $b' \leqslant b$; la limite maximum de $f(x)$ dans l'intervalle (a', b') sera $\leqslant L$, sa limite minimum sera $\geqslant l$, en sorte que l'oscillation de la fonction dans l'intervalle (a', b') sera $\leqslant (L - l)$. Si l'on décompose l'intervalle (a, b) en plusieurs autres, (a, a_1), (a_1, a_2), ... (a_{n-1}, b), la même remarque s'appliquera à chacun de ces intervalles, mais, de plus, il est clair qu'il y aura *au moins un* de ces intervalles partiels dans lequel la limite maximum de $f(x)$ sera égale à L, et au moins un dans lequel sa limite minimum sera égale à l.

63. *Continuité des fonctions.* — Une fonction simple $f(x)$ est dite *continue* pour une valeur α de la variable, lorsque la différence $f(\alpha + h) - f(\alpha)$ est infiniment petite en même temps que h, quel que soit le signe de h; ou, en d'autres termes, lorsque $f(\alpha + h)$ a pour limite $f(\alpha)$ lorsque h tend vers la limite zéro (**17**).

Cette définition suppose essentiellement que $f(\alpha)$ ait une valeur finie et déterminée.

Pour abréger, on désigne souvent par $f(\alpha - 0)$ la limite vers laquelle converge $f(\alpha + h)$ lorsque h tend vers zéro en restant négatif, et par $f(\alpha + 0)$ sa limite, h restant positif. On peut, d'après cela, dire encore que la fonction est continue pour la valeur α de la variable lorsque l'on a

$$f(\alpha - 0) = f(\alpha) = f(\alpha + 0).$$

On voit sans peine que si $f(x)$ est différent de zéro pour une valeur α de la variable pour laquelle cette fonction est continue, le signe de $f(x)$ sera le même que celui de $f(\alpha)$, pour toute valeur de x suffisamment voisine de α.

Une fonction, qui cesse d'être continue pour une valeur α de la variable, est dite *discontinue* pour cette valeur. D'après les définitions ci-dessus, cela peut arriver

1° Ou bien parce que la fonction devient *infinie* pour $x = \alpha$, ce qui signifie que la valeur de $f(x)$ finit par surpasser constamment toute quantité donnée lorsque x tend vers la limite α, et que, pour $x = \alpha$, la

fonction 1 : $f(x)$ acquiert la valeur zéro. Ainsi la fonction $\operatorname{tg} x$ est infinie pour $x = \frac{\pi}{2}$, la fonction $\frac{1}{x - \alpha}$ pour $x = \alpha$, etc...

2° Ou bien, parce que la fonction devient indéterminée pour $x = \alpha$. Tel est le cas de la fonction $\sin \frac{1}{x}$ pour $x = 0$. La fonction est généralement finie et déterminée, mais si l'on fait tendre x vers la limite zéro, la valeur de la fonction oscille entre -1 et $+1$ sans converger vers aucune valeur fixe ; $f(0)$ n'existe pas, non plus que $f(+0)$, $f(-0)$.

3° Ou bien, parce que la fonction éprouve une variation brusque de valeur pour $x = \alpha$. Considérons la fonction

$$f(x) = \frac{e^{\operatorname{tg} x} - 1}{e^{\operatorname{tg} x} + 1}.$$

Sa définition ne fournit aucune valeur déterminée pour $x = \pi : 2$. Mais si l'on fait tendre x vers cette valeur, d'abord en croissant, $\operatorname{tg} x > 0$, $e^{\operatorname{tg} x}$ croît indéfiniment, $\lim f(x) = 1$. Si x tend vers la limite $\pi : 2$ en décroissant, $\operatorname{tg} x < 0$, $e^{\operatorname{tg} x}$ a pour limite zéro, $\lim f(x) = -1$. Ici, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ n'existe pas, $f\left(\frac{\pi}{2} + 0\right)$ et $f\left(\frac{\pi}{2} - 0\right)$ existent, mais ont des valeurs différentes; la fonction est discontinue.

Considérons encore la fonction définie par l'équation

$$f(x) = \lim_{t=\infty} \frac{(1 + \sin \pi x)^t - 1}{(1 + \sin \pi x)^t + 1}.$$

Pour toutes les valeurs $x = 0, 1, 2, \ldots$, on a $\sin \pi x = 0$, $(1 + \sin \pi x)^t = 1$, et $f(x) = 0$.

Pour une valeur quelconque de $x > 0$ et < 1, $\sin \pi x$ est > 0, $1 + \sin \pi x$ surpasse l'unité, et $\lim (1 + \sin \pi x)^t$ est infini; donc $f(x) = 1$. Si l'on a $1 < x < 2$, $\sin \pi x$ est négatif, $\lim (1 + \sin \pi x)^t = 0$, $f(x) = -1$; et ainsi de suite. La figuration géométrique de la fonction se compose d'une série de droites égales, parallèles à l'axe des x, alternativement placées au-dessus et au-dessous de cet axe, et de points isolés situés sur l'axe des x. Pour chaque valeur entière de x, on a

$$f(x) = 0, \quad f(x + 0) = \pm 1, \quad f(x - 0) = \mp 1,$$

la fonction est discontinue pour toutes les valeurs entières de la variable.

64. *Remarques.* — 1° Une fonction peut être continue par une valeur α

de la variable, quoiqu'elle n'admette que des valeurs *rationnelles* pour toute valeur de x comprise dans un intervalle auquel appartient α, car $f(\alpha + h)$ peut s'approcher indéfiniment de $f(\alpha)$ par des valeurs rationnelles seulement. On peut même concevoir et représenter analytiquement des fonctions qui sont continues pour toute valeur irrationnelle de x, et discontinues pour toute valeur rationnelle.

3° Lorsqu'une fonction $f(x)$ est généralement continue, mais que, pour une certaine valeur particulière α de la variable, l'expression qui la représente ne donne plus aucun résultat déterminé, comme on en a vu plus haut des exemples, la fonction n'existe plus, à proprement parler. Toutefois, si $f(\alpha + 0)$ et $f(\alpha - 0)$ existent et sont égaux, on est convenu, pour conserver le caractère de la continuité, d'attribuer à $f(x)$, pour $x = \alpha$, cette valeur limite. C'est ainsi que l'on dit que $\frac{x^2 - \alpha^2}{x - \alpha}$ est égal à 2α pour $x = \alpha$, que $A^x = 1$ pour $x = 0$, etc..., et la détermination de ces valeurs-limites est un des objets du calcul différentiel.

65. La fonction simple $f(x)$ est dite *continue dans un intervalle* (a, b), $a < b$, lorsqu'elle est continue pour toute valeur de x comprise entre a et b, et que l'on a, de plus,

$$f(a + 0) = f(a), \quad f(b - 0) = f(b).$$

Nous dirions que la fonction $f(x)$ est continue dans l'intervalle $(a + 0, b - 0)$ si ces deux dernières conditions manquaient, dans l'intervalle $(a + 0, b)$ si la première seule manquait, etc...

Enfin, la fonction est dite *continue dans le voisinage d'une valeur α de x*, lorsqu'elle est continue dans un intervalle $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$, ε étant une quantité positive, quelque petite qu'elle soit.

66. *Propriétés générales des fonctions continues.* — Outre la propriété du N° **62** qui appartient même aux fonctions discontinues, les fonctions continues possèdent des propriétés spéciales très importantes que nous allons étudier.

Théorème II. — *La fonction $f(x)$ étant continue dans un intervalle (a, b), si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, il existe au moins une valeur ξ de x, comprise entre a et b, telle que l'on ait $f(\xi) = 0$.*

Pour fixer les idées, supposons $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Partageons l'inter-

valle (a, b) en n intervalles égaux à $(b - a) : n$, par des valeurs $x_1, x_2, \ldots,$ x_{n-1}, et considérons la suite des quantités

$$f(a), \quad f(x_1), \quad f(x_2), \quad \ldots, \quad f(x_{n-1}), \quad f(b).$$

Si aucune n'est nulle, il existera nécessairement dans la suite $a, x_1,$ $x_2, \ldots, x_{n-1}, b$ deux termes consécutifs, a_1 et b_1, donnant des signes contraires pour $f(x)$, donc tels que l'on ait $f(a_1) < 0$, $f(b_1) > 0$.

Partageons de même l'intervalle (a_1, b_1) en n parties égales à $(b_1 - a_1) : n$ ou à $(b - a) : n^2$, nous verrons de même qu'il y a au moins un de ces intervalles, soit (a_2, b_2), tel que l'on ait $f(a_2) < 0$, $f(b_2) > 0$; et ainsi de suite. On forme ainsi une suite de valeurs croissantes $a, a_1, a_2 \ldots a_p, \ldots$ et une suite de valeurs décroissantes $b, b_1, b_2 \ldots b_p$, telles que l'on aura toujours $f(a_p) < 0$, $f(b_p) > 0$, et ces deux suites convergent vers une limite commune, puisque la différence

$$b_p - a_p = \frac{b - a}{n^p}$$

a pour limite zéro lorsque p croît indéfiniment

Soit donc $\lim a_p = \lim b_p = \xi$. Si $f(\xi)$ était différent de zéro, $f(\xi)$ et $f(a_p)$ seraient de même signe, ou *négatifs*, d'après une remarque faite plus haut, la fonction étant continue pour $x = \xi$. Un raisonnement semblable montrerait que $f(\xi)$ et $f(b_p)$ finissent par être de même signe ou *positifs*, et comme ces deux résultats se contredisent, il faut que l'on ait $f(\xi) = 0$.

On raisonnerait de même si l'on avait $f(a) > 0$, $f(b) < 0$.

67. Théorème III. — *Si la fonction $f(x)$ est continue dans l'intervalle (a, b), et si* A *désigne une quantité comprise entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe une valeur ξ de x, comprise entre a et b, telle que l'on ait*

$$f(\xi) = A.$$

En effet, la fonction $f(x) - A$ est, comme $f(x)$, continue dans l'intervalle (a, b); elle admet, pour $x = a$ et $x = b$, des valeurs

$$f(a) - A, \quad f(b) - A$$

qui sont de signes contraires d'après l'hypothèse; donc, d'après le théorème II, elle s'évanouit pour une valeur ξ de x qui est $> a$ et $< b$, donc on a

$$f(\xi) - A = 0, \quad f(\xi) = A.$$

On exprime cette propriété en disant qu'*une fonction continue ne peut passer d'une valeur à une autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires*, mais la réciproque n'est pas exacte. Ainsi la fonction $\sin \frac{1}{x}$, à laquelle on attribuerait la valeur zéro pour $x = 0$, ne serait pas continue dans le voisinage de cette valeur, comme on l'a vu, et cependant elle passe par toutes les valeurs comprises entre -1 et $+1$ dans le plus petit intervalle comprenant la valeur $x = 0$.

68. THÉORÈME IV. — *Une fonction $f(x)$, continue dans un intervalle (a, b), atteint dans cet intervalle sa limite maximum* L *et sa limite minimum l.*

Partageons l'intervalle (a, b) en n parties égales à $(b - a) : n$. D'après une remarque faite plus haut (**62**), il y aura un de ces intervalles, au moins, dans lequel la limite maximum de la fonction sera L. Soient a_1, b_1 les valeurs de x qui comprennent cet intervalle. Divisant l'intervalle (a_1, b_1) en n parties égales à $(b - a) : n^2$, on verra de même que l'un de ces intervalles partiels admettra la limite maximum L pour la fonction $f(x)$. Soit (a_2, b_2) cet intervalle. En continuant à raisonner de la même manière, on formera une suite de valeurs croissantes $a, a_1, \ldots a_p \ldots$ et une suite de valeurs décroissantes $b, b_1, \ldots b_p$, telles 1° que dans l'intervalle (a_p, b_p) la fonction $f(x)$ admettra toujours la limite maximum L; 2° que la différence $b_p - a_p = (b - a) : n^p$ aura pour limite zéro lorsque le nombre p croîtra indéfiniment, de sorte que les suites $a, a_1, a_2, \ldots$; $b, b_1, b_2, \ldots$ convergeront vers une limite commune ξ,

$$\lim_{p=\infty} a_p = \lim b_p = \xi.$$

La limite ξ appartenant à l'intervalle (a, b), la fonction est continue pour $x = \xi$; on peut donc déterminer un nombre δ tel que, x variant dans l'intervalle $(\xi - \delta. \xi + \delta)$, la valeur absolue de $f(x) - f(\xi)$ restera constamment moindre qu'une quantité arbitrairement petite donnée ε. De plus, on peut attribuer à p une valeur suffisamment grande pour que a_p, b_p soient compris entre $\xi - \delta$, $\xi + \delta$, en sorte que, dans l'intervalle (a_p, b_p), on aura constamment

$$\text{VA}\,[f(x) - f(\xi)] < \varepsilon.$$

Mais la limite maximum de $f(x)$ étant L dans l'intervalle (a_p, b_p), il existe (**62**) dans cet intervalle une valeur x' de x telle que l'on ait

$$\mathrm{L} - f(x') < \varepsilon.$$

Nous aurons donc

$$L - f(\xi) = [L - f(x')] + [f(x') - f(\xi)] < 2\varepsilon.$$

La différence $L - f(\xi)$ peut donc être supposée moindre que toute grandeur donnée, et comme elle est déterminée, elle ne peut être que zéro. On a donc

$$f(\xi) = L.$$

On verrait de même que la fonction atteint effectivement sa limite minimum l pour une valeur de x appartenant à l'intervalle (a, b).

Remarques. — 1° Il pourrait se faire que l'on eût

$$a_1 = a_2 \cdots = a_p \cdots = a, \quad \text{ou} \quad b_1 = b_2 \cdots = b_p \cdots = b,$$

auquel cas on aurait $\xi = a$ ou $\xi = b$, la fonction atteindrait sa limite maximum ou minimum pour l'une des valeurs extrêmes de x. La démonstration se ferait de même, avec quelques modifications faciles à apercevoir. Tel est le cas, par exemple, où la fonction est constamment croissante avec x : on a alors

$$f(a) = l, \quad f(b) = L.$$

2° Le théorème IV ne subsiste pas pour une fonction discontinue. Considérons la fonction

$$f(x) = x - E(x),$$

$E(x)$ désignant le plus grand nombre entier compris dans x, et soient $a = 0$, $b = 3:2$. La fonction est égale à x dans l'intervalle $(0, 1 - 0)$ où $E(x) = 0$; à $x - 1$ dans l'intervalle $(1, 3:2)$; elle passe brusquement de 1 à 0 pour $x = 1$. La limite maximum de $f(x)$ est 1, elle n'est atteinte pour aucune valeur de x dans l'intervalle $(0, 3:2)$.

69. Théorème V. — *La fonction simple $f(x)$ étant continue dans l'intervalle (a, b), soit ε une quantité arbitrairement petite ; il est toujours possible de trouver un nombre δ tel que, si l'on partage l'intervalle (a, b) en intervalles égaux ou inférieurs à δ, l'oscillation Δ de la fonction dans chacun de ces intervalles sera moindre que ε.*

Divisons l'intervalle (a, b) en n parties égales à $(b - a) : n$; chacun de ceux-ci en n intervalles égaux à $(b - a) : n^2$, et ainsi de suite. On arrivera ainsi à des intervalles $(b - a) : n^p$ qui satisferont à la condition imposée, et δ sera égal à $(b - a) : n^p$, ou bien on n'y arrivera jamais, quelque grand que soit p, et dans ce cas, comme l'oscillation de la fonction dans un de ces intervalles ne peut que rester constante ou

décroître lorsque p augmente (**62**), il existera nécessairement un intervalle (a_1, b_1) égal à $(b - a) : n$, dans lequel Δ surpassera ε; dans cet intervalle, un autre (a_2, b_2) égal à $(b - a) : n^2$ dans lequel on aura encore $\Delta > \varepsilon$; dans celui-ci un troisième (a_3, b_3) égal à $(b - a) : n^3$ jouissant de la même propriété, et ainsi de suite jusqu'aux intervalles de grandeur $(b - a) : n^p$. Mais comme, d'après l'hypothèse, p peut croître indéfiniment, la suite de quantités croissantes $a, a_1, a_2, \dots a_p \dots$ tend vers une limite ξ, et la suite décroissante $b, b_1, b_2, \dots b_p, \dots$ tend vers la même limite ξ, car $(b - a) : n^p$ décroit indéfiniment lorsque p tend vers l'infini.

La fonction $f(x)$ étant continue pour $x = \xi$, on pourra déterminer un intervalle $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ dans lequel l'oscillation de la fonction soit moindre que ε (**63**). D'autre part, a_p et b_p ayant pour limite ξ, on peut prendre p suffisamment grand pour que l'intervalle (a_p, b_p) soit compris dans l'intervalle $(\xi - \delta, \xi + \delta)$, en sorte que l'oscillation de la fonction serait moindre que ε dans l'intervalle (a_p, b_p) ce qui serait contraire à ce qui a été supposé plus haut. Cette seconde hypothèse est donc fausse, et il existe une valeur déterminée de p telle que, si l'on partage l'intervalle $b - a$ en n^p parties égales, l'oscillation Δ sera moindre que ε dans chacun de ces intervalles.

70. Théorème VI. — *La fonction $f(x)$ étant continue dans l'intervalle (a, b), il est possible d'assigner un nombre δ tel que la différence $f(x) - f(x')$ soit, en valeur absolue, moindre qu'une quantité arbitrairement petite donnée ε, x et x' étant deux valeurs quelconques de x appartenant à l'intervalle (a, b), et telles que l'on ait*

$$\text{VA}\,(x - x') < \delta.$$

En effet, commençons par partager l'intervalle (a, b) en intervalles plus petits δ, égaux entr'eux, et tels que dans chacun d'eux l'oscillation Δ de la fonction soit moindre que $\varepsilon : 2$, ce qui est possible d'après le théorème précédent. Cela fait, considérons deux valeurs x et x' de la variable telles que l'on ait

$$\text{VA}\,(x - x') < \delta.$$

Ou bien elles tomberont dans un même intervalle δ, et il est clair, dans ce cas, que l'on aura

$$\text{VA}\,[f(x) - f(x')] \leqq \Delta < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon;$$

ou bien, elles tomberont dans deux intervalles contigus δ_1 et δ_2, séparés par une valeur x_1 de x, et dans ce cas l'on aura

$$\text{VA}\,[f(x) - f(x_1)] < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{VA}\,[f(x_1) - f(x')] < \frac{\varepsilon}{2},$$

d'où

$$\text{VA}\,[f(x) - f(x')] < \varepsilon,$$

ce qu'il fallait prouver.

71. Théorème VII. — *Une fonction $f(x)$ qui est définie, dans un intervalle (a, b), pour toutes les valeurs de x satisfaisant à une certaine loi telle qu'il existe un nombre indéfini de ces valeurs dans le plus petit intervalle, et qui est supposée continue, est définie pour toutes les valeurs de la variable.*

Soit x' une valeur quelconque de x dans l'intervalle (a, b), et prenons une suite de valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_p \ldots$ qui satisfont à la loi pour laquelle la fonction est définie, et qui tendent vers la limite x'. Une telle suite est possible, d'après l'hypothèse, puisque tout intervalle arbitrairement petit $(x', x' \pm \varepsilon)$ renferme un nombre indéfini de ces valeurs de x. Les valeurs correspondantes $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_p) \ldots$ de la fonction, en vertu de la continuité, doivent tendre vers une limite égale à $f(x')$. Donc $f(x')$ est déterminé et égal à $\lim f(x_p)$.

72. Théorème VIII. — *Si $y = f(x)$ est une fonction simple continue de x dans un intervalle (a, b) et $u = \varphi(y)$ une fonction simple continue de y dans l'intervalle des valeurs correspondantes de y, u sera fonction simple et continue de x dans l'intervalle (a, b).*

Soit x une valeur de la variable appartenant à l'intervalle (a, b); pour un accroissement h donné à x, l'accroissement $k = f(x+h) - f(x)$ de y sera infiniment petit en même temps que h; d'autre part, $\varphi(y+k) - \varphi(y)$ représente l'accroissement de u, et comme il est infiniment petit en même temps que k, il sera aussi infiniment petit en même temps que h, ce qui entraîne la propriété énoncée.

73. Supposons que, dans le voisinage d'une valeur α de la variable x, $y = f(x)$ soit une fonction simple continue de x, et posons $\beta = f(\alpha)$. A chaque valeur de x répond une seule valeur de y; donc, à chacune de ces valeurs de y répond au moins une valeur de x; nous admettrons qu'il n'y en ait qu'une seule, d'où il résulte que y varie toujours dans le même sens dans le voisinage de la valeur α de x. On peut donc dire

que x est une fonction simple $\varphi(y)$ de y dans le voisinage de $y=\beta$. *Cette fonction est continue.* En effet, ε étant arbitrairement petit, aux valeurs de x comprises dans un intervalle $(\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$ correspondent, d'après le théorème III sur les fonctions continues, toutes les valeurs que peut admettre y dans un intervalle correspondant $(\beta-\eta, \beta+\eta')$, η et η' décroissant indéfiniment avec ε. Donc, puisque $\varphi(y)$ est une fonction simple de y, à toute valeur de y dans l'intervalle $(\beta-\eta, \beta+\eta')$ correspondra une seule valeur de x comprise dans l'intervalle $(\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$, intervalle qui décroît indéfiniment avec η ou η', ce qui démontre la proposition.

Supposons maintenant $u=f_1(x)$, f_1 étant une fonction simple et continue dans le voisinage de $x=\alpha$. Sous les conditions du théorème précédent, u pourra être considéré comme une fonction simple et continue de y dans le voisinage de $y=\beta$. En effet, x étant une fonction simple et continue de y, comme on vient de le voir, $f_1(x)$ une fonction simple continue de x, il résulte du N° **72** que u sera une fonction simple continue de y.

74. La définition de la continuité suffit pour vérifier si une fonction donnée explicitement est continue, et dans quels intervalles elle jouit de cette propriété. On s'assure ainsi que les fonctions élémentaires sont continues dans tout intervalle où elles restent réelles et finies. Par exemple, pour la fonction exponentielle, on a

$$A^{x+h}-A^x=A^x(A^h-1),$$

et le facteur A^h-1 ayant pour limite zéro si h est infiniment petit, tandis que A^x a une valeur déterminée et finie, on voit que l'accroissement de A^x est infiniment petit en même temps que h; cette fonction est continue dans tout intervalle de la variable x. De même pour x^m (m entier et positif), $\sin x$, etc... On reconnaît aussi, à l'aide des théorèmes sur les limites énoncés au N° **21**, que toute fonction rationnelle et entière de x est continue dans tout intervalle; qu'il en est de même d'une fraction rationnelle, dans tout intervalle qui ne renferme aucune valeur de x pour laquelle le dénominateur s'évanouisse, etc.... Nous supposons tous ces détails établis dans les éléments.

Exercices.

1. Si x et x' désignent des variables qui croissent indéfiniment d'une manière quelconque, et si le rapport $f(x') : f(x)$ a pour limite l'unité, $f(x)$ tend vers une limite finie et déterminée lorsque x croît indéfiniment.

R. On prouvera 1° que $f(x)$ ne peut croître au-dessus de toute grandeur quand x tend vers l'infini; 2° que $f(x') - f(x)$ a pour limite zéro.

2. Si $f(x)$, $\varphi(x)$ sont deux fonctions telles que, x et x' croissant indéfiniment, la différence $\varphi(x') - f(x)$ ait pour limite zéro, $f(x)$ et $\varphi(x)$ tendent vers une même limite finie.

R. On prouvera d'abord que $f(x') - f(x)$ a pour limite zéro, puis on appliquera le théorème **1**.

3. Si $f(x+1) - f(x)$ tend vers une limite déterminée L lorsque x tend vers l'infini, et si $f(x)$ ne peut croître indéfiniment pour aucune valeur finie de x, on aura aussi

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{x} = \mathrm{L}.$$

R. On prouvera d'abord que l'on a

$$\frac{f(x_1+n) - f(x_1)}{n} = \mathrm{L} + \varepsilon\eta,$$

ε étant aussi petit qu'on le veut, x_1 une valeur de x fixe et prise suffisamment grande, n un nombre entier aussi grand qu'on le veut, η une quantité comprise entre $+1$ et -1. Posant ensuite $x = x_1 + n$ et faisant croître n indéfiniment, x_1 restant constant, on verra que

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{x - x_1} = \mathrm{L},$$

d'où l'on tirera le théorème énoncé.

4. Si $f(x+1) - f(x)$ croît indéfiniment avec x dans les mêmes circonstances, il en sera de même du rapport $f(x) : x$.

Démonstration analogue.

5. Si l'on a, L étant fini et déterminé,

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = \mathrm{L}$$

et si $f(x)$ ne peut pas croître ou décroître indéfiniment dans aucun intervalle fini, on aura aussi

$$\lim_{x=\infty} f(x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{L}.$$

Le théorème subsiste si L est infini.

R. Se déduit de **3** en posant $\mathrm{l}.\, f(x) = \varphi(x)$.

6. Toute fonction qui reste finie pour toute valeur finie de x et qui satisfait, pour des valeurs quelconques de x et de y, à la relation

$$f(x+y)=f(x)+f(y),$$

est de la forme $f(x)=ax$, a constant.

R. On déduira successivement de la relation donnée $f(0)=0$, $f(-x)=-f(x)$, $f(nx)=nf(x)$, (n entier quelconque), d'où

$$\frac{f(x)}{x}=\lim_{n=\infty}\frac{f(nx)}{nx}.$$

Puis, posant $f(1)=a$, on aura

$$f(x+1)-f(x)=a$$

quel que soit x, d'où l'on conclura, par l'ex. **3** et par l'équation ci-dessus, que $f(x):x=a$.

7. La seule fonction $f(x)$ qui, restant finie par toute valeur finie de x, satisfait à l'égalité

$$f(x+y)=f(x)\,f(y),$$

est la fonction $f(x)=A^x$, A constant.

R. On posera l. $f(x)=\varphi(x)$ et on appliquera la propriété de l'ex. **6**.

CHAPITRE II.

DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES DES FONCTIONS.

75. Si l'on donne à la variable x un accroissement $\Delta x=h$, l'accroissement de la fonction $y=f(x)$ sera $\Delta y=f(x+h)-f(x)$. Le rapport de ces accroissements

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

pourra tendre vers une limite déterminée, finie, dépendant de x seulement, lorsque h tendra vers la limite zéro. Ainsi, soit $y=x^3$; on aura

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=3x^2+3xh+h^2,$$

dont la limite est $3x^2$ lorsque h tend vers zéro, quel que soit le signe de h.

Cette limite du rapport des accroissements correspondants de $f(x)$ *et de* x, lorsqu'elle existe, *se nomme la dérivée de* $f(x)$ et se désigne par $f'(x)$ ou par Dy, ou, lorsqu'il est utile, par $D_x y$.

76. Lorsqu'une fonction admet une dérivée pour une valeur x de la variable, elle est continue pour cette valeur, car le rapport $\Delta y : \Delta x$ ne tendrait pas vers une limite finie si $f(x+h) - f(x)$ ne tendait pas vers zéro en même temps que h. Mais la fonction peut être continue sans que la dérivée existe : 1° la limite de $\Delta y : \Delta x$ peut différer suivant que h tend vers zéro par des valeurs positives ou par des valeurs négatives. Par exemple, dans la fonction

$$y = x \frac{e^{\frac{1}{x}} + 1}{e^{\frac{1}{x}} - 1},$$

à laquelle nous devons attribuer la valeur zéro pour $x = 0$ (**46**, 3°), la limite du rapport $\Delta y : \Delta x$ pour cette valeur $x = 0$ est

$$\lim_{h=0} \frac{e^{\frac{1}{h}} + 1}{e^{\frac{1}{h}} - 1} = \begin{cases} +1 & \text{si} \quad h > 0, \\ -1 & \text{si} \quad h < 0. \end{cases}$$

2° Le rapport $\Delta y : \Delta x$ peut croître indéfiniment, h tendant vers zéro. Ainsi, la fonction

$$f(x) = 1 + x^{\frac{1}{3}},$$

pour $x = 0$, donne

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{h^{\frac{1}{3}}}{h} = h^{-\frac{2}{3}};$$

ce rapport a pour limite $+\infty$, quel que soit le signe de h. La fonction $1 + x^{\frac{2}{3}}$, pour $x = 0$, donne $+\infty$ ou $-\infty$ pour la limite du rapport $\Delta y : \Delta x$, suivant le signe de h. Par extension, on dit souvent dans ce cas que la dérivée est *infinie* pour une telle valeur de x.

3° Le rapport $\Delta y : \Delta x$ peut osciller entre certaines valeurs sans tendre vers une limite déterminée. Tel est le cas, pour la valeur $x = 0$, de la fonction

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x},$$

en admettant que $f(0) = 0$.

4° Enfin, on a même reconnu que ces singularités peuvent se présenter non seulement pour des valeurs particulières et isolées de la variable, mais pour des valeurs existant en nombre indéfini dans le plus petit

intervalle, ou même pour toutes les valeurs possibles de la variable, sans que la fonction $f(x)$ cesse d'être continue [1].

Remarque. — D'après ce qui a été établi au N° **50**, si $y = f(x)$ est l'équation d'une courbe plane, $f'(x)$ représentera le coefficient angulaire de la tangente au point dont l'abscisse est x. L'existence de la tangente en un point d'une courbe est donc liée à celle de la dérivée dans la fonction qui représente l'ordonnée.

77. *Règles de dérivation.* — 1° Soient $u, v, w, \ldots$ des fonctions de x, continues et ayant une dérivée pour une valeur x de la variable. Pour un accroissement Δx de x, on aura

$$\Delta(u + v - w + \cdots) = \Delta u + \Delta v - \Delta w + \cdots,$$

$$\frac{\Delta(u + v - w + \cdots)}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x} + \cdots,$$

et, en faisant tendre Δx vers zéro, en vertu des théorèmes connus (**21**),

$$(1) \quad \lim \frac{\Delta(u+v-w+\cdots)}{\Delta x} = \mathrm{D}(u+v-w+\cdots) = \mathrm{D}u + \mathrm{D}v - \mathrm{D}w + \cdots$$

La dérivée de la somme algébrique de plusieurs fonctions est la somme algébrique des dérivées de ces fonctions.

On en conclut, a étant constant,

$$\mathrm{D}(u + a) = \mathrm{D}u,$$

c'est-à-dire que *l'addition d'une constante à la fonction ne change pas la valeur de la dérivée.*

2° On a ensuite

$$\Delta(uv) = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = v\Delta u + u\Delta v + \Delta u \Delta v,$$

d'où

$$\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = v\frac{\Delta u}{\Delta x} + u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v.$$

Egalons les limites des deux membres et observons que, $\Delta u : \Delta x$ ayant une limite finie, son produit par Δv tend vers zéro ; il viendra

$$(2) \quad \mathrm{D}.uv = v\mathrm{D}u + u\mathrm{D}v.$$

Si v se réduit à une constante a, $\mathrm{D}v = 0$, on a donc

$$\mathrm{D}.au = a\mathrm{D}u.$$

---

(1) Voir la note I à la fin du volume.

La dérivée du produit d'une fonction par une constante est le produit de la constante par la dérivée de la fonction.

On aura, par la même règle,

$$D.uvw = vwDu + uD.vw = vwDu + u(wDv + vDw)$$

ou

$$D.\,uvw = vwDu + uwDv + uvDw,$$

et en général, quel que soit le nombre des facteurs,

$$(3)\qquad D.uvw\cdots = uvw\cdots\left(\frac{Du}{u}+\frac{Dv}{v}+\frac{Dw}{w}+\cdots\right).$$

Si l'on fait $u = v = w = \cdot\cdot$ et le nombre des facteurs égal à m, on en déduit

$$(4)\qquad D.u^m = mu^{m-1}\,Du.$$

Les règles 1° et 2° suffisent pour trouver la dérivée de toute fonction rationnelle et entière de x.

3° Pour trouver la dérivée d'un quotient, on a, v étant supposé différent de zéro pour la valeur de x considérée,

$$\Delta\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v+\Delta v)}.$$

Divisant par Δx, faisant tendre Δx vers zéro et par suite Δv, on aura

$$(5)\qquad D\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vDu - uDv}{v^2}.$$

Supposons successivement u et v constants, nous déduirons de cette formule

$$D\left(\frac{a}{v}\right) = -\frac{aDv}{v^2},\qquad D\left(\frac{u}{a}\right) = \frac{Du}{a}.$$

78. Soient, dans le voisinage de la valeur de x que l'on considère, $y = f(x)$, $u = \varphi(y)$ des fonctions simples continues; u est donc (**72**) une fonction simple continue de x, dont on cherche la dérivée $D_x u$, connaissant les dérivées $f'(x)$ et $\varphi'(y)$ des fonctions f et φ. Soient Δx l'accroissement infiniment petit de x, Δy et Δu les accroissements correspondants de y et de u. On a identiquement, Δy n'étant pas nul,

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

et en faisant tendre Δx vers zéro et égalant les limites des deux membres,

$$D_x u = \varphi'(y) \cdot f'(x).$$

La dérivée de u par rapport à x est le produit des dérivées de u par rapport à y et de y par rapport à x.

On peut supposer $\Delta y \lessgtr 0$, car si Δy était nul pour une suite de valeurs indéfiniment décroissantes de Δx, $f'(x)$ ne pourrait être que zéro pour cette valeur de x; d'autre part, le raisonnement précédent s'appliquant pour les valeurs de Δy différentes de zéro, la limite de $\Delta u : \Delta x$ serait toujours déterminée de la même manière et $D_x u$ serait nul aussi.

Le théorème se généralise : soit $z = \psi(u)$ une fonction dont la dérivée est $\psi'(u)$. On aura, z étant fonction de x,

$$D_x z = \psi'(u) \cdot \varphi'(y) \cdot f'(z),$$

et ainsi de suite. C'est la règle de la dérivation des *fonctions de fonctions.*

Ainsi, a étant une constante, on verra en posant successivement $y = a + x$, $y = ax$, que

$$D_x \varphi(a + x) = \varphi'(a + x), \quad D_x \varphi(ax) = a\varphi'(ax), \text{ etc.}$$

79. Soit encore $y = f(x)$ une fonction de x simple continue dans le voisinage d'une valeur donnée de cette variable, et $x = \varphi(y)$ la fonction inverse, simple et continue (**73**). Si Δx, Δy désignent les accroissements infiniment petits correspondants des variables, on a identiquement

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = 1 : \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad \text{d'où} \quad \lim \frac{\Delta x}{\Delta y} = 1 : \lim \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

ou, en supposant $f'(x) \gtrless 0$,

$$D_y x = \varphi'(y) = 1 : f'(x).$$

La dérivée de x par rapport à y est la réciproque de la dérivée de y par rapport à x.

C'est en cela que consiste la *règle des fonctions inverses.*

80. *Des différentielles.* — La dérivée $f'(x)$ d'une fonction y de x étant la limite du rapport de deux infiniment petits, on a jugée utile de la représenter par un vrai rapport, et l'on a nommé *différentielles* des variables y et x deux quantités dont le rapport est égal à la limite du rapport des accroissements infiniment petits correspondants de y et de x.

Ces différentielles s'indiquent par la caractéristique d devant la variable. Ainsi l'on a, par définition,

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

L'une de ces deux différentielles peut être prise arbitrairement ; on suppose toujours que ce soit celle de la variable x qu'on appelle la *variable indépendante*. Ainsi dx est arbitraire, dy est le produit $f'(x)\,dx$ de la dérivée de y par la différentielle de x.

Voici quelques propriétés des différentielles :

1° Si $f'(x)$ est différent de zéro, on a, ω tendant vers zéro en même temps que Δx,

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x), \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \omega,$$

d'où

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \omega \Delta x.$$

Le second terme est infiniment petit par rapport à Δx et conséquemment par rapport à Δy ; d'autre part, dx peut être pris égal à Δx ; on a donc

$$\Delta y = f'(x)\,dx = dy,$$

en négligeant un infiniment petit par rapport à Δy. Donc, *en prenant la différentielle de la variable indépendante égale à son accroissement infiniment petit, on pourra aussi prendre la différentielle de la fonction au lieu de son accroissement, dans les cas* (**47** *et* **48**) *où il est permis de négliger une partie infiniment petite par rapport à cet accroissement.*

2° On a vu que si $y = f(x)$, $u = \varphi(y)$ sont deux fonctions qui dépendent de x, on a

$$D_x u = \varphi'(y) \cdot f'(x), \quad \text{ou} \quad \frac{du}{dx} = \varphi'(y) \cdot f'(x),$$

du étant la différentielle de u définie ci-dessus. On en déduit

$$du = \varphi'(y) \cdot f'(x)\,dx = \varphi'(y)\,dy,$$

car $dy = f'(x)\,dx$; ainsi, *du s'exprime au moyen de dy par le même formule que si y était la variable indépendante*

On peut dire encore que le rapport des différentielles de u et de y, prises en les considérant comme deux fonctions de x, représente toujours la dérivée de u par rapport à y.

5° Si dans les formules (1), (2), (3), (4), (5) on multiplie les deux membres par dx, on obtient les équations suivantes, qui ne diffèrent des premières qu'en ce que les dérivées des fonctions sont remplacées par leurs différentielles :

$$d(u + v - w + \cdots) = du + dv - dw + \cdots,$$

$$d.uv = vdu + udv,$$

$$d.uvw\cdots = uvw\cdots\left(\frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w} + \cdots\right),$$

$$d.u^m = mu^{m-1}\,du,$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

81. *Différentiation des fonctions élémentaires.* — Il suit immédiatement des formules ci-dessus que l'on a

$$d(a \pm x) = \pm\, dx.$$

En second lieu, soit $y = x^a$, a étant une constante quelconque. On aura

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^a - x^a}{\Delta x} = x^{a-1}\frac{(1 + \alpha)^a - 1}{\alpha},$$

en posant $\Delta x : x = \alpha$; α étant infiniment petit avec Δx, nous ferons

$$(1 + \alpha)^a - 1 = \beta, \quad \text{d'où} \quad (1 + \alpha)^a = 1 + \beta,$$

$$\frac{\text{l.}\,(1 + \beta)}{\text{l.}\,(1 + \alpha)} = a.$$

Mais β tend vers zéro en même temps que α, et d'après l'équation (2) du N° **23** et le théorème du N° **47**, la limite du premier membre n'est pas altérée si l'on remplace l. $(1 + \beta)$ par β, l. $(1 + \alpha)$ par α. On a donc

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = a,$$

d'où

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = ax^{a-1},$$

et par suite

$$\text{D}.x^a = ax^{a-1}, \quad d.x^a = x^{a-1}\,dx.$$

Il importe d'observer que, d'après la remarque 2° du N° **80**, cette

équation subsiste, soit que x soit pris comme variable indépendante, soit que x désigne une fonction quelconque d'une autre variable.

Cas particuliers : $a = 2$, $d.\,x^2 = 2x dx$; $a = \frac{1}{2}$,

$$d\sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}.$$

82. Soit maintenant, l, désignant toujours le logarithme népérien,

$$y = \text{l}.\,x.$$

Nous aurons, α désignant encore $\Delta x : x$, et x étant supposé différent de zéro,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{l}.\,(x + \Delta x) - \text{l}.\,x}{\Delta x} = \frac{\text{l}.\,x(1 + \alpha) - \text{l}.\,x}{\alpha x} = \frac{\text{l}.\,(1 + \alpha)}{\alpha} \cdot \frac{1}{x}.$$

Lorsque α tend vers zéro, $\text{l}.\,(1 + \alpha) : \alpha$ a pour limite l'unité (**23**), on a donc

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{D}\,\text{l}.\,x = \frac{1}{x},$$

donc

$$d\,\text{l}.\,x = \frac{dx}{x}.$$

Si le logarthime se rapporte à un système à base A, on aura, comme on sait,

$$\log x = \frac{\text{l}.\,x}{\text{l}.\,\text{A}}, \quad d.\log x = \frac{dx}{x\text{l}.\,\text{A}}.$$

83. *Fonctions circulaires.* — I. Considérons d'abord la fonction

$$y = \sin x.$$

Nous avons

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}\Delta x \cos(x + \frac{1}{2}\Delta x)}{\Delta x}.$$

Mais Δx étant infiniment petit, le rapport $\sin \frac{1}{2}\Delta x : \frac{1}{2}\Delta x$ a pour limite l'unité (**47**), donc

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{D} \sin x = \cos x,$$

et par suite

$$d \sin x = \cos x \, dx,$$

II. On a

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right);$$

en appliquant la remarque 2° du N° **80**, on aura

$$d\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) d\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

d'où

$$d\cos x = -\sin x dx.$$

III. La règle pour différentier un quotient donne

$$d\,\mathrm{tg}\,x = d\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x d\sin x - \sin x d\cos x}{\cos^2 x} = \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x)\,dx}{\cos^2 x},$$

d'où

$$d\,\mathrm{tg}\,x = \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

IV. De même,

$$d\sec x = d\left(\frac{1}{\cos x}\right) = \frac{\sin x dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\,x \sec x dx.$$

Enfin, en observant que

$$\cot x = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \mathrm{cosec}\,x = \sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

et raisonnant comme pour $\cos x$, on déduira de ce qui précède

$$d\cot x = -\frac{dx}{\sin^2 x}, \quad d\,\mathrm{cosec}\,x = -\cot x\,\mathrm{cosec}\,x dx.$$

84. *Fonction exponentielle.* — Soit encore

$$y = \mathrm{A}^x, \quad \text{d'où} \quad x = \log y.$$

La dérivée de x par rapport à y est, d'après le N° **82**, $1 : y\,\mathrm{l.\,A}$, donc, d'après la règle des fonctions inverses, on a

$$\mathrm{D}_x y = y\,\mathrm{l.A},$$

d'où

$$d\mathrm{A}^x = \mathrm{A}^x\,\mathrm{l.A}\,dx,$$

et en particulier

$$de^x = e^x\,dx, \quad \mathrm{D}e^x = e^x.$$

La fonction e^x jouit donc de la propriété de se reproduire elle-même par la dérivation.

85. Appliquons encore la règle des fonctions inverses aux fonctions arc sin x, arc tg x, etc... Mais comme il existe une infinité d'arcs qui correspondent à un sinus, à une tangente,... donnés, il faut, pour ramener les fonctions ci-dessus à être des fonctions simples de x, les déterminer d'une manière plus complète. Nous désignerons donc exclusivement ici par arc sin x, arc tg x,... le *plus petit arc, en valeur absolue, qui corresponde aux valeurs de la variable x pour lesquelles la fonction existe*. Ainsi arc sin x sera compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, etc...

D'après cela, posons

$$y = \text{arc sin}\, x, \quad \text{d'où} \quad x = \sin y,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{D_y x} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

le radical étant pris positivement puisque $\cos y$ est positif. On a donc

$$d \,\text{arc sin}\, x = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

On aura, de même,

$$y = \text{arc tg}\, x, \quad x = \text{tg}\, y, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y},$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2},$$

ou

$$d \,\text{arc tg}\, x = \frac{dx}{1 + x^2}.$$

$$y = \text{arc sec}\, x, \quad x = \sec y, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\text{tg}\, y \sec y}, \quad 0 < y < \frac{\pi}{2};$$

ou, à cause de la relation $\text{tg}\, y = \sqrt{\sec^2 y - 1}$,

$$dy = d\,.\,\text{arc sec}\, x = \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}},$$

le radical étant pris positivement. Enfin, on trouvera de la même manière

$$d \,\text{arc cos}\, x = -\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad d \,\text{arc cot}\, x = -\frac{dx}{1 + x^2},$$

$$d \,\text{arc cosec}\, x = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Il importe de bien connaître toutes ces formules, auxquelles se ramène, comme on va le voir, la différentiation de toutes les fonctions explicites.

86. *Différentiation de fonctions explicites quelconques.* — Etant donnée une fonction explicite quelconque y de x, pourvu qu'elle ne soit composée qu'au moyen des fonctions élémentaires introduites jusqu'ici, on pourra toujours la ramener, par l'introduction de variables auxiliaires, à des sommes, produits, quotients,... de fonctions élémentaires et lui appliquer les règles de différentiation déjà connues; puis, par l'élimination des variables auxiliaires et de leurs différentielles, obtenir l'expression de la différentielle dy de la fonction proposée en fonction de x et de dx. Pour obtenir la dérivée Dy, il suffira de diviser par dx.

Soit, comme premier exemple,

$$y = \mathrm{l.\,tg.}\, x.$$

On posera $\mathrm{tg}\, x = z$, d'où $y = \mathrm{l.}\, z$. Les formules trouvées plus haut (**82** et **83**) donneront

$$dy = \frac{dz}{z}, \quad dz = \frac{dx}{\cos^2 x},$$

et en éliminant z et dz,

$$dy = d\,\mathrm{l.\,tg}\, x = \frac{dx}{\mathrm{tg}\, x \cos^2 x} = \frac{dx}{\sin x \cos x}.$$

Si l'on a

$$y = \mathrm{l.}(x + \sqrt{1 + x^2}),$$

on fera $z = x + \sqrt{1 + x^2}$, d'où $y = \mathrm{l.}\, z$, et par suite

$$dy = \frac{dz}{z}, \quad dz = dx + d.\sqrt{1 + x^2}.$$

Soit encore $1 + x^2 = u$, d'où

$$d.\sqrt{1 + x^2} = d\sqrt{u} = \frac{du}{2\sqrt{u}}, \quad du = 2x dx,$$

d'où encore

$$d.\sqrt{1 + x^2} = \frac{x dx}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad dz = \frac{x + \sqrt{1 + x^2}}{\sqrt{1 + x^2}} dx,$$

et en substituant dans l'expression de dy,

$$dy = d \,.\, \mathrm{l} \,.\, (x + \sqrt{1 + x^2}) = \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

87. Avec un peu d'exercice, on se dispense de représenter effectivement par de nouvelles lettres les fonctions plus simples dans lesquelles on décompose la fonction donnée, et l'on fait mentalement cette série de substitutions. Ainsi, ayant à différentier

$$y = \text{arc tg} \frac{2x}{1 - x^2},$$

on considérera mentalement $2x : (1 - x^2)$ comme une variable que l'on différentiera par la règle des quotients, et l'on trouvera ainsi, d'après les Nos **85, 80, 81**,

$$dy = d\left(\frac{2x}{1 - x^2}\right) : \left[1 + \left(\frac{2x}{1 - x^2}\right)^2\right] = \frac{(1 - x^2)\,2dx + 4x^2dx}{(1 - x^2)^2 + 4x^2}$$
$$= \frac{2(1 + x^2)\,dx}{(1 + x^2)^2} = \frac{2dx}{1 + x^2}.$$

On a donc

$$d \,.\, \text{arc tg} \frac{2x}{1 - x^2} = \frac{2dx}{1 + x^2}.$$

Si la fonction y est un produit de fonctions élevées à des puissances positives ou négatives, on simplifie le calcul en prenant d'abord le logarithme de y et déduisant de la différentielle du logarithme celle de la fonction. Soit

$$y = \frac{(x - 2)^9}{\sqrt{(x - 1)^5 (x - 3)^{11}}};$$

on en déduit

$$\mathrm{l} \,.\, y = 9 \mathrm{l} \,.\, (x - 2) - \frac{5}{2} \mathrm{l} \,.\, (x - 1) - \frac{11}{2} \mathrm{l} \,.\, (x - 3),$$

et en égalant les différentielles des deux membres,

$$\frac{dy}{y} = 9 \frac{dx}{x - 2} - \frac{5}{2} \frac{dx}{x - 1} - \frac{11}{2} \frac{dx}{x - 3},$$

d'où, réduisant au même dénominateur, multipliant par y que l'on remplace par sa valeur, et simplifiant, on trouve

$$dy = \frac{(x - 2)^8}{\sqrt{(x - 1)^7 (x - 3)^{13}}} (x^2 - 7x + 1)\,dx.$$

Si l'on avait à différentier une expression de la forme $y = u^v$, u et v étant des fonctions données de x, on opérerait de même :

$$\mathrm{l}.y = v\mathrm{l}.u;\quad \frac{dy}{y} = v\frac{du}{u} + \mathrm{l}.u.dv,$$

$$dy = d.u^v = u^v\left(\frac{v}{u}du + \mathrm{l}.udv\right).$$

Ainsi l'on trouverait

$$d.x^x = x^x(1 + \mathrm{l}.x)\,dx.$$

Exercices.

1. $y = (9a^2 - 6abx + 5b^2x^2)(a + bx)^{\frac{2}{3}}$; R. $dy = \frac{40}{3}\frac{b^3x^2}{(a + bx)^{\frac{1}{3}}}dx.$

2. $y = \operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x$; R. $dy = \frac{dx}{\cos^4 x}.$

3. $y = e^{ax}\cos bx$; R. $dy = e^{ax}(a\cos bx - b\sin bx)dx.$

4. $y = \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{2}\cos x + \cos^3 x\right)\sin x$; R. $dy = 4\cos^4 x dx.$

5. $y = x\cos\left(\mathrm{l}\,x - \frac{\pi}{4}\right)$; R. $dy = \sqrt{2}\cos(\mathrm{l}.x)dx.$

6. $y = \left(x - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x\right)\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\mathrm{l}.(1 + x^2)$; R. $dy = \frac{x^2\operatorname{arc\,tg} x}{1 + x^2}dx.$

7. $y = \mathrm{l}.\frac{ae^x - b}{ae^x + b}$; R. $dy = \frac{2abdx}{a^2e^x - b^2e^{-x}}.$

8. $y = \mathrm{l}.\frac{\sqrt{a + bx} - \sqrt{a - bx}}{\sqrt{a + bx} + \sqrt{a - bx}}$; R. $dy = \frac{adx}{x\sqrt{a^2 - b^2x^2}}.$

9. $y = \mathrm{l}.\frac{a + b\operatorname{tg} x}{a - b\operatorname{tg} x}$; R. $dy = \frac{2abdx}{a^2\cos^2 x - b^2\sin^2 x}.$

10. $y = \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a - b}{a + b}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$; R. $dy = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2}\frac{dx}{a + b\cos x}.$

11. $y = \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{a\cos^2 x + b\sin^2 x}}$; R. $dy = \frac{a\cos^4 x - b\sin^4 x}{(a\cos^2 x + b\sin^2 x)^{\frac{3}{2}}}dx.$

12. $y = \frac{(x + 4)^{\frac{13}{21}}(x - 3)^{\frac{15}{28}}}{(x + 1)^{\frac{1}{12}}}$; R. $dy = \frac{(x^2 + x + 1)\,dx}{(x + 4)^{\frac{8}{21}}(x - 3)^{\frac{13}{28}}(x + 1)^{\frac{13}{12}}}.$

13. $$y = \frac{x\sqrt{\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4}}{(x+a)^n};$$

$$R. \quad dy = \frac{a\alpha - [(2n-1)\alpha - 2a\beta]\,x^2 - [(2n-2)\beta - 3a\gamma]\,x^4 - (2n-3)\gamma x^6}{(x^2+a)^{n+1}\sqrt{\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4}}\,dx.$$

14. $y = (1+x^2)^{\operatorname{arc\,tg} x}$; $\quad$ *R.* $dy = (1+x^2)^{\operatorname{arc\,tg} x - 1}\,[2x \operatorname{arc\,tg} x + \mathrm{l}.(1+x^2)]\,dx.$

15. Vérifier que la seconde des équations

$$y = \frac{1-x}{1+x}, \quad \frac{dy}{\sqrt{y-y^3}} + \frac{dx}{\sqrt{x-x^3}} = 0$$

est une conséquence de la première.

16. De même pour les équations

$$y = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}, \quad \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} + \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = 0.$$

CHAPITRE III.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DE LA DÉRIVÉE.

88. Une fonction $f(x)$ est dite *croissante pour une valeur x de la variable*, lorsque $f(x+h) - f(x)$ est de même signe que h, pris suffisamment petit; elle est dite *décroissante*, lorsque $f(x+h) - f(x)$ et h sont de signes contraires.

Supposons que, pour la valeur considérée de x, $f(x)$ admette une dérivée déterminée $f'(x)$.

Si la dérivée $f'(x)$ est positive, la fonction est croissante; si la dérivée est négative, la fonction est décroissante.

On a

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

d'où l'on tire, ω décroissant indéfiniment avec h,

$$f(x+h) - f(x) = h\,[f'(x) + \omega].$$

Pour toute valeur de h inférieure, en valeur absolue, à un nombre très petit ε, ω sera numériquement moindre que $f'(x)$, puisque cette dérivée n'est pas nulle; le second nombre aura donc le signe de $h\,f'(x)$,

donc $f(x+h) - f(x)$ sera de même signe que h si $f'(x) > 0$, de signe contraire si $f'(x) < 0$.

89. *La même condition étant remplie, si l'on désigne par x' et x'' deux valeurs de la variable telles que l'on ait $x' < x < x''$, on aura toujours*

$$(1) \qquad \lim_{x''-x'=0} \frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'} = f'(x).$$

En effet, on a

$$f(x'') - f(x') = f(x'') - f(x) + f(x) - f(x')$$
$$= \frac{f(x'') - f(x)}{x'' - x}(x'' - x) + \frac{f(x) - f(x')}{x - x'}(x - x'),$$

et comme, par hypothèse, $x'' - x$, $x - x'$ sont de même signe, on a par un théorème connu (**1**)

$$f(x'') - f(x') = (x'' - x') \; \mathscr{M} \left[\frac{f(x'') - f(x)}{x'' - x}, \quad \frac{f(x') - f(x)}{x' - x}\right].$$

Divisant par $x'' - x'$ que l'on fera tendre vers zéro, $x'' - x$ et $x' - x$ auront aussi pour limite zéro, les rapports entre crochets tendront vers leur limite commune qui est $f'(x)$, d'après l'hypothèse ; on aura donc l'équation (1).

On remarquera 1° que ce théorème suppose essentiellement que $[f(x+h) - f(x)] : h$ tende vers la même limite $f'(x)$ quel que soit le signe de h ; 2° qu'il subsisterait même si ce rapport croissait indéfiniment $[f'(x) = \infty]$, pourvu qu'il fût de même signe pour $h \gtrless 0$.

90. Lorsqu'une fonction $f(x)$ est simple et continue dans un intervalle (a, b) (**65**), on dit qu'*elle admet une dérivée dans cet intervalle*, si la dérivée $f'(x)$ existe pour toute valeur de x appartenant à l'intervalle (a, b), les valeurs de $x + h$ restant d'ailleurs comprises dans le même intervalle.

En sorte que, si $a < b$, pour $x = a$, h sera supposé positif seulement ; pour $x = b$, h sera négatif.

Théorème d'O. Bonnet. — *La fonction $f(x)$ étant continue dans l'intervalle (a, b), si elle a une dérivée dans l'intervalle $(a+0, b-0)$, il existe dans cet intervalle au moins une valeur ξ de x pour laquelle on a*

$$(2) \qquad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Soit A la valeur du premier membre. La fonction

$$f(x) - f(a) - \mathrm{A}(x - a) = \varphi(x)$$

est continue dans l'intervalle (a, b); elle a une dérivée $f'(x) - A$; elle s'annule pour $x = a$ et pour $x = b$, d'après la signification de A. Donc, ou elle est constamment nulle dans l'intervalle (a, b) : dans ce cas il en est de même de sa dérivée et $f'(x) = A$; ou bien elle admet des valeurs différentes de zéro. Si $\varphi(x)$ est positif dans une partie de l'intervalle, sa limite maximum L sera > 0, et comme elle atteint cette limite au moins pour une valeur ξ de x, il existera *entre* a et b une valeur ξ de x telle que l'on aura, h étant positif,

$$\varphi(\xi \pm h) - \varphi(\xi) \leqslant 0,$$

d'où

$$\frac{\varphi(\xi - h) - \varphi(\xi)}{-h} \geqslant 0, \qquad \frac{\varphi(\xi + h) - \varphi(\xi)}{h} \leqslant 0.$$

Lorsque h tend vers zéro, ces deux rapports doivent tendre vers une même limite $\varphi'(\xi)$ par supposition : cette limite ne peut donc être que zéro. On a donc

$$\varphi'(\xi) = 0 \quad \text{ou} \quad f'(\xi) - A = 0,$$

d'où l'on conclut, en remplaçant A par sa valeur,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi), \quad (a < \xi < b).$$

Si $\varphi(x)$ admettait des valeurs négatives dans l'intervalle (a, b), on raisonnerait de même.

On doit observer que ce théorème ne suppose nullement que la dérivée $f'(x)$ soit une fonction continue dans l'intervalle $(a + 0, b - 0)$, et que la démonstration subsiste même si elle devient infinie dans cet intervalle, pourvu toujours qu'elle soit indépendante du signe de h.

91. *Conséquences du théorème de* M. O. Bonnet. — I. Si la fonction $f(x)$ reprend la même valeur pour $x = a$ et pour $x = b$, $f(a) = f(b)$, il existe une valeur ξ de x, comprise entre a et b, pour laquelle la dérivée $f'(x)$ s'évanouit, $f'(\xi) = 0$ (Théorème de Rolle).

II. Le théorème général s'applique évidemment aussi bien à deux valeurs quelconques x_0, $x_0 + h$ de la variable, $h \gtrless 0$, comprises dans l'intervalle (a, b), qu'aux valeurs extrêmes a et b. Il suit de là que si l'on désigne par θ une quantité inconnue positive et moindre que l'unité, la

valeur ξ comprise entre x_0 et $x_0 + h$ pourra se représenter par $x_0 + \theta h$, et l'équation (2) nous donnera

$$(3) \qquad f(x_0 + h) - f(x_0) = hf'(x_0 + \theta h), \quad 0 < \theta < 1,$$

équation importante.

III. *Toute fonction continue* $f(x)$ *dont la dérivée* $f'(x)$ *est constamment nulle dans l'intervalle* $(a + 0, b - 0)$, *se réduit à une constante dans l'intervalle* (a, b).

Soient x_0, $x_0 + h$ deux valeurs de x appartenant à l'intervalle (a, b); d'après l'équation (3), $x_0 + \theta h$ étant $> a$ et $< b$, on a, d'après l'hypothèse, $f'(x_0 + \theta h) = 0$. On a donc

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = 0 \quad \text{ou} \quad f(x_0 + h) = f(x_0),$$

la fonction a la même valeur pour deux valeurs quelconques de x dans l'intervalle (a, b); c'est une constante.

IV. *Si deux fonctions* $f(x)$, $\varphi(x)$ *sont continues et ont leurs dérivées égales pour toute valeur de* x *dans un intervalle* (a, b), *elles ne peuvent différer que par une constante dans cet intervalle.*

C'est une conséquence du principe III, car la fonction $f(x) - \varphi(x)$ est continue et a une dérivée nulle dans l'intervalle (a, b), elle se réduit à une constante C, et l'on a

$$f(x) = \varphi(x) + C.$$

92. V. *Si la dérivée* $f'(x)$ *est finie et déterminée dans un intervalle* (a, b), *et si elle converge vers une limite déterminée* A *lorsque* x *tend vers une valeur* x_1 *comprise entre* a *et* b, *on a* $f'(x_1) = A$.

Car le théorème de M. Bonnet étant applicable, on a

$$\frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} = f'(x_1 + \theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

Faisons tendre h vers zéro; le premier membre tend vers $f'(x_1)$, le second, par supposition, a pour limite A, donc etc. La démonstration subsiste si $A = \infty$. Mais $f'(x_1)$ pourrait exister même si $f'(x_1 + \theta h)$ ne tendait vers aucune limite. Ainsi, soient

$$f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}, \qquad f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}.$$

Pour $x = 0$, la fonction s'annule ; sa dérivée ne tend vers aucune limite quand x tend vers zéro, et l'on a, cependant,

$$f'(0) = \lim_{h=0} h \sin \frac{1}{h} = 0.$$

VI. — *Une fonction simple $f(x)$ tendant vers une limite finie et déterminée lorsque x croît indéfiniment en valeur absolue, si $f'(x)$ tend vers une limite, cette limite ne peut être que zéro.*

Soient x_0 et x $(x > x_0)$ deux valeurs de la variable. On a, en désignant par ξ une quantité $> x_0$ et $< x$,

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) f'(\xi).$$

Supposons que $\lim\limits_{x=\infty} f'(x)$ soit différent de zéro ; à partir d'une valeur suffisamment grande X de x, on aurait donc constamment VA $f'(x) > \mathrm{B}$, B désignant un nombre déterminé > 0. Donc si l'on prend $x_0 > \mathrm{X}$, on aura, pour toute valeur de x, VA $f'(\xi) > \mathrm{B}$, d'où

$$\text{VA}\,[f(x) - f(x_0)] > (x - x_0)\,\mathrm{B},$$

et si l'on conçoit que x_0 reste constant, que x croisse indéfiniment, $(x - x_0)\,\mathrm{B}$ croîtra indéfiniment et il est impossible que $f(x)$ tende vers une limite finie. On raisonnerait de même si x tendait vers $-\infty$.

VII. *Si la fonction $f(x)$ reste de même signe et croît indéfiniment lorsque x tend vers une limite finie a, la dérivée $f'(x)$ ne peut tendre vers une limite finie.*

Soient x et x_0 deux valeurs aussi rapprochées qu'on le veut de a, du côté de a où VA $f(x)$ croît indéfiniment. On a

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) f'(\xi),$$

ξ étant compris entre x et x_0. Concevons que x_0 restant fixe, x tende vers la limite a ; $f(x) - f(x_0)$ croîtra indéfiniment, et comme VA $(x - x_0)$ reste moindre qu'un nombre déterminé, il faut que $f'(\xi)$ croisse indéfiniment.

La fonction $f'(x)$ peut donc acquérir, dans un intervalle (x_0, a) aussi petit qu'on le veut, des valeurs absolues supérieures à tout nombre donné, il est donc impossible qu'elle tende vers une limite finie lorsque x tend vers la limite a.

93. VIII. — Nous pouvons actuellement compléter ce qui concerne la longueur d'un arc de courbe plane ou non plane (**54**). Soient

$$x = f(t), \quad y = f_1(t), \quad z = f_2(t)$$

les valeurs des cordonnées rectangulaires de la courbe en fonction d'une variable indépendante t; $t=\alpha$, $t=\beta$ les valeurs de t qui répondent aux extrémités A et B de l'arc considéré. On suppose que les fonctions f, f_1, f_2 sont simples, continues et ont des dérivées déterminées dans l'intervalle (α, β).

Nous pouvons partager cet intervalle (**69**) en intervalles (t_1, t_2) tels que, dans chacun d'eux, l'oscillation de chacune des fonctions f, f_1, f_2 soit moindre qu'une fraction donnée $\varepsilon : 3$. Comme la distance de deux points quelconques m et n pris sur l'arc correspondant à l'intervalle (t_1, t_2) est moindre que la somme de ses projections orthogonales h, k, l sur les trois axes, moindre, par conséquent, que la somme des oscillations des fonctions f, f_1, f_2 dans l'intervalle (t_1, t_2), elle sera plus petite que ε, ce qui justifie l'hypothèse admise au N° **54**.

D'autre part, la formule (3) nous donne

$$h = \text{VA}\,[f(t_2) - f(t_1)] = \text{VA}\,(t_2 - t_1)\,f'(\tau),$$

et de même

$$k = \text{VA}\,(t_2 - t_1)\,f'_1(\tau_1), \quad l = \text{VA}\,(t_2 - t_1)\,f'_2(\tau_2),$$

τ, τ_1 et τ_2 étant compris entre t_1 et t_2. Nous aurons donc, G désignant un nombre supérieur aux valeurs absolues des dérivées $f'(t), f'_1(t), f'_2(t)$ dans l'intervalle (α, β),

$$h + k + l < 3\,(t_2 - t_1)\,\text{G}.$$

Par conséquent, si Π désigne le périmètre d'un polygone quelconque inscrit dans l'arc AB, on aura toujours

$$\Pi < \Sigma\,(h + k + l) < 3\,(\beta - \alpha)\,\text{G},$$

le périmètre Π ne pourra donc croître au dessus d'une limite fixe, donc (**19**) il tendra vers une limite finie et déterminée qui sera (**56**) la longueur de l'arc AB.

94. IX. — *Application du théorème de M. Bonnet à la théorie des séries. — Soient $f(x)$ une fonction constamment positive et indéfiniment décroissante pour $x \geqslant a$*; F (x) *une fonction dont la dérivée est $f(x)$. La série*

$$(4) \quad f(a) + f(a+1) + f(a+2) + \cdots + f(a+n) + \cdots = \Sigma\, f(a+n)$$

est divergente ou convergente selon que F (x) *croît ou ne croît pas indéfiniment avec x.*

La fonction F (x), étant continue et à dérivée positive, est constamment croissante avec x à partir de $x = a$. Elle ne peut donc (**19**) que croître

indéfiniment ou tendre vers une limite finie. On a, d'après l'équation (2)

$$F(x+1)-F(x)=F'(x+\theta)=f(x+\theta), \quad (0<\theta<1)$$

et, d'après l'hypothèse,

$$f(x)>f(x+\theta)>f(x+1).$$

donc

$$f(x)>F(x+1)-F(x)>f(x+1).$$

Faisant $x=a, a+1, a+2, \ldots, a+n-1$ et ajoutant ces inégalités membre à membre, on aura, en désignant par s_n la somme des n premiers termes de la série (4),

$$s_n>F(a+n)-F(a)>s_{n+1}-f(a).$$

Si F (x) croît indéfiniment avec x, F $(a+n)$ tendra vers l'infini avec n, s_n croîtra aussi à l'infini et la série (4) sera divergente. Si F (x) tend vers une limite finie, F $(a+n)$ et *à fortiori* $s_{n+1}-f(a)$ ne pourra jamais surpasser un nombre fixe, et comme la série (4) a ses termes positifs, elle sera convergente.

Soit comme exemple $f(x)=1 : x^\alpha$, $\alpha>0$. La fonction F (x) aura pour valeur, si $\alpha \gtrless 1$,

$$F(x)=-\frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}},$$

et si $\alpha=1$, F $(x)=$ l. x. Si $\alpha>1$, F (x) tend vers zéro lorsque x croît indéfiniment; si $\alpha<1$, F (x) tend au contraire vers l'infini. Il suit donc du théorème ci-dessus que la série

$$\Sigma\frac{1}{(a+n)^\alpha}$$

est convergente pour $\alpha>1$, divergente pour $\alpha<1$. Pour $a=1$, on retrouve la proposition du N° **36**.

Exercices.

1. Démontrer que l'on a, pour toute valeur positive de x,

$$\text{l.}(1+x)<x, \quad \text{l.}(1+x)>x-\frac{x^2}{2}.$$

R. On observera le signe des dérivées des fonctions

$$\text{l.}(1+x)-x, \quad \text{l.}(1+x)-x+\frac{x^2}{2},$$

qui sont nulles pour $x=0$.

2. Démontrer que $x^2(e^x - e^{-x})$ est positif pour $x > 0$.

3. Démontrer que, pour $x > 0$ et $< \frac{\pi}{2}$, on a toujours

$$x < \frac{1}{3} \operatorname{tg} x + \frac{2}{3} \sin x.$$

R. La fonction $x - \frac{1}{3} \operatorname{tg} x - \frac{2}{3} \sin x$ est nulle pour $x = 0$. Sa dérivée est négative dans l'intervalle considéré.

4. Si $f(x)$ admet une dérivée déterminée dans l'intervalle (a, b) et si $f'(a)$, $f'(b)$ sont de signes contraires, il existe une valeur ξ entre a et b pour laquelle $f'(x)$ s'annule.

R. On montre que $f(x)$, étant continue, atteint pour une valeur ξ de x, plus grande que a et plus petite que b, soit une limite maximum L, soit une limite minimum l, et l'on a (**90**) $f'(\xi) = 0$.

On déduit de là que si l'on a, en général, $f'(a) = A$, $f'(b) = B$, et si K désigne une quantité comprise entre A et B, on aura, pour une valeur ξ de x entre a et b,

$$f'(\xi) = K.$$

5. Si $f(x)$ a une dérivée $f'(x)$ dans l'intervalle (a, b) et si, σ désignant une quantité donnée arbitrairement petite, on peut assigner un nombre ε tel que l'on ait, pour toute valeur de x appartenant à l'intervalle (a, b),

$$\text{VA}\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x)\right] < \sigma \quad \text{si} \quad h < \varepsilon,$$

la dérivée $f'(x)$ sera une fonction continue de x dans l'intervalle (a, b).

6. Si $f'(x)$ a une limite déterminée lorsque x tend vers une limite x_1, et si h, h_1 désignent des infiniment petits de même signe, $h_1 > h$, on aura

$$\lim \frac{f(x_1 + h_1) - f(x_1 + h)}{h_1 - h} = f'(x_1).$$

R. Conséquence de l'équation (3) et de la propriété V. Cette remarque complète le théorème du N° **89**.

7. La série

$$\sum \frac{1}{(a+n)\,[\text{l}.(a+n)]^\alpha}, \quad a > 1,$$

est convergente si $\alpha > 1$, divergente si $\alpha \leqslant 1$.

R. On considère la fonction $f(x) = \frac{1}{x(\text{l}.x)^\alpha}$ et on applique le théorème du N° **94**.

CHAPITRE IV.

DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES SUCCESSIVES.

95. Soit $y = f(x)$ une fonction de x, $f'(x)$ sa dérivée qui est, en général, une fonction de x. Si elle est continue et si elle admet une dérivée, on appelle celle-ci la *dérivée seconde* de $f(x)$ et on la représente par $f''(x)$. Si $f''(x)$ admet à son tour une dérivée, celle-ci sera la *dérivée troisième* de $f(x)$ et s'écrira $f'''(x)$, et ainsi de suite. On emploie aussi les notations

$$\mathrm{D}y,\ \mathrm{D}^2y,\ \mathrm{D}^3y,\ \ldots,\ \mathrm{D}^ny.$$

La définition de la différentielle d'une fonction entraîne les équations

$$(1)\quad df(x) = f'(x)\,dx,\quad df'(x) = f''(x)\,dx,\quad df''(x) = f'''(x)\,dx, \ldots$$

On appelle *différentielle seconde* de y la différentielle d^2y de sa différentielle dy; *différentielle troisième* la différentielle d^3y de d^2y, et ainsi de suite. Comme dx est arbitraire, on peut le supposer indépendant de x et l'on a, en appliquant les règles de différentiation et ayant égard aux relations (1),

$$dy = f'(x)\,dx,\quad d^2y = d.f'(x)\,dx = f''(x)\,dx^2,$$
$$d^3y = d.d^2y = d.f''(x)\,dx^2 = f'''(x)\,dx^3, \text{ etc}\ldots$$

et en général

$$d^ny = f^n(x)\,dx^n,$$

d'où l'on tire

$$(2)\qquad \frac{dy}{dx} = f'(x),\quad \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x), \ldots \quad \frac{d^ny}{dx^n} = f^n(x),$$

c'est-à-dire que *la dérivée* $n^{\text{ième}}$ *d'une fonction est le quotient de sa différentielle* $n^{\text{ième}}$ *par la puissance* $n^{\text{ième}}$ *de la différentielle de la variable, prise comme constante*. Ce qui fournit une nouvelle manière de représenter les dérivées successives.

96. La dérivée ou la différentielle d'une fonction explicite de x, obtenue par les règles du Chapitre II, se présentant comme une nouvelle fonction explicite, sa dérivée s'obtiendra par les mêmes règles, et ainsi de suite. Nous effectuerons ce calcul pour quelques fonctions élémentaires.

I. On a trouvé $d\,.\,x^a = ax^{a-1}\,dx$; a et dx sont constants, donc

$$d^2\,.\,x^a = a\,(a - 1)\,x^{a-2}\,dx^2,$$
$$d^3\,.\,x^a = a\,(a - 1)\,(a - 2)\,x^{a-3}\,dx^3,$$

et en général

$$d^n\,.\,x^a = a\,(a - 1)\,\ldots\,(a - n + 1)\,x^{a-n}dx^n,$$

ou encore

$$D^n x^a = \frac{d^n.x^a}{dx^n} = a\,(a - 1)\,\ldots\,(a - n + 1)\,x^{a-n}.$$

Si a est entier et > 0, cette dérivée se réduira à la constante $a\,(a - 1)\ldots 2.1$ pour $n = a$, et les dérivées d'ordre supérieur à a seront nulles. Cette remarque s'applique à toute fonction entière de x, de degré a.

II. De l'équation

$$d\,\mathrm{l}.\,x = \frac{dx}{x} = x^{-1}\,dx$$

on tire immédiatement par la règle ci-dessus

$$d^n\,\mathrm{l}.\,x = (d^{n-1}\,.\,x^{-1})\,dx = (-1)\,(-2)\cdots(-n + 1)\,x^{-n}dx^n$$

ou

$$\frac{d^n\,\mathrm{l}.\,x}{dx^n} = (-1)^{n-1}\,\frac{1.2\ldots(n-1)}{x^n}.$$

Pour avoir $D^n \log x$ il suffira de multiplier par le facteur constant $1 : \mathrm{l}.\,A$.

III. La formule $d\,.\,A^x = A^x\,\mathrm{l}.\,A dx$ donne, $\mathrm{l}.\,A$ et dx étant constants,

$$d^2A^x = A^x\,(\mathrm{l}.\,A)^2\,dx^2,\ \ldots\ d^nA^x = A^x\,(\mathrm{l}.\,A)^n\,dx^n,$$

d'où

$$D^nA^x = A^x\,(\mathrm{l}.\,A)^n,$$

et si $A = e$,

$$D^ne^x = e^x.$$

IV. On a trouvé

$$d\,.\,\sin x = \cos x dx = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)dx.$$

Il suffit donc, pour différentier $\sin x$, d'ajouter un quadrant à l'arc et de multiplier par dx. On déduit de là immédiatement

$$d^n \sin x = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)dx^n,$$

et de même

$$d^n \cos x = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) dx^n.$$

En divisant par dx^n, on aura les dérivées correspondantes.

V. Soit $y = \text{arc tg}\, x$, d'où $x = \text{tg}\, y$; on a

$$dx = \frac{dy}{\cos^2 y}, \quad dy = \cos^2 y dx,$$

Puis

$$d^2y = -2 \cos y \sin y dy dx = -\cos^2 y \sin 2y dx^2,$$

$$d^3y = -2 (\cos 2y \cos y - \sin 2y \sin y) \cos y dy dx^2 = -2 \cos^3 y \cos 3y dx^3,$$

$$d^4y = 2.3 (\sin 3y \cos y + \cos 3y \sin y) \cos^2 y dy dx^3 = 2.3 \cos^4 y \sin 4y dx^4,$$

et l'on voit sans peine que, en général,

$$d^n y = 1.2\ldots(n-1) \cos^n y \sin\left(ny + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Remplaçant $\cos y$ par sa valeur en x, on a enfin

$$d^n \text{ arc tg}\, x = \frac{1.2\ldots(n-1)}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}} \sin n\left(\frac{\pi}{2} + \text{arc tg}\, x\right).$$

97. *Formule de Leibnitz pour la dérivée $n^{ième}$ d'un produit.* — Soit uv le produit de deux fonctions de x; on a trouvé

$$D.\, uv = vDu + uDv,$$

et en appliquant la même règle à cette équation, on aura

$$D^2.\, uv = vD^2u + DvDu + DuDv + uD^2v,$$

d'où

$$D^2.\, uv = vD^2u + 2DvDu + D^2v \cdot u;$$

de même

$$D^3.\, uv = vD^3u + 3DvD^2u + 3D^2vDu + D^3v \cdot u,$$

et en général, en montrant que si la règle est vraie pour $D^{n-1}.\, uv$, elle est vraie pour $D^n.uv$,

$$(3)\quad D^n uv = vD^n u + nDv \cdot D^{n-1}u + \frac{n(n-1)}{1.2} D^2v \cdot D^{n-2}u + \cdots + D^n v \cdot u.$$

Cette équation peut s'écrire symboliquement

$$D^n uv = (Du + Dv)^n,$$

pourvu qu'après avoir développé le second membre par la formule du binôme, on change les exposants de Du, Dv en indices de dérivation.

98. Cette formule de Leibnitz s'applique souvent pour former une relation entre plusieurs dérivées consécutives d'une même fonction. Soit, par exemple.

$$y = \cos(m \text{ arc } \sin x).$$

On reconnaît que, dans l'intervalle $(-1, +1)$ de x, les dérivées successives de y existent.

Posant arc sin $x = z$, d'où $x = \sin z$, $y = \cos mz$, on tire de la règle des fonctions de fonctions

$$D_x y = -\frac{m \sin mz}{\cos z}, \quad D_x^2 y = -m\frac{m \cos mz \cos z + \sin mz \sin z}{\cos^3 z},$$

ou, en remplaçant au second membre,

$$D_x^2 y = -\frac{m^2 y}{1 - x^2} + \frac{x}{1 - x^2} D_x y,$$

d'où l'on tire

$$(1 - x^2) D^2 y - x D y + m^2 y = 0.$$

Le premier membre est une fonction de x dont la valeur est constante, puisqu'elle se réduit à zéro ; sa dérivée $n^{ième}$, que nous formerons par la règle de Leibnitz, sera donc nulle, ce qui nous donne

$$(1 - x^2) D^{n+2} y - 2nx D^{n+1} y - n(n-1) D^n y - x D^{n+1} y$$
$$- n D^n y + m^2 D^n y = 0,$$
$$(1 - x^2) D^{n+2} y - (2n+1) x D^{n+1} y + (m^2 - n^2) D^n y = 0.$$

Cette relation entre trois dérivées consécutives facilitera le calcul de ces dérivées, en particulier dans le cas où $x = 0$ et où l'équation se réduit à

$$D^{n+2} y = (n^2 - m^2) D^n y,$$

d'où l'on déduit facilement, Dy étant nul et y égal à 1 pour $x = 0$,

$$D^2 y = -m^2, \quad D^3 y = 0, \quad D^4 y = -m^2(2^2 - m^2),$$
$$D^5 y = 0, \quad D^6 y = -m^2(2^2 - m^2)(4^2 - m^2), \text{ etc...}$$

99. *Des différences successives.* — Pour un accroissemnt $\Delta x = h$ de la variable x, la fonction $y = f(x)$ reçoit un accroissement

$$\Delta y = f(x + h) - f(x),$$

qu'on nomme aussi sa *différence première*. Un nouvel accroissement h_1 donné à x détermine dans la fonction Δy un accroissement $\Delta(\Delta y) = \Delta^2 y$

qui est la *différence seconde* de y, et ainsi de suite. Si l'on suppose $h_1 = h$, on a

$$\Delta^2 y = f(x + 2h) - 2\,f(x + h) + f(x);$$
$$\Delta^3 y = f(x + 3h) - 3f(x + 2h) + 3f(x + h) - f(x), \text{ etc...}$$

et il existe une relation importante entre ces différences successives et les dérivées de $f(x)$ supposées déterminées dans le voisinage de x. Posant

$$f(x + h) - f(x) = \varphi(x),$$

on a

$$\Delta^2 y = \varphi(x + h) - \varphi(x) = h\,\varphi'(x + \theta h),\ 0 < \theta < 1.$$

Or, on a

$$\varphi'(x) = f'(x + h) - f'(x),$$

donc

$$\Delta^2 y = h\,[f'(x + \theta h + h) - f'(x + \theta h)] = h^2 f''(x + \theta h + \theta_1 h),$$

θ_1 étant aussi compris entre zéro et l'unité. On verrait de même que

$$\Delta^3 y = h^3 f'''(x + \theta h + \theta_1 h + \theta_2 h),\ 0 < \theta_2 < 1, \text{ etc...}$$

On conclut de là que, si h ou Δx a pour limite zéro, on a

$$\lim \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = f''(x), \quad \lim \frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} = f'''(x), \quad \text{etc...}$$

Exercices.

1. $y = (a + bx)^m$, $d^n y = m(m-1)\dots(m-n+1)\,b^n (a+bx)^{m-n} dx^n$.

2. $y = e^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta)$, θ constant.

R. $d^n y = e^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta + n\theta)dx^n$.

3. $y = e^{ax}\cos bx$.

R. Se ramène au cas précédent en posant $a = \rho\cos\theta$, $b = \rho\sin\theta$, et l'on trouve

$$d^n y = \rho^n e^{ax}\cos(bx + n\theta)\,dx^n.$$

4. $y = x^n(1-x)^n$, n entier. Trouver $d^n y$.

R.
$$d^n y = 1.2\dots n\,(1-x)^n\left[1 - \frac{n^2}{1^2}\frac{x}{1-x} + \frac{n^2(n-1)^2}{1^2\,2^2}\frac{x^2}{(1-x)^2} - \frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2}{1^2 2^2 3^2}\cdot\frac{x^3}{(1-x)^3} + \cdots\right]dx^n.$$

5. $y = \dfrac{1.x}{x}$ *R.* $\dfrac{d^n y}{dx^n} = (-1)^{n-1}\dfrac{1.2\dots n}{x^{n+1}}\left(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} - 1.x\right)$.

6. $y = \frac{1}{a^2 - b^2x^2}$. *R*. En décomposant en deux fractions plus simples, on trouve

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{1.2\ldots n}{2a} b^n \left[\frac{1}{(a - bx)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{(a + bx)^{n+1}} \right].$$

7. Trouver la dérivée $(n + 1)^{ème}$ de arc sin x.

R. De l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = (1 + x)^{-\frac{1}{2}} (1 - x)^{-\frac{1}{2}} = uv$$

on tire, par l'application de la formule de Leibnitz et de l'ex. 1,

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2^n} \frac{(1-x)^{-n}}{\sqrt{1 - x^2}} \left[1 - \frac{n}{1} \frac{1}{2n-1} \frac{1-x}{1+x} \right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)}{1.2} \frac{1.3}{(2n-1)(2n-3)} \frac{(1-x)^2}{(1+x)^2} - \ldots \pm \frac{(1-x)^n}{(1+z)^n} \right].$$

8. Étant donné

$$y = (1 - x^2)^{n - \frac{1}{2}}$$

démontrer que l'on a

$$\frac{d^ny}{dx^n} = (-1)^{n1} \frac{1.3\ldots(2n-1)}{n} \sin (n \text{ arc} \cos x).$$

9. Démontrer les formules *symboliques*

$$f(\mathrm{D})\, e^{ax} = f(a)\, e^{ax}, \qquad f(\mathrm{D})\, e^{ax}\mathrm{X} = f(\mathrm{D} + a)\, e^{ax}\mathrm{X},$$

f désignant une fonction rationnelle et entière.

CHAPITRE V.

APPLICATIONS ANALYTIQUES. VRAIES VALEURS DES FONCTIONS.

100. Lorsqu'en substituant dans l'expression analytique d'une fonction $\varphi(x)$ de x une valeur particulière a, on obtient un résultat sans signification, tel que $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$, etc., on cherche la limite vers laquelle tend la fonction $\varphi(x)$ lorsque x a pour limite a, c'est-à-dire $\varphi(a - 0)$ ou $\varphi(a + 0)$ suivant que x tend vers a en croissant ou en décroissant. Si ces limites sont égales, leur valeur commune s'appelle la *vraie valeur* de la fonction pour $x = a$ (**64**).

Considérons d'abord le cas où $\varphi(a)$ est de la forme $\frac{0}{0}$; nous établirons ce théorème :

I. *Soient* $f(x)$, $F(x)$ *deux fonctions continues de* x *ayant une dérivée; si* $f(x)$, $F(x)$ *s'annulent pour* $x=a$, *et si le rapport* $f'(x):F'(x)$ *tend vers une limite* A *lorsque* x *tend vers la limite* a, *sans que* $F'(x)$ *change de signe, le rapport* $f(x):F(x)$ *aura la même limite* A.

Pour fixer les idées, supposons que x tende vers a en croissant. Étant donnée une quantité arbitrairement petite ε, on pourra déterminer un intervalle $(a-\delta, a-0)$ dans lequel on aura constamment.

$$A-\varepsilon < \frac{f'(x)}{F'(x)} < A+\varepsilon,$$

et comme nous pouvons regarder $F'(x)$ comme positif dans cet intervalle (puisque l'on peut changer les signes de f et de F ensemble), on aura

$$f'(x)-(A+\varepsilon)F'(x)<0, \quad f'(x)-(A-\varepsilon)F'(x)>0.$$

La fonction continue $f(x)-(A+\varepsilon)F(x)$ dont la dérivée est négative décroît constamment (**88**); elle est nulle pour $x=a$; elle est donc positive dans l'intervalle $(a-\delta, a-0)$. On voit de même que la fonction $f(x)-(A-\varepsilon)F(x)$ est toujours négative dans ce même intervalle. Ainsi l'on a

$$f(x)-(A+\varepsilon)F(x)>0, \quad f(x)-(A-\varepsilon)F(x)<0;$$

d'où, divisant par $F(x)$ qui est négatif [car $F(a)=0$ et $F'(x)$ est >0], on a

$$\frac{f(x)}{F(x)}<A+\varepsilon, \qquad \frac{f(x)}{F(x)}>A-\varepsilon.$$

Le rapport $f(x):F(x)$ finit donc par différer aussi peu qu'on le veut de A, pourvu que l'on prenne δ suffisamment petit, C. Q. F. D. La démonstration se ferait de la même manière si x tendait vers a en décroissant : on considérerait l'intervalle $(a+0, a+\delta)$.

Par exemple, la fonction

$$\frac{a^x-b^x}{\sin x}$$

prend la forme $\frac{0}{0}$ pour $x=0$. On a donc, en vertu du théorème ci-dessus,

$$\lim_{x=0}\frac{a^x-b^x}{\sin x}=\lim\frac{a^x\mathrm{l}.a-b^x\mathrm{l}.b}{\cos x}=\mathrm{l}.a-\mathrm{l}.b=\mathrm{l}.\left(\frac{a}{b}\right).$$

101. *Remarques.* — 1° *Le théorème* I *reste vrai même lorsque*

$A = \pm \infty$, c'est-à-dire lorsque le rapport $f'(x) : F'(x)$ croît indéfiniment, x ayant pour limite a.

Soit $A = +\infty$, et G un nombre aussi grand qu'on le veut. On aura, dans un intervalle $(a - \delta, a - 0)$, $f'(x) : F'(x) > G$, d'où l'on déduira comme plus haut

$$f'(x) - GF'(x) > 0, \quad f(x) - GF(x) < 0,$$

et par suite $f(x) : F(x) > G$.

2° Le théorème I est vrai aussi pour $a = \infty$, c'est-à-dire que, *si* $f'(x) : F'(x)$ *tend vers une limite* A *lorsque* x *croît indéfiniment,* $f(x) : F(x)$ *tend vers la même limite* A.

En effet, pour toute valeur de x supérieure à une valeur X, on aura comme plus haut, ε étant arbitrairement petit et $F'(x)$ restant toujours de même signe,

$$f'(x) - (A + \varepsilon) F'(x) < 0, \quad f'(x) - (A - \varepsilon) F'(x) > 0,$$

d'où l'on conclura encore

$$f(x) - (A + \varepsilon) F(x) > 0, \quad f(x) - (A - \varepsilon) F(x) < 0,$$

x étant $> X$; d'où l'on verra enfin que l'on a

$$A - \varepsilon < \frac{f(x)}{F(x)} < A + \varepsilon,$$

c'est-à-dire que $f(x) : F(x)$ finira par différer de A d'une quantité moindre que toute grandeur donnée.

102. Si $f'(x)$, $F'(x)$ étaient nuls aussi pour $x = a$, le théorème I ne ferait plus connaître directement la vraie valeur de la fonction $f(x) : F(x)$, puisque A se présenterait lui-même sous la forme $\frac{0}{0}$. Mais en appliquant ce même théorème à la fonction $f'(x) : F'(x)$, qui affecte aussi la forme $\frac{0}{0}$, on en conclurait que si le rapport $f''(x) : F''(x)$ tend vers une limite A, il en est de même du rapport $f'(x) : F'(x)$ et par suite du rapport proposé. Et ainsi de suite, si $f''(a) = 0$, $F''(a) = 0$...

Exemple. La fonction

$$\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} \text{ pour } x = 0.$$

On a, en poussant les dérivations jusqu'au troisième ordre,

$$\lim_{x=0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \lim \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x},$$

et cette dernière limite étant évidemment égale à 2, on en conclut que la vraie valeur de la fonction donnée pour $x = 0$ est égale à 2.

103. Il importe d'observer que le théorème permet de déduire la limite de $f(x) : F(x)$ de la limite de $f'(x) : F'(x)$ lorsque celle-ci existe, mais que $f'(x) : F'(x)$ pourrait ne tendre vers aucune limite déterminée, sans qu'on pût affirmer qu'il en est de même du rapport $f(x) : F(x)$. Considérons la fonction suivante qui se présente sous la forme $\frac{0}{0}$ pour $x = 0$:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{l.(1+x)}.$$

On a ici

$$f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, \quad F'(x) = \frac{1}{1+x},$$

et l'on voit sans peine que le rapport de ces dérivées ne tend vers aucune limite fixe quand x tend vers zéro ; A est donc indéterminé. Mais on peut écrire

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{x}{l.(1+x)} \cdot x \sin\frac{1}{x},$$

et comme le premier facteur tend vers l'unité (**23**), le second vers zéro, on en conclut que la vraie valeur cherchée est zéro.

104. Forme $\frac{\infty}{\infty}$. — II. *Si $f(x)$ et $F(x)$ croissent indéfiniment en valeur absolue lorsque x tend vers une limite a, et si $f'(x) : F'(x)$ converge alors vers une limite déterminée A, $F'(x)$ restant de même signe, le rapport $f(x) : F(x)$ convergera la même limite A.*

Si x tend vers a en croissant, on démontrera, comme pour le théorème I, que dans l'intervalle $(a - \delta, a - 0)$ on a, en prenant $F'(x) > 0$ comme on peut le faire,

$$f'(x) - (A + \varepsilon) F'(x) < 0, \quad f'(x) - (A - \varepsilon) F'(x) > 0,$$

d'où il suit que, k désignant une constante positive arbitraire, les fonctions

$$f(x) - (A + \varepsilon) F(x) - k, \quad f(x) - (A - \varepsilon) F(x) + k,$$

qui ont respectivement pour dérivées les précédentes, seront l'une toujours décroissante, l'autre toujours croissante dans cet intervalle. D'ailleurs on peut prendre la constante k assez grande pour que, pour $x = a - \delta$, la première fonction ait une valeur négative, la seconde une valeur positive; on aura donc dans l'intervalle $(a - \delta, a - 0)$,

$$f(x) - (\mathrm{A} + \varepsilon)\,\mathrm{F}(x) - k < 0, \quad f(x) - (\mathrm{A} - \varepsilon)\,\mathrm{F}(x) + k > 0,$$

d'où, $\mathrm{F}(x)$ étant positif,

$$\frac{f(x)}{\mathrm{F}(x)} < \mathrm{A} + \varepsilon + \frac{k}{\mathrm{F}(x)}, \quad \frac{f(x)}{\mathrm{F}(x)} > \mathrm{A} - \varepsilon - \frac{k}{\mathrm{F}(x)}.$$

Lorsque x tend vers a, $k : \mathrm{F}(x)$ a pour limite zéro, et comme ε est une quantité arbitrairement petite, $f(x) : \mathrm{F}(x)$ finira par différer de A aussi peu qu'on le voudra ou aura pour limite A.

On démontrerait comme plus haut que le théorème subsiste si x tend vers a en décroissant, ou si $\mathrm{A} = \pm \infty$, ou enfin si $a = \infty$.

Nous sommes donc ramenés pour rechercher des vraies valeurs des fonctions qui se présentent sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$, à la même règle que pour celles de la forme $\frac{0}{0}$, mais elle paraît ici sans usage, car d'après la remarque VII du N° **92**, la dérivée tend généralement vers l'infini en même temps que la fonction pour une valeur finie de la variable. Le rapport $f'(x) : \mathrm{F}'(x)$ se présentera donc aussi sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$, et de même $f''(x) : \mathrm{F}''(x)$, etc... Mais on pourra souvent effectuer, sur le rapport des dérivées du premier ou du second ordre, des simplifications qui permettront de trouver sa limite et par suite celle de $f(x) : \mathrm{F}(x)$.

Par exemple, pour $x = 0$, l. x et cot x sont infinis. On a donc

$$\lim_{x=0} \frac{\mathrm{l}.\,x}{\cot x} = \lim\left(\frac{1}{x} : -\frac{1}{\sin^2 x}\right) = -\lim \frac{\sin^2 x}{x} = -\lim \frac{\sin x}{x} \cdot \sin x = 0.$$

105. Si $f(a) = 0$, $\mathrm{F}(a) = \pm \infty$, le produit $f(x) \cdot \mathrm{F}(x)$ se présente sous la forme $0 \cdot \infty$, pour $x = a$. Pour trouver sa vraie valeur, on écrit

$$f(x) \,.\, \mathrm{F}(x) = \frac{f(x)}{\mathrm{F}(x)^{-1}} = \frac{\mathrm{F}(x)}{f(x)^{-1}};$$

ces deux dernières expressions affectent, l'une la forme $\frac{0}{0}$, l'autre la

forme $\frac{\infty}{\infty}$, et l'on détermine leur limite par l'une des règles données ci-dessus.

Exemple: $f(x) = \sin x$, $F(x) = \text{l.} \sin^2 x$, pour $x = m\pi$, m étant entier. On trouvera successivement

$$\lim_{x=m\pi} (\sin x \,\text{l.} \sin^2 x) = \lim \frac{\text{l.} \sin^2 x}{(\sin x)^{-1}} = \lim \left[\frac{2 \sin x \cos x}{\sin^2 x} : -\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right]$$
$$= -\lim (2 \sin x) = -2 \sin m\pi = 0.$$

106. Si $f(a) = \infty$, $F(a) = \infty$, la fonction $f(x) - F(x)$ a la forme $\infty - \infty$ pour $x = a$. On met les fonctions $f(x)$, $F(x)$ sous la forme $1 : \varphi(x)$, on réduit au même dénominateur, et l'on est ramené à la forme $\frac{0}{0}$ et à la première règle. Soient

$$a = 0, \quad f(x) = \frac{1}{x}, \quad F(x) = \cot x,$$

on a

$$\lim_{x=0} \left(\frac{1}{x} - \cot x\right) = \lim \frac{\sin x - x \cos x}{x \sin x} = \lim \frac{x \sin x}{\sin x + x \cos x} = 0.$$

107. Considérons enfin la fonction $F(x)^{f(x)}$. Si l'on a $f(a) = 0$, $F(a) = 0$; ou $f(a) = 0$, $F(a) = \infty$; ou $f(a) = \pm \infty$, $F(a) = 1$, la fonction prend, pour $x = a$, l'une des formes 0^0, ∞^0, 1^∞. On posera

$$\varphi(x) = \text{l.}\, F(x)^{f(x)} = f(x) \,\text{l.}\, F(x),$$

et $\varphi(a)$ aura, dans les trois cas, la forme $0 \cdot \infty$. La règle du N° **105** fournira sa vraie valeur, et par suite la limite de $F(x)^{f(x)}$.

Exercices.

Formes $\frac{0}{0}$.

1. $$\lim_{x=2a} \frac{x^3 - 4ax^2 + 5a^2x - 2a^3}{x^3 - 3a^2x - 2a^3} = \frac{1}{9}.$$

2. $$\lim_{x=1} \frac{1 - (m+1)x^m + mx^{m+1}}{(1-x)^2} = \frac{m(m+1)}{2}.$$

3. $$\lim_{x=0} \frac{\sqrt{a^2 + ax + x^2} - \sqrt{a^2 - ax + x^2}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}} = \sqrt{a}.$$

4. $$\lim_{x=0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x} = 1.$$

5. $$\lim_{x=0} \frac{l(1 + x + x^2) + l(1 - x + x^2)}{\sec x - \cos x} = 1.$$

6. $$\lim_{x=1} \frac{x^x - 1}{x^m + x^n \, l x - 1} = \frac{1}{m+1}.$$

7. $$\lim_{x=0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^2(e^x - 1)} = \frac{1}{6}.$$

8. $$\lim_{x=0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = -\frac{e}{2}.$$

9. $$\lim_{x=0} \frac{x \sin(\sin x) - \sin^2 x}{x^6} = \frac{1}{18}.$$

10. $$\lim_{x=0} \frac{\operatorname{tg} ax - ax}{\operatorname{tg} bx - bx} = \frac{a^3}{b^3}.$$

11. $$\lim_{x=0} \frac{x^x - 1}{x \, l.x} = 1.$$

Formes $\frac{\infty}{\infty}$.

12. $$\lim_{x=\infty} \frac{l.(a + be^x)}{\sqrt{\alpha + \beta x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\beta}}.$$

Formes $(\infty - \infty)$.

13. $$\lim_{x=0} \left(\frac{1}{x^2} - \cot^2 x \right) = \frac{2}{3}.$$

14. $$\lim_{x=0} \frac{2 + \cos x}{x^3 \sin x} - \frac{3}{x^4} = \frac{1}{60}.$$

15. $$\lim_{x=0} \left[\frac{1}{x(1+x)} - \frac{l(1+x)}{x^2} \right] = -\frac{1}{2}.$$

16. $$\lim_{x=0} \frac{\pi x - 1}{2x^2} + \frac{\pi}{x(e^{2\pi x} - 1)} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Formes $(0 \times \infty)$.

17. $$\lim_{x=+0} x^{\alpha}(lx)^n = 0, \quad (\alpha > 0,\ n \text{ entier}).$$

18. $$\lim_{x=+0} x e^{\frac{1}{x}} = \infty.$$

19. $$\lim_{x=\infty} x\,\mathrm{l.}\left(\frac{x-a}{x+a}\right) = -2a.$$

FORMES 0^0, ∞^0, etc.

20. $$\lim_{x=+0} x^x = 1.$$

21. $$\lim_{x=\infty} (a+bx^m)^{\frac{1}{\alpha+\beta \mathrm{l}.x}} = e^{\frac{m}{\beta}}; \quad (m>0).$$

22. $$\lim_{x=\frac{\pi}{4}} (\mathrm{tg}\, x)^{\mathrm{tang}\, 2x} = \frac{1}{e}.$$

23. $$\lim_{x=\infty} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 1.$$

24. $$\lim_{x=0} (\cos ax)^{\frac{1}{\sin^2 bx}} = e^{-\frac{a^2}{2b^2}}.$$

CHAPITRE VI.

APPLICATIONS ANALYTIQUES (*suite*). — FORMULE DE TAYLOR.

§ 1. SÉRIES ORDONNÉES SUIVANT LES PUISSANCES ASCENDANTES D'UNE VARIABLE.

108. Lorsqu'une série

(1) $$u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots$$

dont le terme général u_n est fonction de x, est convergente pour toute valeur de x appartenant à une intervalle (a, b), la somme s de la série est elle-même, en général, une fonction de x. Pour chacune de ces valeurs de x, il existe un nombre N tel que la différence $s - s_n = R_n$ (**26**) soit, pour tout nombre $n \geqslant N$, plus petite en valeur absolue qu'une quantité donnée arbitrairement ε. Mais ce nombre N dépend à la fois de ε et de x et peut même croître indéfiniment, pour une valeur donnée de ε, lorsque x s'approche d'une limite déterminée.

Nous dirons que la série (1) est *équiconvergente* dans l'intervalle (a, b) lorsque, si petit que soit donné ε, on peut assigner un nombre N tel que l'on ait VA $R_n < \varepsilon$ pour toute valeur de x dans l'intervalle (a, b) si n est égal ou supérieur à N.

109. Théorème I. — *Une série est équiconvergente dans un intervalle* (a, b) *lorsque, dans tout cet intervalle, ses termes sont, en valeur absolue, égaux ou inférieurs au termes de même rang d'une série convergente à termes constants et positifs*

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots$$

En effet, soit R'_n le reste de cette dernière série. Pour toute valeur de $x \geqslant a$ et $\leqslant b$ on a, par hypothèse,

$$\mathrm{VA}\,(s_{n+p} - s_n) \leqslant (a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+p-1}) < R'_n,$$

et, puisque p est arbitrairement grand,

$$\mathrm{VA}\,(s - s_n) = \mathrm{VA}\,R_n \leqslant R'_n.$$

Si donc, ε étant donné, on détermine N de façon que R'_N soit $< \varepsilon$, *a fortiori* on aura, pour toute valeur de x dans l'intervalle (a, b), R_n moindre que ε en valeur absolue, pour $n \geqslant N$.

Exemples. — La série

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \ldots n} + \cdots$$

est équiconvergente dans un intervalle fini quelconque (a, b) ; car, soit r un nombre fixe aussi grand qu'on le veut; la série

$$\Sigma \frac{r^n}{1 \cdot 2 \ldots n}$$

est convergente, le rapport $u_{n+1} : u_n$ (**33**) ayant pour limite zéro.

De même, la série $\Sigma(a_n \sin b_n x)$, dans laquelle $b_1, b_2, \ldots b_n, \ldots$ sont des constantes et Σa_n une série convergente à termes positifs, est équiconvergente dans toute intervalle assigné à x.

Considérons maintenant la série $(x \geqslant 0)$

$$\Sigma \frac{x}{(1+nx)(1+\overline{n+1}x)} = \frac{x}{1(1+x)} + \frac{x}{(1+x)(1+2x)} + \frac{x}{(1+2x)(1+3x)} + \cdots$$

Le décomposition

$$\frac{x}{(1+nx)(1+\overline{n+1}x)} = \frac{1}{1+nx} - \frac{1}{1+(n+1)x}$$

donne ici

$$s_n = 1 - \frac{1}{1+nx}.$$

Si x est > 0, s_n a pour limite l'unité quand n tend vers l'infini, la somme de la série est donc l'unité. Mais, pour $x = 0$, quel que soit n, on a $s_n = 0$, donc $s = 0$. La somme de la série est donc fonction discontinue de x pour $x = 0$.

Cela posé, pour $x > 0$, on a

$$R_n = \frac{1}{1 + nx};$$

si x varie dans un intervalle (a, b) ne comprenant pas zéro, on aura toujours

$$x \geqslant a, \quad \frac{1}{1+nx} \leqslant \frac{1}{1+na},$$

et si l'on détermine N de manière que cette dernière fraction soit moindre qu'une quantité donnée ε pour $n = N$, on aura $R_n < \varepsilon$ pour toute valeur de $n > N$, x étant compris dans l'intervalle (a, b). La série est donc équiconvergente dans cet intervalle. Mais si l'on suppose $a = 0$, quelque grand que soit n, on pourra attribuer à x des valeurs telles que nx soit très petit, et par suite $R_n > \varepsilon$. La série n'est donc pas équiconvergente dans un intervalle $(0, b)$.

110. Théorème. II. — *Une série dont le terme général u_n est fonction continue de x dans un intervalle (a, b) et qui est équiconvergente dans cet intervalle, a pour somme une fonction continue de x.*

De l'équation $s = s_n + R_n$ on déduit, pour un accroissement h de x,

$$\Delta s = \Delta s_n + \Delta R_n.$$

Soit ε une fraction arbitrairemet petite donnée. Si l'on prend n suffisamment grand pour que $\text{VA}\,R_n$ soit $< \varepsilon$ pour toute valeur de x dans l'intervalle (a, b), on aura, quelque petit que soit h, $\text{VA}\,\Delta R_n < 2\varepsilon$. D'autre part, n étant invariable, $s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$ est une fonction continue de x dans l'intervalle (a, b), on peut donc prendre h assez petit pour que s_n varie d'une quantité moindre que ε, on aura $\text{VA}\,\Delta s_n < \varepsilon$. On a donc

$$\text{VA}\,\Delta s < 3\varepsilon,$$

et puisque ε peut être pris aussi petit qu'on le veut, s est fonction continue de x.

111. On appelle *série potentielle* toute série ordonnée suivant les puissances entières, positives et croissantes d'une variable x ou de la forme

(2) $$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots,$$

les coefficientes $a_0, a_1, \dots a_n, \dots$ étant des constantes positives ou négatives. Ces séries jouissent de propriétés spéciales dont voici les plus importantes.

Théorème. III. — *Si pour une valeur positive r_1 de x, le terme général $a_n x^n$ ne peut jamais surpasser en valeur absolue un nombre fixe, la série* (2) *sera absolument convergente pour toute valeur de x numériquement moindre que r_1.*

Posons $\alpha_n = \text{VA}\, a_n$, $r = \text{VA}\, x$. La série à termes positifs

$$1 + \frac{r}{r_1} + \frac{r^2}{r_1^2} + \cdots + \frac{r^n}{r_1^n} + \cdots$$

est convergente, comme on sait, pour $r < r_1$. Donc, d'après le théorème du N° **31**, puisque $\alpha_n r_1^n$ ne peut pas surpasser un nombre fixe, la série obtenue en multipliant les termes de la précédente respectivement par $\alpha_0, \alpha_1 r_1, \alpha_2 r_1^2, \dots, \alpha_n r_1^n$, savoir

$$\alpha_0 + \alpha_1 r + \alpha_2 r^2 + \cdots + \alpha_n r^n + \cdots$$

sera encore convergente, ce qui (**40**) entraîne la convergence absolue de la série (2).

Ainsi la série

$$1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n}x^n + \cdots$$

est absolument convergente si $\text{VA}\, x < 1$, car, pour $x = 1$, on a, quel que soit n,

$$\frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} < 1.$$

112. Il suit de là que, pour déterminer l'intervalle de convergence de la série potentielle (2), on supposera que x croisse à partir de zéro, on cherchera la plus grande valeur r_1 de x pour laquelle l'expression $\alpha_n r_1^n$ ne croît pas indéfiniment avec n, ou du moins la *limite supérieur* r_1 des valeurs de x qui remplissent cette condition. La série (2) sera absolument convergente si $-r_1 < x < r_1$; elle sera divergente si $x < -r_1$ ou si $x > r_1$, car le terme général croîtra indéfiniment en valeur absolue. Pour $x = \pm r_1$, elle sera tantôt convergente, tantôt divergente.

Ainsi, la série $\sum \frac{x^n}{1 \cdot 2 \dots n}$ est absolument convergente pour toute valeur de x ; la série

$$1 + x + 1 \cdot 2 x^2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 x^3 + \cdots$$

est divergente pour toute valeur de x, sauf $x = 0$. La série

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \pm \frac{x^n}{n} \mp \cdots$$

est absolument convergente si l'on a $-1 < x < 1$; elle est divergente si VA $x > 1$, car l'unité est la plus grande valeur de x pour laquelle $x^n : n$ ne croît pas indéfiniment avec n (**24**). Pour $x = 1$, la série est convergente (**41**), pour $x = -1$, elle est divergente (**36**). L'intervalle de convergence de cette série est donc $(-1 + 0, +1)$.

113. Théorème IV. — *La série* (2) *est équiconvergente dans l'intervalle* $(-\rho, +\rho)$, ρ *désignant un nombre déterminé quelconque inférieur à* r_1, *et elle a pour somme dans cet intervalle une fonction continue* s *de* x.

En effet, d'après le théorème précédent, la série

$$\alpha_0 + \alpha_1\rho + \alpha_2\rho^2 + \cdots + \alpha_n\rho^n + \cdots$$

est convergente; donc, d'après le théorème I, la série (2) est équiconvergente dans l'intervalle $(-\rho, +\rho)$. Il suit alors du théorème II que la somme s de cette série est fonction continue de x dans l'intervalle $(-\rho, +\rho)$, puisque x_n est une fonction continue.

Mais cette démonstration ne prouve pas que la somme s est une fonction continue de x dans l'intervalle $(-r_1, +r_1)$, et il faut ici recourir au

114. Théorème V (Abel). — *Si la série* (2) *est convergente pour une valeur* x_1 *de* x, *elle est convergente pour toute valeur de* x *numériquement moindre que* x_1, *et a pour somme une fonction continue de* x *dans l'intervalle* $(0, x_1)$.

Soit $r_1 =$ VA x_1 ; d'après l'hypothèse, il est impossible que $\alpha_n r_1^n$ croisse indéfiniment avec n ; la série est donc convergente, d'apès le théorème III, pour toute valeur de $r < r_1$, ce qui démontre la première partie de la proposition.

Ensuite, nous avons

$$s_{n+p} - s_n = a_n x^n + a_{n+1}x^{n+1} + \cdots + a_{n+p-1}x^{n+p-1}$$
$$= \left(\frac{x}{x_1}\right)^n \left[a_n x_1^n + \frac{x}{x_1} a_{n+1} x_1^{n+1} + \cdots + \left(\frac{x}{x_1}\right)^{p-1} a_{n+p-1} x_1^{n+p-1}\right].$$

La série étant convergente pour $x = x_1$, on peut supposer n assez grand pour que l'on ait toujours, quel que soit p,

$$\text{VA}\,(a_n x_1^n + a_{n+1}x_1^{n+1} + \cdots + a_{n+p-1}x_1^{n+p-1}) < \varepsilon,$$

ε étant pris aussi petit qu'on le veut. Si x est compris entre o et x_1, les facteurs

$$1, \quad \frac{x}{x_1}, \quad \left(\frac{x}{x_1}\right)^2, \cdots \left(\frac{x}{x_1}\right)^{p-1}$$

sont positifs et décroissants; le lemme du N° **42** donne donc

$$\text{VA}\,(s_{n+p} - s_n) < \left(\frac{x}{x_1}\right)^n \varepsilon,$$

et comme p peut croître indéfiniment

$$\text{VA}\,(s - s_n) = \text{VAR}_n \leqq \left(\frac{x}{x_1}\right)^n \varepsilon.$$

La série est donc équiconvergente dans l'intervalle (o, x_1) et a pour somme une fonction continue $f(x)$ de x dans cet intervalle. Donc, *lorsque x tendra vers la limite x_1, $f(x)$ aura pour limite $f(x_1)$.*

Ainsi la série

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \pm \frac{x^n}{n} \mp \cdots$$

étant convergente pour $x = +1$, est convergente dans l'intervalle (o, + 1), et si $f(x)$ désigne la somme de cette série, on aura

$$\lim_{x=1} f(x) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

115. THÉORÈME VI. — *Deux séries potentielles*

(3) $$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots, \quad b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots,$$

ordonnées suivant les puissances d'une même variable x, et dont les sommes sont égales pour toute valeur de x qui assure la convergence des séries, sont identiques terme pour terme.

Soit $(-\rho, +\rho)$ un intervalle dans lequel les deux séries (3) soient convergentes. Les sommes des deux séries seront des fonctions continues de x dans cet intervalle.

Faisons tendre x vers la limite zéro ; la première somme aura pour limite a_0, la seconde b_0; donc, ces sommes étant constamment égales, on aura (**20**)

$$a_0 = b_0.$$

Retranchons des sommes $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ et $b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots$ respectivement ces quantités égales, et divisons par x, nous aurons

$$a_1 + a_2x + a_3x^2 + \cdots = b_1 + b_2x + b_3x^2 + \cdots$$

Faisons tendre x vers zéro et appliquons le même raisonnement, nous aurons

$$a_1 = b_1,$$

et ainsi de suite. On aura, en général, $a_n = b_n$, et les deux séries sont identiques.

Il suit de là qu'*une fonction $f(x)$ ne peut être développée en série potentielle que d'une seule manière.*

§ 2. FORMULES DE TAYLOR ET DE MACLAURIN.

116. La formule de Taylor a pour objet le développement d'une fonction de $x + h$ en série convergente ordonnée suivant les puissances de h.

La fonction $f(x)$ étant supposée continue ainsi que ses $n - 1$ premières dérivées $f'(x)$, $f''(x)$, ... $f^{n-1}(x)$ dans un intervalle (a, b), tandis que la dérivée $n^{ième}$ $f^n(x)$ est simplement *déterminée* dans l'intervalle $(a + 0, b - 0)$, posons $b = a + h$ et développons $f(b)$ suivant les puissances entières de h comme si $f(x)$ était une fonction entière de degré $n - 1$, en complétant l'égalité par un terme $R_n = h^p P$, où p est supposé > 0 et $< n$, tandis que P est une quantité inconnue à déterminer. Nous aurons donc

$$\text{(A)} \quad f(b) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)} f^{n-1}(a) + h^p P.$$

Pour déterminer P, désignons par x une quantité qui varie dans l'intervalle (a, b) et posons

$$\varphi(x) = f(x) + (b - x) f'(x) + \frac{(b-x)^2}{1 \cdot 2} f''(x) + \cdots$$
$$+ \frac{(b-x)^{n-1}}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)} f^{n-1}(x) + (b-x)^p P.$$

On verra immédiatement 1° que $\varphi(x)$ a une dérivée déterminée dans l'intervalle $(a + 0, b - 0)$, en vertu des propriétés attribuées à la fonction $f(x)$, et que cette dérivée se réduit, P étant indépendant de x, à

$$\varphi'(x) = \frac{(b-x)^{n-1}}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)} f^n(x) - p(b-x)^{p-1} P;$$

2° que pour $x = a$, on a, à cause de $b - a = h$ et de l'équation (A), $\varphi(a) = f(b)$; 3° que pour $x = b$ on a $\varphi(b) = f(b)$, donc

$$\varphi(b) - \varphi(a) = 0.$$

Appliquons le théorème de M. O. Bonnet, et désignons par θ une quantité inconnue > 0 et < 1 ; nous aurons $\varphi'(a + \theta h) = 0$, ou, d'après la valeur de $\varphi'(x)$,

$$\frac{h^{n-1}(1-\theta)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^n(a+\theta h) - ph^{p-1}(1-\theta)^{p-1}P = 0,$$

ce qui donne pour l'expression du terme complémentaire h^pP,

(1) $$R_n = \frac{h^n(1-\theta)^{n-p}}{1.2\ldots(n-1)p} f^n(a+\theta h), \quad (0 < \theta < 1).$$

Cette quantité R_n est ce qu'on nomme le *reste* de la série de Taylor. On se sert surtout des deux cas $p = n$, $p = 1$, qui donnent les formules particulières

(2) $$R_n = \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^n(a+\theta h),$$

(3) $$R_n = \frac{h^n(1-\theta)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^n(a+\theta h).$$

La quantité θ reste inconnue, elle dépend de n et n'a pas la même valeur dans les formules (2) et (3), mais elle est toujours > 0 et < 1. Si l'on remplace b par $a + h$, l'équation (A) deviendra

(4) $$\left\{\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{1.2}f''(a) + \cdots \\ &+ \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{n-1}(a) + R_n. \end{aligned}\right.$$

Supposons maintenant que l'on attribue à n des valeurs indéfiniment croissantes, et que, d'une part, les conditions imposées aux dérivées successives de $f(x)$ ne cessent pas d'être remplies ; d'autre part, R_n ait pour limite zéro. La somme des n premiers termes du second membre de l'équation (4) aura nécessairement pour limite $f(a+h)$, en sorte que l'on aura le développement cherché de $f(a+h)$ en série convergente suivant les puissances entières, positives et croissantes de h. C'est là proprement la série de Taylor.

117. *Remarques.* 1° La fonction $f(a+h)$ ne peut être développée en série suivant les puissances entières de h que par la formule (4), d'après le théorème du N° **115**.

2° La série indéfinie de Taylor ne peut être employée qu'après qu'on s'est assuré que $\lim_{n=\infty} R_n = 0$. Cette condition est toujours remplie lorsque pour des valeurs indéfiniment croissantes de n, $\text{ᗅ} f_n(x)$ finit par rester moindre qu'un nombre fixe A dans l'intervalle $(a, a+h)$. En effet, on a remarqué (**112**) que la série

$$\Sigma \frac{h^n}{1 . 2 \ldots n}$$

est absolument convergente pour toute valeur de h, son terme général tend donc vers zéro, quel que soit h, lorsque n devient infini. Donc

$$\text{ᗅ} R_n < \text{ᗅ} \frac{h^n}{1 . 2 \ldots n} A$$

aura pour limite zéro.

3° Si l'on sait déterminer la limite maximum A et la limite minimum B de la fonction $f^n(x)$ dans l'intervalle (a, b), on aura

$$R_n = \mathcal{M}\left(\frac{h^n}{1 . 2 \ldots n} A, \frac{h^n}{1 . 2 \ldots n} B\right);$$

on connaîtra donc deux limites entre lesquelles est comprise l'erreur que l'on commet en arrêtant la série de Taylor après le $n^{ième}$ terme.

118. *Série de Maclaurin.* — On écrit la formule de Taylor sous diverses formes. En représentant la fonction $f(x)$ par y, en marquant par l'indice la valeur de la variable à laquelle la fonction se rapporte, on a

$$(5) \left\{ \begin{aligned} y_{a+h} = y_a + \left(\frac{dy}{dx}\right)_a h + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_a \frac{h^2}{1 . 2} + \cdots + \left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)_a \frac{h^{n-1}}{1 . 2 \ldots (n-1)} \\ + \left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_{a+\theta h} . \frac{h^n}{1 . 2 \ldots n} . \end{aligned} \right.$$

Si, dans l'équation (4), on remplace $a + h$ par x, h par $x - a$, elle devient

$$(6) \left\{ \begin{aligned} f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1 . 2} f''(a) + \cdots \\ + \frac{(x-a)^{n-1}}{1 . 2 \ldots (n-1)} f^{n-1}(a) + R_n, \end{aligned} \right.$$

et si l'on choisit comme cas particulier $a = 0$,

$$(7)\ f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{1 . 2} f''(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{1 . 2 \ldots (n-1)} f^{n-1}(0) + R_n.$$

Cette formule est celle de Maclaurin, et d'après les principes sur lesquels elle est fondée, elle suppose 1° que $f(x)$, $f'(x)$, ... $f^{n-1}(x)$ soient des fonctions continues dans l'intervalle $(0, x)$; 2° que $f^n(x)$ soit déterminée dans l'intervalle $(+0, x-0)$, si $x > 0$. Elle sert au développement de $f(x)$ en série suivant les puissances acendantes de x, à la condition que l'on ait $\lim\limits_{n=\infty} R_n = 0$. Or, l'expression de R_n, déduite des formules (2) et (3) en faisant $a = 0$, $h = x$, sera

(8) $$R_n = \frac{x^n}{1.2\ldots n} f^n(\theta x),$$

ou

(9) $$R_n = \frac{x^n(1-\theta)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^n(\theta x).$$

On emploie l'une ou l'autre forme suivant les cas. Les remarques faites plus haut sont applicables; ainsi R_n tend vers zéro lorsque $f^n(x)$ est constamment moindre qu'un nombre fixe dans l'intervalle $(0, x)$; le développement n'est possible que d'une seule manière, etc...

§ 3. APPLICATIONS.

119. Posons $f(x) = A^x$. D'après la formule connue (**93**, III), on a $f^n(x) = A^x (1. A)^n$. La fonction et ses dérivées jusqu'à un ordre quelconque sont continues dans tout intervalle. Les formules (7) et (8) donnent

$$A^x = 1 + x\, 1.A + \frac{x^2(1.A)^2}{1.2} + \cdots + \frac{x^{n-1}(1.A)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} + \frac{x^n(1.A)^n}{1.2\ldots n} A^{\theta x}.$$

D'après la remarque déjà faite, $(x\, 1.A)^n : 1.2 \ldots n$ a pour limite zéro quand n devient infini; $A^{\theta x}$ a une valeur comprise entre 0 et A^x; donc $\lim\limits_{n=\infty} R_n = 0$, et l'on a en série convergente, pour toute valeur de x,

$$A^x = 1 + x\, 1.A + \frac{(x\, 1.A)^2}{1.2} + \frac{(x\, 1.A)^3}{1.2.3} + \cdots$$

Si l'on prend $A = e$, on a $1.A = 1$ et

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots$$

Pour $x = 1$, on en déduit cette série propre au calcul du nombre irrationnel e :

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \cdots$$

120. Pour $f(x) = \sin x$ on a $f^n(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$, dérivée toujours continue et numériquement $\leqslant 1$, quel que soit n. La formule de Maclaurin s'applique et l'on a

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2\ldots5} - \frac{x^7}{1.2\ldots7} + \cdots$$

Pour évaluer l'erreur maximum, on a la formule

$$\text{VA}\,R_n = \text{VA}\,\frac{x^n}{1.2\ldots n}\sin\left(\theta x + \frac{n\pi}{2}\right) \leqslant \text{VA}\,\frac{x^n}{1.2\ldots n}.$$

On trouve de même, en série convergente dans toute intervalle de x, la formule

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2\ldots6} + \cdots$$

Il est à peine nécessaire d'ajouter que les séries qui représentent e^x, $\cos x$, $\sin x$ sont équiconvergentes et absolument convergentes dans tout intervalle.

121. *Fonction logarithmique.* — La fonction $\mathrm{l}.\,x$ n'est pas développable par la série de Maclaurin. Nous développerons donc la fonction $f(x) = (1 + x)\,\mathrm{l}.\,(1 + x)$, qui donne

$$f'(x) = 1 + \mathrm{l}.(1 + x), \quad f''(x) = \frac{1}{1 + x}, \quad f'''(x) = -\frac{1}{(1 + x)^2}, \ldots$$

$$f^n(x) = (-1)^{n-2}\,\frac{1.2\ldots(n-2)}{(1 + x)^{n-1}}.$$

La fonction et toutes ses dérivées sont continues dans l'intervalle $(-1 + 0, \infty)$. Développons par la formule (7) jusqu'au terme de rang $n + 1$, nous aurons en faisant usage de la forme (9) pour R_{n+1},

$$(1+x)\,\mathrm{l}.(1+x) = x + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{2.3} + \cdots \pm \frac{x^n}{(n-1)n} \mp \frac{x^{n+1}}{n}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n.$$

Soit $r = \text{VA}\,x$. La série qui a pour terme général $x^n : (n-1)\,n$ est divergente si $r > 1$, d'après la règle du N° **33**. Nous n'avons donc à considérer que le cas où $r \leqslant 1$. Or, on a dans ce cas

$$1 + \theta x \geqslant 1 - \theta r \geqslant 1 - \theta, \quad \text{donc} \quad \text{VA}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n \leqslant 1,$$

et par suite

$$\mathrm{VA}\,R_{n+1} < \frac{1}{n},$$

qui tend vers zéro lorsque n croît indéfiniment. On a donc en série convergente, pour toute valeur de x dans l'intervalle $(-1, +1)$,

$$(1+x)\,\mathrm{l.}\,(1+x) = x + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{3.4} - \cdots$$

Le second membre peut s'écrire sous la forme

$$x + \frac{x^2}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^4}{4} \cdots = (1+x)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\right)$$

et *si x n'est pas égal à* -1, ont peut diviser les deux membres de l'égalité ci-dessus par $1+x$ et l'on a

$$\mathrm{l.}\,(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

Cette formule est donc démontrée pour toute valeur de x dans l'intervalle $(-1+0, +1)$. Pour $x = 1$ elle donne

$$\mathrm{l.}\,2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

122. Si, dans cette formule, on change x en $-x$, on a la suivante, valable si $\mathrm{VA}\,x < 1$:

$$\mathrm{l.}\,(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots;$$

d'où, retranchant,

$$\mathrm{l.}\,(1+x) - \mathrm{l.}\,(1-x) = \mathrm{l.}\,\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right).$$

Posant

$$x = \frac{p-q}{p+q}, \quad \text{d'où} \quad \frac{p}{q} = \frac{1+x}{1-x},$$

et supposant p, q choisis de façon que l'on ait $\mathrm{VA}\,x < 1$, on pourra appliquer cette série et l'on aura

$$\mathrm{l.}\,p = \mathrm{l.}\,q + 2\left[\frac{p-q}{p+q} + \frac{1}{3}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^5 + \cdots\right].$$

Si $p - q$ est très petit et $p + q$ très grand, la série convergera rapidement. Ainsi, pour $p = 2$, $q = 1$, on a

$$\text{l. } 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5} + \cdots\right).$$

Si l'on fait $p = 10$, $q = 8$, on a

$$\text{l. } 10 = \text{l. } 5 + \text{l. } 2 = 3\,\text{l. } 2 + 2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{9^5} + \cdots\right).$$

Pour $p = 128$, $q = 125$, on a

$$\text{l. } 128 = 3\,\text{l. } 5 + 2\left(\frac{3}{253} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3^3}{253^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{3^5}{253^5} + \cdots\right)$$

et comme $\text{l. } 128 = \text{l. } 2^7 = 7\,\text{l. } 2$, on en tirera la valeur de l. 5. Et ainsi de suite.

On passera de ces logarithmes népériens aux log. vulgaires en les multipliant par $(\text{l. } 10)^{-1}$ dont la valeur est fournie par la seconde des séries précédentes.

123. *Formule du binôme.* — Proposons-nous de développer par la formule de Maclaurin la fonction $(1 + x)^m$, m étant une constante réelle quelconque. On a donc

$$f(x) = (1 + x)^m,\ f'(x) = m(1 + x)^{m-1},\ f''(x) = m(m - 1)(1 + x)^{m-2},$$
$$f^n(x) = m(m - 1)\cdots(m - n + 1)(1 + x)^{m-n}.$$

Toutes ces dérivées sont continues dans l'intervalle $(-1 + 0, \infty)$. On a donc, par la formule (7),

$$(\alpha)\quad (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)}{1.2\ldots(n-1)}x^{n-1} + R_n.$$

Désignant par u_n le terme qui en a n avant lui, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{m - n + 1}{n}x,\quad \lim_{n=\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = -x.$$

Donc (**40**) la série est convergente si $\text{Mod}\,x < 1$, divergente si $\text{Mod}\,x > 1$. Dans le premier cas, on a par la formule (9)

$$R_n = \frac{x^n(1 - \theta)^{n-1}}{1.2\ldots(n - 1)}m(m - 1)\ldots(m - n + 1)(1 + \theta x)^{m-n}$$
$$= \frac{m(m - 1)\ldots(m - n + 1)}{1.2\ldots(n - 1)}x^n \times (1 + \theta x)^{m-1} \times \left(\frac{1 - \theta}{1 + \theta x}\right)^{n-1}.$$

Le premier facteur devient zéro pour n infini, car c'est le terme général d'une série qui est convergente si $\text{V}\!\text{A}\, x < 1$. Le deuxième ne peut croître indéfiniment, même si $m - 1 < 0$, car on a

$$1 + \theta x \geqslant 1 - \theta x > 1 - x.$$

Le troisième facteur ne peut surpasser l'unité comme on l'a vu plus haut (**121**). R_n a donc pour limite zéro et la série

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}x^n + \cdots$$

est applicable par toute valeur numérique de x moindre que l'unité.

Lorsque $\text{V}\!\text{A}\, x > 1$, la série est divergente, sauf le cas où m est entier et positif. En effet, dans ce cas, $f^n(x)$ s'annule et avec lui R_n, pour $n > m$. La formule de Maclaurin donne *exactement* le développement de $(1+x)^m$ en un polynôme ordonné suivant les puissances ascendantes de x. Signalons les cas particuliers suivants qui se rencontrent souvent :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \cdots$$

124. Si l'on pose enfin $f(x) = \text{arc tang}\, x$, on aura (**96**)

$$f^n(x) = \frac{1.2\ldots(n-1)}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}} \sin n\left(\frac{\pi}{2} + \text{arc tg}\, x\right),$$

et par suite

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1.2, \cdots$$

d'où

$$\text{arc tg}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots \pm \frac{x^{2i+1}}{2i+1} \mp \cdots$$

La série est convergente si $\text{V}\!\text{A}\, x < 1$, divergente si $\text{V}\!\text{A}\, x > 1$. Dans le premier cas on a, par la formule (8),

$$R_n = \frac{x^n}{1.2\ldots n} \cdot \frac{1.2\ldots(n-1)}{(1+\theta^2x^2)^{\frac{n}{2}}} \sin n\left(\frac{\pi}{2} + \text{arc tg}\, \theta x\right)$$

$$= \pm \frac{x^n}{n} \cdot \frac{\cos(n\, \text{arc tg}\, \theta x)}{(1+\theta^2x^2)^{\frac{n}{2}}}.$$

On a évidemment $\lim_{n=\infty} R_n = 0$; la somme de la série est donc égale à arc tg x. Pour $x = 1$,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

On se sert, pour le calcul numérique de π, d'une série plus convergente, en posant

$$z = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5}, \quad \frac{\pi}{4} = 4z - u,$$

d'où l'on tire

$$\operatorname{tg} u = \operatorname{tg}\left(4z - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg} 4z - 1}{\operatorname{tg} 4z + 1} = \frac{120 - 119}{120 + 119},$$

car, en calculant tg $4z$ en fonction de tg z, on trouve tg $4z = 120 : 119$. On a donc

$$\operatorname{tg} u = \frac{1}{239}, \quad \frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239},$$

d'où enfin, par la série ci-dessus,

$$\frac{\pi}{4} = 4\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \cdots\right] - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \cdots\right).$$

125. L'emploi de la formule de Maclaurin exige que l'on vérifie si $\lim_{n=\infty} R_n = 0$, ce qui présente des difficultés à cause de la formation de la dérivée $n^{ième}$. Aussi a-t-on recours à divers artifices.

Si l'on sait d'avance, par un moyen quelconque, que $f(x)$ est développable en série potentielle, le développement devra coïncider avec celui que fournirait la formule (7). On se bornera à former les coefficients des puissances de x, soit par la méthode des coefficients indéterminés, soit par le calcul de proche en proche de $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, ...; par exemple, comme au N° **98**.

Pour développer une fonction *composée*, comme une somme, un produit, il sera souvent plus simple de développer chacune des fonctions dont elle se compose et de combiner les séries. Soit à développer, pour $x > -1$ et < 1, la fonction

$$\frac{\mathrm{l.}(1 + x)}{1 + x}.$$

On a, dans cette hypothèse, d'après les Nos **121** et **123**,

$$\text{l.}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots,$$

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

De plus, ces séries sont absolument convergentes. On peut donc les multiplier d'après la règle donnée au N° **45**, et l'on a

$$\frac{\text{l.}(1+x)}{1+x} = x - \left(1 + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)x^3 + \cdots,$$

et cette formule sera toujours applicable dans l'intervalle $(-1+0,\ 1-0)$.

Exercices.

1. Développer $e^{ax}\cos bx$ par la formule de Maclaurin.

R. On pose $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$, et l'on trouve par l'ex. **3**, Ch. IV,

$$e^{ax}\cos bx = 1 + rx\cos\varphi + \frac{r^2x^2}{1.2}\cos 2\varphi + \frac{r^3x^3}{1.2.3}\cos 3\varphi + \cdots,$$

$$R_n = \frac{r^nx^n}{1.2\ldots n}e^{\theta ax}\cos(\theta bx + n\varphi), \quad \lim_{n=\infty} R_n = 0.$$

On développe de même $e^{ax}\sin bx$.

2. Développer $\cos(m \text{ arc sin } x)$ par la formule de Maclaurin.

R. On s'assure d'abord que la formule est applicable; on calcule les coefficients par la formule du N° **98**, et l'on a

$$\cos(m \text{ arc sin } x) = 1 - \frac{m^2x^2}{1.2} + \frac{m^2(m^2-2^2)}{1.2.3.4}x^4$$
$$- \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{1.2\ldots6}x^6 + \cdots, \quad (-1 < x < 1).$$

3. Développer $y = (\text{arc tg } x)^2$.

R. On s'assure que le développement est possible, si $-1 < x < 1$, et l'on calcule les coefficients par la relation

$$(D^{n+2}y)_0 + 2n^2(D^ny)_0 + n(n-1)^2(n-2)(D^{n-2}y)_0 = 0.$$

4. Développer arc sin x par la formule de Maclaurin.

R. On se servira de la formule de l'ex. **7**, Ch. IV, pour calculer les coefficients et vérifier si le reste tend vers zéro. On aura, pour $\text{Mod } x < 1$,

$$\text{arc sin } x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \cdots$$

5. Démontrer que, m et n étant entiers, on a

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{mn}\right) = \text{l.}\, m.$$

R. On trouve, par la formule de Taylor,

$$\text{l.}\,(n+1) - \text{l.}\,n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2(n+\theta)^2}, \quad 0 < \theta < 1,$$

et par suite

$$\text{l.}\,(mn+1) - \text{l.}\,n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{mn} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(n+\theta)^2}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{(n+1+\theta_1)^2} + \cdots + \frac{1}{(mn+\theta_p)^2}\right],$$

d'où l'on déduira facilement le résultat annoncé.

6. Développer $(1+x+x^2+a^3)^{-1}$ suivant les puissances ascendantes de x.

R. On met la fonction sous la forme $(1-x):(1-x^4)$, et, comme au N° **125**, on trouve, pour $-1 < x < 1$,

$$(1+x+x^2+x^3)^{-1} = 1 - x + x^4 - x^5 + x^8 - x^9 + \ldots$$

7. Développer $x \operatorname{arctg} x - \text{l.}\sqrt{1+x^2}$; $(-1 < x < 1)$.

R. On trouve la série convergente

$$\frac{x^2}{1.2} - \frac{x^4}{3.4} + \frac{x^6}{5.6} - \frac{x^8}{7.8} + \cdots$$

qui subsiste pour $x = +1$ ou $x = -1$.

CHAPITRE VII.

APPLICATIONS ANALYTIQUES (*suite*). — MAXIMA ET MINIMA DES FONCTIONS D'UNE SEULE VARIABLE.

126. On dit qu'une fonction simple $f(x)$ de la variable devient *maximum* pour une valeur a de x, lorsque, pour toute valeur de x dans un intervalle déterminé $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, on a constamment $f(x) < f(a)$; ou, pour toute valeur de h numériquement moindre que ε, $f(a+h) - f(a) < 0$, quel que soit le signe de h.

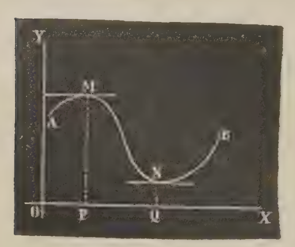


Fig. 7.

Si, au contraire, on avait $f(a+h) - f(a) > 0$, on dirait que $f(a)$ est un *minimum* de la fonction. Géométriquement, l'ordonnée de la courbe AMNB (fig. 7) figurant la fonction $f(x)$, il y aura un maximum au point M, un minimum au point N.

Une fonction peut donc admettre plusieurs maxima et plusieurs minima.

Supposons la fonction $f(x)$ continue dans le voisinage de $x = a$. Si elle admet une dérivée déterminée $f'(a) > $ ou < 0 pour $x = a$, on sait (**88**) que la différence $f(a + h) - f(a)$ sera de même signe que h dans le premier cas et de signe contraire dans le second; dans les deux cas elle changera donc de signe avec h et il n'y aura ni maximum ni minimum pour $x = a$. Donc, *pour que la fonction $f(x)$ devienne maximum ou minimum pour une valeur a de la variable, il faut, ou que $f'(a)$ soit égal à zéro, ou que $f(x)$ n'ait pas de dérivée pour $x = a$.*

127. Supposons donc que $f'(a)$ soit nul et en outre que $f'(x)$, $f''(x)$ soient des fonctions continues dans le voisinage de $x = a$. On aura par la formule de Taylor, $f'(a)$ étant nul,

$$f(a+h) - f(a) = \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(a + \theta h), \quad (0 < \theta < 1).$$

Or, h^2 est positif; $f''(a + \theta h)$ sera de même signe que $f''(a)$, supposé différent de zéro, pour des valeurs suffisamment petites de h (**63**), donc $f(a + h) - f(a)$ aura le même signe que $f''(a)$, quel que soit le signe de h. Il suit de là que $f(x)$ *sera maximum pour* $x = a$ si $f''(a)$ *est négatif, minimum si* $f''(a)$ *est positif.* Si $f''(a)$ est nul, un nouvel examen est nécessaire.

Supposons, en général, que les $n - 1$ premières dérivées de la fonction s'annulent pour $x = a$,

$$f'(a) = 0, \quad f''(a) = 0, \quad \ldots \quad f^{n-1}(a) = 0, \quad f^n(a) \gtrless 0,$$

toutes ces dérivées étant d'ailleurs continues dans le voisinage de $x = a$. Le théorème de Taylor donnera

$$f(a+h) - f(a) = \frac{h^n}{1 \cdot 2 \ldots n} f^n(a + \theta h), \quad (0 < \theta < 1),$$

et en raisonnant comme plus haut, on verra 1° que si n est impair, le second membre changera de signe avec h et il n'y aura ni maximum ni minimum pour $x = a$; 2° que si n est pair, $f(a + h) - f(a)$ sera, dans le voisinage de $h = 0$, de même signe que $f^n(a)$, en sorte que $f(a)$ sera un maximum si $f^n(a)$ est négatif, un minimum si $f^n(a)$ est positif.

La règle pour trouver les maxima et les minima d'une fonction explicite est donc celle-ci : on égalera à zéro la dérivée de la fonction, on cherchera les racines réelles de cette équation, et on les substituera dans

la dérivée seconde : si le résultat est négatif, la racine correspondra à un maximum; s'il est positif, à un minimum; s'il est nul, on recourra aux dérivées suivantes comme il est dit plus haut.

On peut se servir des différentielles au lieu des dérivées dans l'application de la règle, car $d^n f(x) = f^n(x)\, dx^n$, et le facteur dx^n étant différent de zéro, et positif lorsque n est pair, sa présence ne change rien aux résultats énoncés.

128. Prenons comme exemple la fonction

$$f(x) = x(x-a)^n;$$

n étant entier et positif, a positif, cette fonction satisfait à toutes les conditions énoncées. On trouve

$$f'(x) = (x-a)^{n-1}[(n+1)x - a], \quad f''(x) = n(x-a)^{n-2}[(n+1)x - 2a].$$

L'équation $f'(x) = 0$ admet les racines

$$x = \frac{a}{n+1}, \quad x = a.$$

La première donne

$$f''\left(\frac{a}{n+1}\right) = (-1)^{n-1}\frac{(na)^{n-1}}{(n+1)^{n-2}},$$

et répond à un maximum si n est pair, à un minimum si n est impair.

La seconde $x = a$ annule $f''(x)$ et les dérivées suivantes jusqu'à l'ordre $n-1$ inclusivement. On a ensuite, par la règle de Leibnitz (**97**),

$$f^n(x) = n(n-1)\ldots 2.1\,[(n+1)x - na], \quad f^n(a) = 1.2\ldots n.a;$$

si n est impair, la première dérivée qui ne s'annule pas étant d'ordre impair, $x = a$ ne donne ni maximum ni minimum; si n est pair, $f^n(a)$ étant positif, $f(a)$ est un minimum.

Enfin, les valeurs de la fonction qui correspondent à ces racines sont

$$f\left(\frac{a}{n+1}\right) = (-1)^n n^n \left(\frac{a}{n+1}\right)^{n+1}, \quad f(a) = 0.$$

129. Les règles ci-dessus se rapportent aux cas où $f'(x)$, $f''(x)$, ... satisfont à certaines conditions de continuité. La fonction peut admettre d'autres maxima et minima, pour des valeurs de x pour lesquelles la dérivée n'existe pas. On les reconnaît à ce que la dérivée, positive pour $x < a$, devient négative pour $x > a$, ou inversement. Dans le premier cas, la fonction $f(x)$ cesse d'être croissante pour devenir décroissante pour $x = a$, il y a maximum; dans le second cas, il y a minimum.

Ainsi, la fonction $f(x) = 1 + x^{\frac{2}{3}}$ donne $f'(x) = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}$; la dérivée ne s'annule pour aucune valeur de x, mais elle devient infinie pour $x = 0$, qui donne $f(0) = 1$. Comme $f'(x)$ est négatif pour $x < 0$, positif pour $x > 0$, $x = 0$ correspond à un minimum de $f(x)$.

De même, la fonction

$$f(x) = x \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$$

s'annule pour $x = 0$, et le rapport $f(h) : h$ a pour limite $+1$ ou -1 suivant que h est $>$ ou < 0; il n'y a pas de dérivée. Mais on voit directement que $f(h) - f(0)$ est positif, quel que soit le signe de h, donc $f(0) = 0$ est un minimum de la fonction.

Il y a quelquefois avantage à déterminer ainsi directement le signe de $f(a + h) - f(a)$ au lieu d'employer la dérivée seconde, même dans les cas où cet emploi serait légitime.

Exercices.

Trouver les max. et min. des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^5 - 75x^3 + 1620x - 1000$. *R.* $x = -6$, max., $f = -2296$; $x = -3$, min., $f = -4078$; $x = 3$, max., $f = 2078$; $x = 6$, min., $f = 296$.

2. $f(x) = \frac{(x - a)(b - x)}{abx}$. *R.* $x = \sqrt{ab}$, max.; $x = -\sqrt{ab}$, min.

3. $f(x) = 2(1 + \cos x) \cos x - \sin^2 x$. *R.* $x = 0$, max.; $x = \pi$, max.; $x = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$, min.

4. $f(x) = (2 + 3 \cos x) \sin x$. *R.* $\cos x = \frac{-1 + \sqrt{19}}{6}$, max.; $\cos x = \frac{-1 - \sqrt{19}}{6}$, min.

5. $f(x) = (1 + x^{\frac{2}{3}})(7 - x)^2$. *R.* $x = 0$, min., $f = 49$; $x = 1$, max., $f = 72$; $x = 7$, min., $f = 0$.

6. $f(x) = (a + bx)(\alpha + \beta x^2)^{-\frac{1}{2}}$. *R.* $x = \alpha b : a\beta$, min. si $a\beta > 0$, max. si $a\beta < 0$.

7. $f(x) = e^x - 2 \cos x + e^{-x}$. *R.* $x = 0$, min.; $f = 0$.

8. $f(x) = \frac{1 + 2x \operatorname{arc\,tg} x}{1 + x^2}$. *R.* $x = -1$, max.; $x = 0$, min.; $x = +1$, max.

9. $f(x) = \frac{\sin (2n + 1)x}{\sin x}$, n entier. *R.* On a pour l'équation de condition

$$(2n + 1) \sin x \cos (2n + 1)x - \sin (2n + 1)x \cos x = 0.$$

1° $x = (2i + 1)\pi : 2$, i entier quelconque, max. si n est pair, min. si n est impair; 2° $x = i\pi$, max. $f = 2n + 1$; 3° $\operatorname{tg} (2n + 1)x = (2n + 1) \operatorname{tg} x$, équation transcendante dont les racines se construisent par l'intersection de deux courbes; valeur approchée $x = (2i + 1)\pi : 2(2n + 1)$; donne alternativement des maxima et des minima (*Théorie des réseaux*).

10. Dans un levier du second genre, pesant et homogène, quel doit être le bras de levier x de la puissance Q, pour que celle-ci soit un minimum, le moment M de la résistance étant donné?

R. Soit g le poids de l'unité de longueur du levier. On trouve $gx^2 = 2M$, $Q = \sqrt{2Mg}$.

11. Couper un cône circulaire droit par un plan parallèle à la génératrice, de sorte que le segment parabolique obtenu soit un maximum.

R. Soient a le rayon de la base du cône, x la portion de ce rayon entre la génératrice et le plan sécant. On trouve $x = a : 2$.

12. Chercher, sur une droite OM, la position du point lumineux M à laquelle répond le maximum d'éclairement d'un élément plan situé en A, sachant que l'éclairement est en raison inverse du carré de la distance AM et en raison directe du sinus de l'inclinaison de AM sur le plan de l'élément éclairé.

R. Soient O le point de rencontre de la droite OM avec ce plan, $x = OM$, $a = OA$, $a_1 = OA_1$ la projection de OA sur OM. On trouve

$$x = \frac{a_1 \pm \sqrt{a_1^2 + 8a^2}}{4},$$

ce qui détermine deux points situés de part et d'autre du plan de l'élément, et qui répondent tous deux à un maximum.

13. Étant donné un prisme hexagonal régulier ABCDEFLMN... (fig. 8) on mène, par un point S pris sur l'axe, trois plans par les diagonales respectives AC, CE, EA de la base supérieure, et l'on remplace cette base par le pointement à trois faces ainsi obtenu. Démontrer que le nouveau solide a même volume que le premier, quel que soit le point S, et choisir ce point de manière que la surface totale du solide soit un minimum (*Alvéoles des abeilles*).

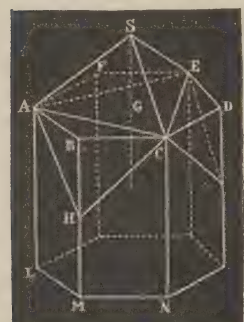


Fig. 8.

R. Appelant x l'inclinaison des faces du pointement sur la base du prisme, on trouve

$$\sin x = 3^{-\frac{1}{2}}.$$

14. Étant donné un point A dans l'intérieur d'un angle XOY, mener par ce point une droite PQ qui retranche de l'angle un triangle d'aire minimum (de Sluse).

R. Soient (a, b) les coordonnées du point A par rapport à OX, OY; $OP = x$, $OQ = y$. La fonction qui doit être un minimum est $x^2 : (x - a)$. On trouve

$$x = 2a, \quad y = 2b.$$

CHAPITRE VIII.

THÉORIE DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES.

130. On dit que deux variables indépendantes x et y varient *dans une région* T lorsque, pour chaque valeur de x appartenant à un intervalle (a, b), y admet toutes les valeurs comprises dans un certain intervalle (y', y''), y' et y'' étant, en général, des fonctions de x. Le système de valeurs (y', y'', a, b) définit le *contour* de la région T.

Tout système de valeurs (x, y) des variables appartenant à la région T se nomme *un point*. La région T est *connexe* lorsque, pour passer d'un point quelconque (x_0, y_0) de la région ou de son contour, à un autre point (x_1, y_1), il est possible de considérer x et y comme des fonctions simples et continues d'une même variable auxiliaire t qui croît d'une valeur t_0 à une valeur t_1, sans que le point (x, y) cesse d'appartenir à la région T.

131. Une variable u est *fonction* de deux variables x et y dans la région T lorsque, pour tout système déterminé de valeurs (x, y) ou pour tout point appartenant à la région T, la variable u reçoit une ou plusieurs valeurs *déterminées*. Nous supposerons ici que u soit une *fonction simple*, ou qu'à chaque point (x, y) réponde une valeur unique de u. Ainsi, $\sin(ax+by+c)$ est une fonction de x, y définie dans une région illimitée; $\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ est une fonction définie dans la région dont tous les points satisfont à la condition

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<1,$$

ou dont le contour est défini par le système de valeurs

$$y'=-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},\quad y''=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},\quad x=-a,\quad x=a.$$

Au reste, la détermination de u comporte la plus grande latitude : ainsi on peut concevoir que u soit nul pour tout système de valeurs rationnelles de x et de y, égal à l'unité pour tout système irrationnel, et égal à $1:2$ pour tout autre système, etc.

Bien que les propriétés à étudier soient indépendantes de toute figuration géométrique, nous adopterons, pour plus de clarté, la représentation des variables x et y par deux coordonnées rectangulaires dans un plan. Le système (x, y) sera figuré par un point P du plan et la région T par l'espace plan compris entre les droites $x = a$, $x = b$ parallèles à l'axe des y et les lignes droites ou courbes $y = y'$, $y = y''$, qui représenteront le contour de la région T. Tout point pris sur le contour est censé appartenir à la région, à moins qu'il n'en soit explicitement exclu. Si la région est connexe, on peut réunir deux quelconques de ses points par un trait continu qui y sera entièrement situé et la variable t sera, par exemple, le temps, ou l'arc parcouru par un point mobile sur ce trait. La fonction u serait figurée par une ordonnée élevée, normalement au plan de la région, sur le point P, et l'ensemble de ses valeurs dans la région T par le lieu géométrique des extrémités de ces ordonnées.

On démontre, sur les fonctions de deux variables, quelques propriétés qui généralisent celles du Chapitre I.

132. Théorème I. — *Si, lorsque x et y varient dans une région* T, *une fonction $u = f(x, y)$ reste comprise entre deux valeurs fixes* A *et* B, $A < B$, *elle admet une limite maximum* L *et une limite minimum* l *dans le sens défini au N°* **62**.

Donnons à x une valeur quelconque x dans l'intervalle (a, b); u devient une fonction de y seul dans l'intervalle (y', y'') qui correspond à cette valeur x, et u étant compris entre A et B, admet dans cet intervalle une limite *maximum* (**62**). Cette limite, en général, dépendra de la valeur x et nous la désignerons, pour cette raison, par $L(x)$. Le raisonnement s'applique à toute valeur de x dans l'intervalle (a, b). La fonction $L(x)$ de x est elle-même comprise, nécessairement, entre A et B; donc, lorsque x varie de a à b, elle admet à son tour une limite maximum L laquelle jouira, par rapport au système des valeurs que $u = f(x, y)$ peut acquérir dans la région T, de toutes les propriétés de la limite maximum définie au N° **62**.

On démontrerait de même l'existence de la limite minimum l. L'excès $L - l$ de la limite maximum sur la limite minimum est ce qu'on nomme *l'oscillation* de la fonction $f(x, y)$ dans la région T.

133. Une région T est *partagée en deux ou plusieurs autres* T′, T″, ... lorsque 1° tout point de la région T appartient à l'une des régions T′, T″, ... et réciproquement; 2° lorsqu'aucun point ne peut appartenir à

deux des régions T', T'', .. à moins qu'il n'appartienne à leur contour. Si l'on trace un système de lignes droites, par exemple, de parallèles à l'axe des x ou des y, dans l'espace plan qui représente la région T, les aires dans lesquelles sera décomposé cet espace figureront des régions T', T'',... dans lesquelles T sera partagé.

Concevons que l'on partage la région T en deux parties, T' et T''; par exemple, par une droite parallèle à l'axe des y. La limite maximum de $f(x, y)$ sera encore L dans une au moins des régions T', T''; elle sera égale ou inférieure à L dans l'autre. Il en serait de même si l'on partageait la région T en un nombre quelconque d'autres T', T'', T''', ... par des lignes arbitraires. Une conclusion semblable s'applique à la limite minimum l. Il en résulte nécessairement que dans chacune des régions T', T'', ... l'oscillation de la fonction est inférieure ou tout au plus égale à $L - l$.

134. *Continuité*. — Une fonction $u = f(x, y)$ de deux variables est *continue* en un point (α, β) lorsque l'accroissement $f(\alpha + h, \beta + k) - f(\alpha, \beta)$ de la fonction, quand on passe du système (α, β) de valeurs des variables à un autre $(\alpha + h, \beta + k)$, a pour limite zéro, de quelque manière que les accroissements h et k des variables tendent simultanément vers zéro. En d'autres termes, pour que la fonction $f(x, y)$ soit continue au point (α, β), il faut et il suffit que l'on puisse délimiter autour de ce point une région déterminée, assez petite pour que l'oscillation de la fonction $f(x, y)$ dans cette région soit moindre qu'une quantité donné ε, quelque petite quelle soit. Cela suppose évidemment que la fonction u ait au point (α, β) une valeur finie et déterminée.

Il importe d'observer qu'il ne suffit pas, pour que u soit une fonction continue en un point (α, β), qu'elle soit continue par rapport à x, y restant invariable, et par rapport à y, x restant invariable. Ainsi la fonction

$$u = \sin\left(2 \operatorname{arc\,tg} \frac{y - \beta}{x - \alpha}\right)$$

à laquelle on donnerait la valeur zéro pour $x = \alpha$, $y = \beta$, est nulle pour $y = \beta$, x restant variable; de même, si l'on pose $x = \alpha$ et qu'on fasse varier y, on a

$$u = \sin(2 \operatorname{arc\,tg} \infty) = \sin \pi = 0;$$

la fonction est donc constamment nulle et, par suite, continue, lorsqu'on

fait varier x ou y à partir du système de valeurs $x = \alpha, y = \beta$. Elle n'est pourtant pas continue pour le point (α, β), car si nous supposons que x, y tendent respectivement vers les limites α, β, en établissant entre les accroissements $x - \alpha$, $y - \beta$ un rapport déterminé

$$\frac{y - \beta}{x - \alpha} = \lambda.$$

nous aurons

$$\lim \sin\left(2 \operatorname{arc\,tg} \frac{y - \beta}{x - \alpha}\right) = \sin(2 \operatorname{arc\,tg} \lambda),$$

d'où il suit que $f(x, y)$ a une limite différente de $f(\alpha, \beta)$, lorsque x et y tendent respectivement vers α, β ; cette fonction n'est donc pas continue au point (α, β).

135. Une fonction de deux variables peut cesser d'être continue pour un système de valeurs (α, β) des variables, soit en devenant *infinie*, soit en devenant *indéterminée*, soit, comme dans l'exemple ci-dessus, en tendant vers des limites différentes lorsque le point (x, y) se rapproche indéfiniment du point (α, β) en suivant des *chemins* différents. Ainsi la fonction

$$u = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

est indéterminée pour $x = 0, y = 0$. Pour $x = 0$ et $y \gtrless 0$, on a $u = 0$; pour $y = 0$ et $x \gtrless 0$, on a $u = 1$. La limite vers laquelle tendra u, x et y ayant pour limite zéro, dépendra du rapport arbitraire que l'on établirait entre x et y.

Une fonction de x et de y peut aussi devenir *discontinue* pour tout système de valeurs de x et de y qui satisfait à une certaine relation, ou le *long d'un chemin* déterminé.

Une fonction $f(x, y)$ est continue dans une région T lorsqu'elle est continue pour tout système (x, y) de valeurs des variables dans cette région; il suffit, lorsque le point (x, y) appartient au contour, que la différence $f(x + h, y + k) - f(x, y)$ soit infiniment petite pour les points $(x + h, y + k)$ *intérieurs* au contour.

Enfin, la fonction $f(x, y)$ est continue *dans le voisinage d'un point* (α, β) lorsqu'elle est continue dans une région $(\alpha \pm \varepsilon, \beta \pm \varepsilon)$. ε étant très-petit, mais déterminé.

136. *Propriétés des fonctions continues de deux variables.* — Théorème II. *La fonction* $u = f(x, y)$ *étant continue dans une région connexe* T, *si l'on prend deux points* (x_0, y_0), (x_1, y_1) *de cette région et si l'on désigne par* A *une quantité quelconque comprise entre* $u_0 = f(x_0, y_0)$, $u_1 = f(x_1, y_1)$, *il existe dans la région* T *au moins un système* (ξ, η) *de valeurs tel que l'on ait*

$$f(\xi, \eta) = A.$$

D'après la définition de T, on peut concevoir que x, y soient deux fonctions continues d'une variable t telles que, t croissant de la valeur t_0 à la valeur t_1, x et y passent respectivement des valeurs x_0, y_0 aux valeurs x_1, y_1. Or, u étant fonction continue de x, y qui sont des fonctions continues de t, on reconnaît sans peine (**73**) que u est une fonction continue de t dans l'intervalle (t_0, t_1); donc, en vertu du théorème du N° **67**, il existe entre t_0 et t_1 au moins une valeur τ de cette variable t pour laquelle la fonction u acquiert la valeur A comprise entre u_0 et u_1. A cette valeur τ correspond nécessairement un système (ξ, η) de valeurs de (x, y), appartenant à la région T. Donc, etc.

Ainsi une fonction $f(x, y)$ ne peut passer d'une valeur à une autre, dans une région où elle est continue, sans passer par toutes les valeurs intermédiaires.

137. Théorème III. — *Une fonction* $u = f(x, y)$ *continue dans une région* T, *atteint sa limite maximum* L *pour un système au moins de valeurs de* (x, y) *appartenant à cette région. Il en est de même pour sa limite minimum* l.

Partageons la région T en plusieurs autres; par exemple, par deux systèmes de droites parallèles respectivement à l'axe des x et à l'axe des y. Il existera au moins une de ces régions, T′, pour laquelle la limite maximum de $f(x, y)$ sera L (**133**). Subdivisons cette région T′ en plusieurs autres par deux systèmes de parallèles aux axes, et soit T″ l'une de ces régions, dans laquelle la limite maximum de u soit encore L. En continuant ainsi, on déterminera une suite de régions T, T′, T″, ... $T^{(n)}$, dont chacune sera comprise dans la précédente, et qui toutes donneront pour limite maximum de $f(x, y)$, la même quantité L. Comme les parallèles à l'axe des x par lesquelles nous effectuons ces subdivisions successives sont espacées suivant une loi arbitraire, nous pouvons admettre que les deux valeurs de y qui comprennent la région T′, puis

la région T″, ... se rapprochent indéfiniment et tendent vers une limite commune η. De même, les valeurs successives de x qui comprennent ces mêmes régions tendront vers une même limite ξ; la région $T^{(n)}$ finit donc par devenir moindre que toute aire donnée, n croissant indéfiniment. Mais, d'après le théorème I, il existe dans cette région $T^{(n)}$ un point (x, y) tel que $f(x, y)$ diffère de L d'une quantité absolue moindre que ε, ε étant donné et arbitrairement petit. D'autre part, la région $T^{(n)}$ étant aussi petite qu'on le veut, la valeur absolue de $f(x, y) - f(\xi, \eta)$ peut aussi être supposée moindre que ε, en vertu de la continuité; on aura donc

$$\text{VA}\,[f(x, y) - f(\xi, \eta) + \text{L} - f(x, y)] < 2\varepsilon,$$

ou

$$\text{VA}\,[\text{L} - f(\xi, \eta)] < 2\varepsilon.$$

La différence $\text{L} - f(\xi, \eta)$ étant déterminée, et sa valeur absolue pouvant être supposée plus petite qu'une quantité arbitraire 2ε, cette valeur ne peut être que zéro. On a donc

$$f(\xi, \eta) = \text{L}.$$

On prouverait de même qu'il existe dans la région T un point (ξ', η') satisfaisant à la condition $f(\xi', \eta') = l$.

138. Théorème IV. — *La fonction $u = f(x, y)$ étant continue dans la région* T, *il est toujours possible de partager* T *en d'autres régions suffisamment petites pour que, dans chacune d'elles, l'oscillation de la fonction u soit moindre qu'une quantité donnée ε.*

Partageons la région T, par des droites parallèles aux axes, en un nombre quelconque n d'autres régions plus petites, dans chacune desquelles l'oscillation de la fonction sera inférieure ou au plus égale à $\text{L} - l$. Si, dans toutes, l'oscillation de u est $< \varepsilon$, le problème sera résolu; s'il y a des régions dans lesquelles elle reste $\geqslant \varepsilon$, nous décomposerons chacune d'elles, par des parallèles aux deux axes, en un nombre n de régions plus petites. Si l'oscillation de u est $< \varepsilon$ dans chacune de ces nouvelles régions, le but sera atteint; sinon, on décomposera chacune de celles dans lesquelles l'oscillation égale ou surpasse ε en n régions plus petites, et l'on continuera ainsi autant que l'on voudra. Si, en poussant les subdivisions assez loin, on atteint un système de régions dans chacune desquelles l'oscillation de u est $< \varepsilon$, le problème sera résolu. Si l'on n'y parvient pas, quelque loin qu'on pousse les subdivisions, on formera

ainsi *au moins une suite indéfinie* de régions $T, T', T'', \dots T^{(p)}$ dont chacune sera comprise dans la précédente, dont on prouverait comme plus haut que l'aire finit par devenir moindre que toute grandeur donnée autour d'un point déterminé (ξ, η); dans lesquelles, enfin, l'oscillation de la fonction $f(x, y)$ reste toujours égale ou supérieure à ε. Mais, d'autre part, la continuité de la fonction u permet de délimiter autour du point (ξ, η) une région *déterminée* dans l'intérieur de laquelle $f(x, y)$ différera de $f(\xi, \eta)$ d'une quantité moindre que $\varepsilon : 2$ en valeur absolue, dans laquelle l'oscillation de la fonction sera donc moindre que ε, et qui finira pourtant par renfermer la région $T^{(p)}$, puisque celle-ci peut devenir aussi petite qu'on le veut. Ceci est contradictoire, le théorème est donc démontré.

139. Théorème V. — *La fonction $f(x, y)$ étant continue dans une région* T, *et ε étant une quantité arbitrairement petite donnée, il est possible d'assigner un nombre δ tel que la différence $f(x', y') - f(x, y)$ sera, en valeur absolue, plus petite que ε, si les points (x, y), $(x' y')$ appartiennent à la région* T *et si les quantités $\mathrm{VA}\,(x' - x)$, $\mathrm{VA}\,(y' - y)$ sont plus petites que δ.*

Partageons d'abord la région T, par des parallèles aux axes, en d'autres Θ assez petites pour que, dans chacune d'elles, l'oscillation de la fonction soit $< \varepsilon : 2$ (**138**), et désignons par δ la plus petite distance entre deux de ces parallèles. Si nous prenons deux points (x, y), (x', y') tels que l'on ait

$$\mathrm{VA}\,(x' - x) < \delta, \quad \mathrm{VA}\,(y' - y) < \delta,$$

il faudra, ou que ces deux points tombent dans une même région Θ, auquel cas on aura évidemment

$$\mathrm{VA}\,[f(x', y') - f(x, y)] < \tfrac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon;$$

ou bien, qu'ils appartiennent à deux régions différentes, mais qui ont au moins un point commun (ξ, η). On aura donc

$$\mathrm{VA}\,[f(x', y') - f(\xi, \eta)] < \tfrac{1}{2}\varepsilon, \quad \mathrm{VA}\,[f(x, y) - f(\xi, \eta)] < \tfrac{1}{2}\varepsilon,$$

et par suite

$$\mathrm{VA}\,[f(x', y') - f(x, y)] < \varepsilon.$$

On pourrait exprimer cette propriété en disant que, *lorsqu'une fonction $f(x, y)$ est continue dans une région* T, *elle y est uniformément continue.*

On pourrait aussi établir, comme au N° **72**, que si une fonction con-

tinue de deux variables est définie, dans une région T, pour un système de points tels qu'il en existe un nombre indéfini dans la plus petite partie de la région, elle est définie pour tout système (x, y) appartenant à la région T.

140. Les fonctions de trois ou d'un plus grand nombre de variables $x, y, z, \ldots$ définies dans une *région* déterminée, donnent lieu à des considérations tout à fait analogues aux précédentes ; seulement, au delà de trois variables, la représentation géométrique fait défaut. Une fonction continue *en un point*, c'est-à-dire pour un système x, y, z ... de valeurs des variables, se définit de la même manière qu'au N° **134** et jouit de propriétés analogues à celles des fonctions de deux variables et qui se démontrent de même. Ces généralisations se faisant facilement, nous ne nous y arrêterons pas.

CHAPITRE IX.

DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES PARTIELLES OU TOTALES.

141. Considérons une fonction $u = f(x, y)$ de deux variables, simple, finie et continue dans une région T. Si l'on attribue à y une valeur constante et que l'on fasse varier x, u devient une fonction continue de x seul, et si elle admet une dérivée celle-ci se nomme la *dérivée partielle* de u par rapport à x. Nous la désignerons, soit par $f'_x(x, y)$, soit par $D_x u$ et nous aurons en conséquence

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} = f'_x(x, y) = D_x u ;$$

de même, en regardant x comme constant et u comme fonction de y, on aura

$$\lim_{k=0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k} = f'_y(x, y) = D_y u,$$

pour la dérivée partielle de u par rapport à y.

On représente aussi ces dérivées partielles par les rapports des *différentielles partielles* $d_x u$, $d_y u$ de u aux différentielles respectives dx, dy des variables, en sorte que l'on aurait

$$f'_x(x, y) = \frac{d_x u}{dx}, \quad f'_y(x, y) = \frac{d_y u}{dy} ;$$

mais l'usage a prévalu de supprimer les indices au numérateur et d'employer alors la caratéristique ∂ pour les différentielles partielles, de sorte qu'on écrit

$$f'_x(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x},\quad f'_y(x,y)=\frac{\partial u}{\partial y}.$$

On écrit aussi, au lieu de $d_x u$, $d_y u$,

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx,\quad \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Les fonctions de trois ou d'un plus grand nombre de variables donnent lieu à des définitions et notations analogues.

142. Au moyen de ces dérivées partielles, on obtient une expression remarquable de l'accroissement Δu d'une fonction $f(x,y)$ de deux variables, lorsque celles-ci prennent les accroissements h et k. Supposons que, dans le voisinage d'un point (x,y), la fonction u soit continue et admette des dérivées partielles $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$; de plus, que h et k soient assez petits pour que le point $(x+h, y+k)$ reste compris dans la région de continuité. On a

$$\begin{aligned}\Delta u &= f(x+h, y+k)-f(x,y)\\ &=[f(x+h,y+k)-f(x,y+k)]+[f(x,y+k)-f(x,y)].\end{aligned}$$

En vertu des hypothèses faites sur la fonction u, le théorème de M. Bonnet s'applique et donne

$$f(x,y+k)-f(x,y)=k\,f'_y(x,y+\theta k),$$
$$f(x+h,y+k)-f(x,y+k)=h\,f'_x(x+\theta_1 h, y+k),$$

θ et θ_1 étant plus grands que zéro et plus petits que l'unité.

D'autre part, *si l'on admet encore la continuité des dérivées partielles* $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ au point (x,y), on aura les égalités

$$f'_y(x,y+\theta k)=f'_x(x,y)+\omega,$$
$$f'_x(x+\theta_1 h, y+k)=f'_x(x,y)+\omega',$$

ω et ω' désignant des quantités qui ont pour limite zéro lorsqu'on fait décroître indéfiniment h et k. On peut donc écrire

$$\Delta u = h f'_x(x,y)+k f'_y(x,y)+\omega h+\omega' k. \qquad (1)$$

143. — *Conséquences* : I. Le théorème précédent subsiste indépendamment des hypothèses sur la nature des variables x et y. Si celles-ci désignent des fonctions simples, continues de t, admettant des dérivées,

u sera une fonction continue de t, dont la dérivée s'obtiendra comme il suit : h et k étant les accroissements respectifs de x et de y qui correspondent à un accroissement Δt de la variable indépendante, l'équation (1) s'appliquera. Divisant toute l'équation par Δt et faisant tendre Δt vers zéro, on observera que h et k tendent vers zéro et que leurs rapports à Δt ont pour limites respectives $dx : dt$ et $dy : dt$; que ω et ω' tendent vers zéro en même temps que Δt, et que, par suite, les dérivées de x et de y étant finies, on aura

$$\lim \frac{\Delta u}{\Delta t} = f'_x(x, y)\frac{dx}{dt} + f'_y(x, y)\frac{dy}{dt},$$

ou

$$(2) \qquad \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

On a ainsi la dérivée de u par rapport à t, exprimée au moyen des dérivées partielles de u par rapport à x et à y, et des dérivées de x et de y par rapport à t.

Cette loi s'étend sans difficulté, comme l'équation (1) dont elle dérive, à une fonction u de trois, quatre, ... variables $x, y, z, \ldots$ fonctions de t; on a donc

$$(3) \qquad \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \cdots,$$

ce qui constitue la règle de *dérivation des fonctions composées*. En prenant $u = x + y - z\ldots$, $u = xy$, etc..., on retrouve les règles du N° **77**.

144. Tirons de là une propriété des fonctions homogènes. On dit qu'une fonction $f(x, y, z, \ldots)$ est *homogène de degré m* lorsque, chaque variable étant multipliée par t, la fonction est multipliée par t^m, en sorte que

$$(A) \qquad f(tx, ty, tz, \ldots) = t^m f(x, y, z, \ldots).$$

Considérons t comme une variable indépendante de $x, y, z, \ldots$; $s = tx$, $v = ty$, $w = tz, \ldots$ et par suite $f(s, v, w, \ldots)$ comme des fonctions de t. L'application de l'équation (3) donnera, en égalant les dérivées par rapport à t des deux membres de l'équation (A),

$$\frac{\partial f}{\partial s}x + \frac{\partial f}{\partial v}y + \frac{\partial f}{\partial w}z + \cdots = mt^{m-1} f(x, y, z, \ldots),$$

et si, danscette égalité, on fait $t = 1$, d'où $s = x$, $v = y$, $w = z, \ldots$ on a

$$\text{(B)} \qquad x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} + \cdots = mf(x, y, z, \ldots),$$

ce qui est la propriété annoncée. On peut la vérifier immédiatement sur les fonctions homogènes

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2, \quad x^3 + y^2z\,\mathrm{l}.\frac{x}{y}, \quad \text{etc...}$$

145. — II. L'équation (1) s'applique également au cas où les variables x et y étant *indépendantes*, leurs accroissements h et k ne sont liés entr'eux par aucune condition. Mais comme le point (x, y) ne peut passer d'une position (x_0, y_0) dans la région T à une autre position (x_1, y_1) sans que cette variation s'effectue suivant une certaine loi, il convient de considérer les variables x et y comme étant encore des fonctions d'une même variable auxiliaire t, mais des fonctions dont la forme reste *arbitraire*. Nous nous limiterons d'ailleurs au cas où ces fonctions seraient simples et continues par rapport à t et admettraient des dérivées. La différentielle de u, prise sous ce point de vue général, se nomme sa *différentielle totale.* L'expression de cette différentielle résulte immédiatement de l'équation (2) multipliée par dt; on a

$$\text{(4)} \qquad du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy,$$

les différentielles dx et dy étant arbitraires d'après ce qu'on vient de dire.

On trouverait de même, pour la différentielle totale d'une fonction de trois variables indépendantes, $u = f(x, y, z)$,

$$\text{(5)} \qquad du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz,$$

et ainsi de suite. On peut écrire, plus brièvement,

$$du = d_xu + d_yu + d_zu$$

et énoncer ce théorème : *La différentielle totale d'une fonction de plusieurs variables indépendantes est la somme de ses différentielles partielles par rapport à chacune d'elles.*

146. Le théorème précédent n'est applicable que si 1° la fonction u est continue dans le voisinage du point $(x, y, z, \ldots)$; 2° ses dérivées partielles D_xu, D_yu, D_zu existent dans ce voisinage, et sont de plus

continues pour le point $(x, y, z, \ldots)$. Considérons, par exemple la fonction

$$u = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

continue et finie dans une région arbitraire, pourvu qu'on lui attribue la valeur $u = 0$ pour $x = 0$, $y = 0$. On trouve, par les règles connues,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

et ces dérivées sont également finies et continues, sauf au point $x = 0$, $y = 0$, où leurs expressions deviennent indéterminées.

Le théorème s'applique donc à tout point (x, y), sauf à celui-là.

Comme la fonction u est nulle pour $x = 0$ quel que soit y, et pour $y = 0$ quel que soit x, il suit de la définition même des dérivées partielles que l'on a, pour $x = y = 0$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$$

et l'application de l'équation (4) donnerait $du = 0$. Mais on a en réalité, pour $x = y = 0$,

$$\Delta u = \frac{hk}{\sqrt{h^2 + k^2}},$$

et si l'on pose $h = \alpha \Delta t$, $k = \beta \Delta t$, α et β étant des constantes quelconques,

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad du = \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} dt;$$

ainsi la différentielle totale de u dépend des constantes α et β et n'est pas nulle en général, pour $x = y = 0$

147. — III. La formule (5) subsiste encore lorsque, au lieu de supposer $x, y, z, \ldots$ variables indépendantes, on les considère comme des fonctions données de plusieurs autres variables indépendantes $\xi, \eta, \zeta, \ldots$; mais $dx, dy, dz, \ldots$ désignent alors les différentielles totales de $x, y, z, \ldots$ considérées comme fonctions de $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ et l'on peut les remplacer par leurs valeurs en $d\xi, d\eta, d\zeta, \ldots$ données par la même formule (5),

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial x}{\partial \zeta} d\zeta + \cdots$$

. . . .

Pour démontrer cette conclusion, on remarquera que, d'après le point de vue auquel nous nous plaçons pour définir la différentielle totale du, $\xi, \eta, \zeta \ldots$ doivent en définitive être considérés comme des fonctions non définies d'une certaine variable auxiliaire t; que $x, y, z, \ldots$ et par suite u, deviennent aussi des fonctions de t, et que la différentielle totale du peut être exprimée, par conséquent, au moyen des différentielles $dx, dy, dz, \ldots$ de $x, y, z \ldots$, par l'équation (3). Or, ces différentielles $dx, dy, dz, \ldots$ ont précisément la signification des différentielles *totales* de $x, y, z, \ldots$ et s'exprimeront, par conséquent, au moyen de celles des variables $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ par l'équation (5). Il est bien entendu que ces relations subsistent toujours sous la réserve que les conditions de continuité énumérées au N° **142** soient remplies.

Comme conséquence de cette remarque, il est clair que les règles du N° **80** pour différentier une somme, un produit, etc... de fonctions $u, v, w, \ldots$ de x, subsistent si $u, v, w \ldots$ sont des fonctions de plusieurs variables indépendantes.

148. Les dérivées partielles d'une fonction $u = f(x, y)$ de deux variables étant elles-mêmes, en général, des fonctions de ces variables, si l'on cherche leurs dérivées partielles, soit par rapport à x, soit par rapport à y, on obtiendra *les dérivées partielles du second ordre* de u, et ainsi de suite.

Désignons encore par $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ les dérivées partielles du premier ordre, et posons

$$\frac{\partial f'_x(x, y)}{\partial x} = f''_{xx}(x, y), \quad \frac{\partial f'_x(x, y)}{\partial y} = f''_{xy}(x, y),$$

$$\frac{\partial f'_y(x, y)}{\partial x} = f''_{yx}(x, y), \quad \frac{\partial f'_y(x, y)}{\partial y} = f''_{yy}(x, y).$$

Ce sont les dérivées partielles *secondes*, que l'on désigne aussi, respectivement, par $D^2_x u$, $D_y D_x u$, $D_x D_y u$, $D^2_x u$. Mais il existe sur ces dérivées un théorème important que nous allons démontrer.

Soit, dans une région T, un point (x_0, y_0) dans le voisinage duquel les fonctions $f(x, y)$, $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ existent et sont continues, tandis que les fonctions $f''_{xy}(x, y)$, $f''_{yx}(x, y)$ sont supposées seulement être déterminées. Soient h, k des accroissements arbitrairement petits de signes quelconques, et posons

$$(\alpha) \quad \Delta^2 u = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0).$$

Posons d'autre part, x restant variable,

$$\varphi(x) = f(x, y_0 + k) - f(x, y_0);$$

$\Delta^2 u$ pourra être regardé comme l'accroissement de $\varphi(x)$ quand x passe de la valeur x_0 à la valeur $x_0 + h$, et puisque la fonction $\varphi(x)$ est continue et a, dans cet intervalle, une dérivée déterminée

$$\varphi'(x) = f'_x(x, y_0 + k) - f'_x(x, y_0),$$

on aura, par le théorème de M. O. Bonnet,

$$\Delta^2 u = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = h\varphi'(x_0 + \theta h) = h[f'_x(x_0 + \theta h, y_0 + k) \\ - f'_x(x_0 + \theta h, y_0)], \quad (0 < \theta < 1).$$

Mais le multiplicateur de h dans le dernier membre est l'accroissement de la fonction de y, $f'_x(x_0 + \theta h, y)$, lorsque y passe de la valeur y_0 à $y_0 + k$, sans que $x_0 + \theta h$ varie. Or, la fonction $f'_x(x_0 + \theta h, y)$ est, par hypothèse, continue dans l'intervalle $(y_0, y_0 + k)$ et admet une dérivée déterminée $f''_{xy}(x_0 + \theta h, y)$; donc, d'après le même théorème, on a

$$f'_x(x_0 + \theta h, y_0 + k) - f'_x(x_0 + \theta h, y_0) = kf''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta_1 k),$$

θ_1 étant > 0 et < 1. On a donc enfin

$$(\beta) \qquad \Delta^2 u = hkf''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta_1 k).$$

De la même manière, on peut considérer l'expression (α) comme l'accroissement de la fonction de y

$$f(x_0 + h, y) - f(x_0, y)$$

lorsque y passe de y_0 à $y_0 + k$, et en raisonnant comme plus haut, on établirait de même la relation

$$(\gamma) \qquad \Delta^2 u = khf''_{yx}(x_0 + \theta' h, y_0 + \theta'_1 k),$$

θ' et θ'_1 étant encore > 0 et < 1. Égalons les valeurs (β) et (γ) de $\Delta^2 u$; nous aurons

$$f''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta_1 k) = f''_{yx}(x_0 + \theta' h, y_0 + \theta'_1 k).$$

Si l'on admet enfin que *les fonctions f''_{xy} et f''_{yx} soient continues au point* (x_0, y_0), faisant tendre simultanément h et k vers zéro, on aura à la limite

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

Ainsi, en général, *l'égalité*

$$(6) \qquad D_y D_x u = D_x D_y u$$

subsiste pour tout système de valeurs (x, y), *pourvu* 1° *que la fonction* u *et ses dérivées partielles* $D_x u$, $D_y u$ *soient continues dans le voisinage de ce système;* 2° *que les dérivées* $D_y D_x u$ *et* $D_x D_y u$ *soient déterminées dans ce voisinage;* 3° *que ces dernières dérivées soient continues au point* (x, y).

149. Pour montrer la nécessité de ces conditions, prenons la fonction

$$u = f(x, y) = x^2 \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} - y^2 \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y},$$

qui donne en général

$$f'_x(x, y) = 2x \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} - y, \quad f'_y(x, y) = x - 2y \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y}.$$

Ces trois fonctions u, $D_x u$, $D_y u$ sont généralement finies et continues, même dans le voisinage du système $(x = 0, y = 0)$, pourvu qu'on leur attribue la valeur zéro en ce point. De plus, on a

$$f''_{xy}(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad f''_{yx}(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2},$$

de sorte que le théorème établi se vérifie ici en général, sauf pour $x = 0$, $y = 0$, auquel cas f''_{xy} et f''_{yx} deviennent indéterminés, et il est facile de voir que ces fonctions sont discontinues en ce point. Or, on a pour $x = 0$,

$$f'_x(0, y) = -y, \quad D_y f'_x(0, y) = -1,$$

et pour $y = 0$,

$$f'_y(x, 0) = x, \quad D_x f'_y(x, 0) = 1.$$

Donc, au point $(x = 0, y = 0)$, on a

$$D_y D_x u = -1, \quad D_x D_y u = 1;$$

ainsi le théorème ne se vérifie pas en ce point.

150. Aux dérivées partielles successives correspondent les *différentielles partielles* successives définies par les équations

$$d_x^2 u = D_x^2 u \cdot dx^2, \quad d_y d_x u = D_y D_x u \cdot dx\, dy,$$

etc... L'équation (6) entraîne donc celle-ci

$$d_y d_x u = d_x d_y u. \tag{7}$$

Il suit de là que l'on représente encore les dérivées partielles successives d'une fonction u au moyen de ses différentielles partielles, car on a

$$D_x^2 u = \frac{d_x^2 u}{dx^2}, \quad D_y D_x u = \frac{d_y d_x u}{dy\, dx}, \quad \text{etc...}$$

Mais on simplifie l'écriture en supprimant les indices x, y au numérateur et remplaçant d par ∂ ; on écrit

$$D_x^2 u = f''_{xx}(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad D_x D_y u = f''_{yx}(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},$$

$$D_y^2 u = f''_{yy}(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Mais le théorème du N° **148** peut être généralisé. Concevons que l'on effectue sur une fonction $u = f(x, y)$ de deux variables un nombre quelconque de dérivations partielles successives, les unes par rapport à x, les autres par rapport à y dans un ordre arbitraire. Il suit de ce théorème que deux opérations consécutives dont l'une se rapporte à x l'autre à y, sur une même fonction ou dérivée, peuvent être permutées sans que le résultat soit changé.

On pourra donc, par la répétition convenable de ces permutations, ranger les dérivations successives dans l'ordre que l'on voudra, sans altérer le résultat final, et faire en sorte, par exemple, que toutes les dérivations relatives à une même variable soient faites consécutivement. Il suffira donc d'une seule caractéristique, affectée d'un exposant et d'un indice convenables, pour marquer la suite des opérations relatives à une même variable. Ainsi l'expression

$$D_x^3 D_y^2 u \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^5 u}{\partial x^3 \partial y^2}$$

suffit pour représenter le résultat de cinq dérivations partielles successives, dont trois par rapport à x et deux par rapport à y, exécutées sur u dans un ordre arbitraire. De même, l'expression

$$d_x^3 d_y^2 u \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^5 u}{\partial x^3 \partial y^2} dx^3 dy^2$$

sera employée pour représenter la différentielle partielle du 5ᵉ ordre, résultant de trois différentiations par rapport à x et de deux par rapport à y, dans quelque ordre qu'on les effectue. Il faut se garder, quand on emploie la dernière notation, de supprimer le facteur $dx^3 dy^2$ au numérateur et au dénominateur.

Il va sans dire que ces définitions, ces propriétés et ces notations s'étendront sans difficulté aux fonctions de trois ou d'un plus grand nombre de variables, et que le calcul des dérivées patielles des fonctions

explicites n'exige pas de nouvelles règles, attendu qu'à chaque opération on n'a à différentier qu'une fonction explicite d'une seule variable, puisque les autres sont traitées comme des constantes.

151. *Différentielles totales successives.* — Soient toujours $u = f(x, y)$ une fonction de deux variables x et y, indépendantes ou fonctions elles-mêmes d'une ou de plusieurs variables indépendantes; $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ ses dérivées partielles par rapport à x et à y, et

$$(8) \qquad du = f'_x(x, y)\, dx + f'_y(x, y)\, dy$$

sa différentielle totale. Considérons du comme une nouvelle variable, qui dépend de x, y, dx, dy; elle pourra admettre une différentielle totale $d.\, du$, qui sera la *différentielle seconde* d^2u de $f(x, y)$, et ainsi de suite. Nous nous proposons d'exprimer ces différentielles successives de u au moyen de ses dérivées partielles par rapport à x et à y et des différentielles successives de x et de y, définies d'ailleurs comme celles de u et d'après la nature dépendante ou indépendante de ces variables. On admettra toujours que $f(x, y)$ et ses dérivées partielles successives soient continues dans la région où les quantités x et y varient.

Appliquant à du les règles pour différentier une somme et un produit, nous aurons d'abord

$$d.\, du = d^2u = df'_x(x, y) \cdot dx + df'_y(x, y) \cdot dy + f'_x(x, y)\, d^2x + f'_y(x, y)\, d^2y,$$

et en développant les différentielles totales de f'_x et f'_y par la même règle (8) et ayant égard au théorème du N° **148**,

$$d^2u = f''_{xx}(x,y)\, dx^2 + 2 f''_{xy}(x,y)\, dx\, dy + f''_{yy}(x,y)\, dy^2 + f'_x(x,y)\, d^2x + f'_y(x,y)\, d^2y.$$

On trouverait l'expression de d^3u en continuant par les mêmes règles, mais il est plus simple, dans l'application à des exemples donnés, d'opérer directement sur les fonctions explicites qui résultent de chaque opération.

Dans le système de notations adopté, ces équations s'écriront comme il suit :

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy,$$

$$(9) \qquad d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial u}{\partial x} d^2x + \frac{\partial u}{\partial y} d^2y.$$

152. Lorsque x et y sont des variables indépendantes, ou en général

lorsque leurs différentielles dx et dy sont supposées constantes, d^2x, d^2y, $d^3x, \ldots$ s'annulent et l'équation (9) devient

$$(10) \qquad d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2.$$

On peut même alors former une expression *symbolique* de $d^n u$. En effet, écrivons la valeur de du sous la forme symbolique.

$$du = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right) u;$$

nous en concluons que pour avoir la différentielle totale d'une fonction de x, y, il faut multiplier cette fonction par le facteur *symbolique*

$$\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy$$

et effectuer les opérations indiquées par ce symbole. On a donc aussi

$$d^2u = d.\, du = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right) du = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^2 u,$$

en interprêtant les puissances de ∂ comme des indices de différentiation. On aura donc, en général,

$$(11) \qquad d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^n u,$$

formule symbolique que l'on traduira 1° en développant le premier facteur, comme si $\frac{\partial}{\partial x}$, etc.... étaient des *quantités*, par la formule du binôme; 2° en introduisant dans chaque terme le facteur u sous le signe ∂^p; 3° en interprêtant l'expression obtenue conformément aux notations ci-dessus.

143. La facilité avec laquelle se forment les différentielles totales successives de $f(x, y)$, par la simple application des règles du chapitre II, conduit à se servir de ces différentielles, en traitant dx et dy comme constants, pour calculer les dérivées partielles successives de u. On obtient en effet ainsi des résultats de la forme

$$du = pdx + qdy, \quad d^2u = rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2, \ldots$$

où $p, q, r, s, t, \ldots$ désignent des fonctions explicites connues de x, y; en égalant ces valeurs à celles que fournissent les formules générales (4) et

(10), et observant que dx, dy sont des indéterminées, on trouvera évidemment les relations

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = s, \cdots$$

et l'on connaîtra les dérivées cherchées.

Par exemple, si $u = e^{ax} \cos by$, on aura directement

$$du = e^{ax} (a \cos by\, dx - b \sin by\, dy),$$

$$d^2u = e^{ax} (a^2 \cos by\, dx^2 - 2ab \sin by\, dx\, dy - b^2 \cos by\, dy^2),$$

etc., ..., d'où l'on tire immédiatement

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ae^{ax} \cos by, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = - be^{ax} \sin by,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 e^{ax} \cos by, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = - abe^{ax} \sin by, \text{ etc...}$$

Tout ce que nous avons dit des fonctions de deux variables s'étend sans peine aux fonctions de trois, quatre, ... variables.

Exercices.

1. Dérivées partielles de $u = \sqrt{\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$.

R. $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2xy^2}{(x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2x^2 y}{(x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = - \frac{2y^2 (y^4 + 3x^4 - 2x^2y^2)}{(x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} (x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{4xy (x^4 - x^2y^2 + y^4)}{(x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} (x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

2. $u = \sin(\alpha x + \beta y + \gamma)$.

R. $$\frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n} = \alpha^m \beta^n \sin\left(\alpha x + \beta y + \gamma + \frac{m + n}{2} \pi\right).$$

3. Trouver les dérivées partielles d'ordre n de la fonction $u = e^{ax} \cos by$.

R. On forme la différentielle totale $n^{ième}$ et l'on trouve

$$d^n u = e^{ax} \left[a^n \cos by\, dx^n + na^{n-1} b \cos\left(by + \frac{\pi}{2}\right) dx^{n-1}\, dy \right.$$

$$\left. + \frac{n(n-1)}{1.2} a^{n-2} b^2 \cos\left(by + 2\frac{\pi}{2}\right) dx^{n-2}\, dy^2 + \cdots + b^n \cos\left(by + \frac{n\pi}{2}\right) dy^n \right],$$

et l'on en tire (**151**) les dérivées partielles

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n} = a^n e^{ax} \cos by, \text{ etc...}$$

5. $u = \text{arc tg}\,\frac{y}{x}$; **différentielles totales successives.**

R. En faisant $x = r\cos u$, $y = r\sin u$, on aura

$$dr = \cos u\,dx + \sin u\,dy, \quad du = -\frac{1}{r}(\sin u\,dx - \cos u\,dy),$$

et au moyen de ces relations, on trouvera sans peine la loi suivante :

$$d^n u = (-1)^n \frac{1.2\ldots(n-1)}{(x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}}\left[\sin nu\,dx^n - n\sin\left(nu+\frac{\pi}{2}\right)dx^{n-1}dy\right.$$

$$\left.+\frac{n(n-1)}{1.2}\sin\left(nu+\frac{2\pi}{2}\right)dx^{n-2}dy^2 - \cdots \pm \sin\left(nu+\frac{n\pi}{2}\right)dy^n\right],$$

de laquelle se déduisent sans peine les dérivées partielles successives de u,

$$\frac{\partial^{p+q}u}{\partial x^p\,\partial y^q} = (-1)^p \frac{1.2\ldots(p+q-1)}{(x^2+y^2)^{\frac{p+q}{2}}}\sin\left(\overline{p+q}\,u+\frac{q}{2}\pi\right).$$

On peut aussi mettre $d^n u$ sous une autre forme, en posant

$$dx = \rho\cos\varphi, \quad dy = \rho\sin\varphi,$$

ρ *et* φ *étant constantes.* On trouve d'abord

$$dr = \rho\cos(\varphi - u), \quad du = \frac{\rho}{r}\sin(\varphi - u),$$

et en calculant d^2u, d^3u. ... au moyen de ces relations, on a

$$d^n u = (-1)^{n-1}\,1.2\ldots(n-1)\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \sin n(\varphi - u).$$

6. $u = \frac{x^2 y}{a^2 - z^2}$. **Dérivées partielles.**

R. On forme les différentielles totales du premier et du second ordre, et l'on en tire

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2xy}{a^2 - z^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^2}{a^2 - z^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2x^2yz}{(a^2 - z^2)^2}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2y}{a^2 - z^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{2x^2y}{(a^2 - z^2)^2} + \frac{8x^2yz^2}{(a^2 - z^2)^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{2x}{a^2 - z^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} = \frac{2xyz}{(a^2 - z^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} = \frac{2x^2z}{(a^2 - z^2)^2}.$$

7. T étant une fonction des cinq variables ψ', θ', φ', θ, φ, définie par les relations

$$2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2,$$

$$\begin{cases} p = \psi' \sin\theta \sin\varphi + \theta' \cos\varphi, \\ q = \psi' \sin\theta \cos\varphi - \theta' \sin\varphi, \\ r = \varphi' + \psi' \cos\theta, \end{cases}$$

A, B, C étant des constantes, trouver les dérivées partielles du premier ordre de T, par rapport à ψ', θ', ...

R.

$$\frac{\partial T}{\partial \psi'} = (Ap \sin\varphi + Bq \cos\varphi) \sin\theta + Cr \cos\theta,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta'} = Ap \cos\varphi - Bq \sin\varphi,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi'} = Cr, \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = \psi' [(Ap \sin\varphi + Bq \cos\varphi) \cos\theta - Cr \sin\theta]$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = (A - B) pq.$$

8. Soient u, v deux fonctions de x, y; (dx, dy), $(\delta x, \delta y)$, deux systèmes de valeurs attribuées aux différentielles des variables, (du, dv), $(\delta u, \delta v)$ les systèmes correspondants des différentielles totales de u et v. Démontrer que l'on a

$$\frac{du\,\delta v - dv\,\delta u}{dx\,\delta y - dy\,\delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

CHAPITRE X.

THÉORÈME DE TAYLOR ET THÉORIE DES MAXIMA ET MINIMA POUR LES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES.

154. Soient $f(x, y)$ une fonction de deux variables; a, $a + h$, deux valeurs attribuées à x; b, $b + k$ deux valeurs de y; il s'agit de développer $f(a + h, b + k)$ en série procédant suivant des termes homogènes et de degrés croissants en h et k. Ce problème se ramène au problème analogue du n° **116** comme il suit :

Soit t une nouvelle variable indépendante; posons

$$x = a + ht, \quad y = b + kt, \quad f(a + ht, b + kt) = f(x, y) = \varphi(t),$$

et développons $\varphi(t)$ par la formule de Maclaurin. Faisant ensuite $t = 1$,

nous aurons $\varphi(1) = f(a+h, b+k)$, ce qui nous fournira le développement cherché. Or, nous avons

$$(A)\quad \left\{ \begin{aligned} &\varphi(t) = \varphi(0) + t\varphi'(0) + \frac{t^2}{1.2}\varphi''(0) + \cdots \\ &+ \frac{t^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\varphi^{n-1}(0) + \frac{t^n}{1.2\ldots n}\varphi^n(\theta t), \end{aligned} \right.$$

où $0 < \theta < 1$; d'autre part, si nous prenons dt, qui est arbitraire, égal à l'unité, nous aurons, p étant entier,

$$\varphi^p(t) = d^p\varphi(t) = d^p f(x, y).$$

D'ailleurs, comme on a

$$dx = h\,dt = h, \quad dy = k\,dt = k,$$

il suffira, dans le développement de la différentielle $d^p f(x, y)$, de remplacer dx par h et dy par k. Enfin, comme on doit faire $t = 0$ dans $\varphi(t)$ et dans ses dérivées pour avoir les coefficients du développement, que $t = 0$ donne $x = a$ et $y = b$, on voit qu'en général on aura

$$\varphi^p(0) = [d^p f(x, y)]_{a,\, b},$$

en mettant en indice les valeurs respectives qu'il faut attribuer à x et à y dans la fonction entre crochets. On trouverait de même

$$\varphi^n(\theta t) = [d^n f(x, y)]_{a+\theta ht,\, b+\theta kt}.$$

Posons maintenant $t = 1$ dans l'équation (A) et ayons égard à la remarque ci-dessus, il viendra

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &f(a+h, b+k) = f(a,b) + [df(x, y)]_{a,b} + \frac{1}{1.2}[d^2 f(x, y)]_{a,b} + \cdots \\ &+ \frac{1}{1.2\ldots(n-1)}[d^{n-1}f(x,y)]_{a,b} + \frac{1}{1.2\ldots n}[d^n f(x,y)]_{a+\theta h,\, b+\theta k}. \end{aligned} \right.$$

Il est entendu que dx, dy seront remplacés par h et k dans ces différentielles développées.

155. A l'aide de la formule symbolique (11) du chapitre précédent, on développe les termes de cette équation. Comme, en effet, $dx = h$ et $dy = k$ sont constants par rapport à t, on a $d^2x = 0$, ... $d^2y = 0$, ..., et l'on peut faire usage de cette formule. On a symboliquement

$$d^p f(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)^p f,$$

et pour indiquer que x, y sont remplacés respectivement par a et b dans les dérivées partielles de f, nous emploierons la notation

$$\left(\frac{\partial^{p+q} f}{\partial x^p\, \partial y^q}\right)_{a,b} = \frac{\partial^{p+q} f}{\partial a^p\, \partial b^q},$$

donc

$$[d^p f(x, y)]_{a,b} = \left(\frac{\partial}{\partial a} h + \frac{\partial}{\partial b} k\right)^p f.$$

Nous aurons ainsi, en substituant dans la formule (1) et développant les premiers termes,

$$(2)\left\{\begin{aligned} & f(a+h, b+k) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial a} h + \frac{\partial f}{\partial b} k + \frac{1}{1.2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial a^2} h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b} hk + \frac{\partial^2 f}{\partial b^2} k^2\right) \\ & + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\left(\frac{\partial}{\partial a} h + \frac{\partial}{\partial b} k\right)^{n-1} f + \frac{1}{1.2\ldots n}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k\right)^n f\right]_{a+\theta h,\, b+\theta k}. \end{aligned}\right.$$

Comme la formule de Maclaurin suppose $\varphi(t)$ et ses dérivées continues dans l'intervalle $(0, 1)$, et que l'expression des différentielles totales au moyen des dérivées partielles suppose celles-ci continues pour la même valeur de t, on ne peut faire usage de l'équation (2) que si $f(x, y)$ et ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre n inclusivement sont continues dans la région limitée par les valeurs $x = a$, $x = a + h$, $y = b$, $y = b + k$. Elle fournit alors, comme on le voit facilement, la solution du problème proposé.

Faisons, dans la formule (2), $a = 0$, $b = 0$, $h = x$, $k = y$; nous aurons la formule qui correspond à celle de Maclaurin :

$$(3)\left\{\begin{aligned} & f(x, y) = f(0, 0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial y} y\right)_{0,0} + \frac{1}{1.2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y^2\right)_{0,0} \\ & + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\left(\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial}{\partial y} y\right)^{n-1} f_{0,0} + \frac{1}{1.2\ldots n}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial}{\partial y} y\right)^n f\right]_{\theta x,\, \theta y}; \end{aligned}\right.$$

les indices marquent les valeurs par lesquelles il faut remplacer x, y respectivement dans les dérivées partielles entre parenthèses.

Si, dans les équations (2) et (3) on suppose que n croisse indéfiniment, sans que les conditions imposées aux dérivées partielles cessent d'être satisfaites, et si en même temps le dernier terme ou le *reste* tend vers la limite zéro, ces formules fournissent le développement en série indéfinie convergente, l'une de $f(a + h, b + k)$, l'autre de $f(x, y)$.

La même méthode conduit, sans difficulté, au développement des fonctions de trois ou d'un plus grand nombre de variables.

Exercices.

1. Développer $x \sin y + y \sin x$ par la formule (3):

R. On a $[d^p (x \sin y + y \sin x)]_{0,0} = p \sin (p - 1) \frac{\pi}{2} (dx^{p-2} + dy^{p-2})\, dx\, dy$; et comme R_n a pour limite zéro,

$$x \sin y + y \sin x = xy \left[2 - \frac{x^2 + y^2}{1.2.3} + \frac{x^4 + y^4}{1.2\ldots5} - \frac{x^6 + y^6}{1.2\ldots7} + \cdots \right].$$

2. Développement de $\text{arc tg}\,\frac{b+k}{a+h}$ par l'équation (1),

R. Posant $\omega = \text{arc tg}\,\frac{b}{a}$ et appliquant les formules de l'ex. 5, ch. IX, on trouvera

$$\text{arc tg}\,\frac{b+k}{a+h} = \text{arc tg}\,\frac{b}{a} - (a^2 + b^2)^{-\frac{1}{2}} \left[h \sin \omega - k \sin \left(\omega + \frac{1}{2}\pi \right) \right]$$

$$+ \frac{1}{2} (a^2 + b^2)^{-\frac{2}{2}} \left[h^2 \sin 2\omega - 2hk \sin \left(2\omega + \frac{1}{2}\pi \right) + k^2 \sin \left(2\omega + \frac{2}{2}\pi \right) \right]$$

$$- \frac{1}{3} (a^2 + b^2)^{-\frac{3}{2}} \left[h^3 \sin 3\omega - 3h^2k \sin \left(3\omega + \frac{1}{2}\pi \right) + 3hk^2 \sin \left(3\omega + \frac{2}{2}\pi \right) - k^3 \sin \left(3\omega + \frac{3}{2}\pi \right) \right] + \cdots$$

Pour s'assurer si $\lim R_n = 0$ pour $n = \infty$, on fera $x = r \cos u$, $y = r \sin u$, $h = \rho \cos \varphi$, $k = \rho \sin \varphi$, et l'on mettra (ex. cité) $d^n\, \text{arc tg}\, \frac{y}{x}$ sous la forme

$$(-1)^{n-1}\, 1.2\ldots(n-1) \left(\frac{\rho}{r} \right)^n \sin n (\varphi - u).$$

Le reste prend la forme

$$\frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{\rho^n}{[(a + \theta h)^2 + (b + \theta k)^2]^{\frac{1}{2}}} \sin n (\varphi - u),$$

et il suffit, pour que la formule soit applicable, que l'on ait

$$h^2 + k^2 \leqslant (a + \theta h)^2 + (b + \theta k)^2.$$

3. Soit $f(x, y, z, \ldots)$ une fonction homogène de degré m de $x, y, z, \ldots$; on a, α étant une variable quelconque,

$$f(x + \alpha x, y + \alpha y, z + \alpha z) = (1 + \alpha)^m f(x, y, z).$$

Développant le premier membre par la formule de Taylor, suivant les puissances de αx, αy, αz, et $(1 + \alpha)^m$ par la formule du binôme, puis égalant les coefficients des mêmes

puisssances de α dans les deux membres, on trouve 1° le théorème des fonctions homogènes (**144**); 2° une suite d'égalités comprises dans la formule symbolique

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}+\cdots\right)^p f=m(m-1)\cdots(m-p+1)f(x,y,z).$$

156. Une fonction $f(x, y)$ de deux variables indépendantes devient *maximum* pour un système (a, b) de valeurs de ces variables, lorsque pour tout point (x, y) compris dans une région $(a \pm \varepsilon,\ b \pm \varepsilon')$, ε et ε' étant des constantes positives, on a constamment $f(x, y) < f(a, b)$. Si, dans les mêmes conditions, on avait constamment $f(x, y) > f(a, b)$, la fonction f aurait un *minimum* au point (a, b).

La recherche des systèmes de valeurs de x et y qui rendent maximum ou minimum une fonction de deux variables se ramène au problème correspondant pour les fonctions d'une seule variable, par un artifice analogue à celui du N° **154.** Observons que si h, k, désignent des quantités arbitraires, et t une variable, on aura nécessairement, dans le cas du maximum,

$$f(a+ht, b+kt)-f(a, b)<0$$

pour toute valeur absolue de t moindre qu'une certaine fraction δ (sauf $t=0$); et dans le cas du minimum,

$$f(a+ht, b+kt)-f(a, b)>0.$$

Si nous posons $\varphi(t)=f(a+ht, b+kt)$, ces inégalités deviendront respectivement

$$(1) \qquad \varphi(t)-\varphi(0)<0, \quad \varphi(t)-\varphi(0)>0,$$

et la fonction $\varphi(t)$ de la variable t deviendra, pour $t=0$, un maximum dans le premier cas, un minimum dans le second (**126**).

Réciproquement, si la première inégalité (1) est vérifiée pour toute valeur très petite de t, les valeurs de h et k restant quelconques, comme $(x=a+ht, y=b+kt)$ peut représenter tout point compris dans une région très petite autour du point (a, b), il résulte de la définition que $f(x, y)$ deviendra maximum pour $x=a$, $y=b$; de même, il y aura un minimum si la seconde inégalité est vérifiée.

D'après cela, il suffit de chercher les conditions pour que $\varphi(t)$ soit maximum ou minimum pour $t=0$. Nous supposerons, pour simplifier, que $f(x, y)$ et ses dérivées partielles du premier et du second ordre soient des fonctions continues dans le voisinage du point (a, b); alors

les fonctions $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$, $\varphi''(t)$ seront continues dans le voisinage de $t = 0$. Donc, pour que $\varphi(0)$ soit un maximum ou un minimum, il faudra que l'on ait $\varphi'(0) = 0$ (**126**). Or, on a

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k, \quad \varphi'(0) = \frac{\partial f}{\partial a} h + \frac{\partial f}{\partial b} k = 0,$$

et comme cette égalité doit être vérifiée pour des valeurs arbitraires de h et de k, on devra avoir

$$(2) \qquad \frac{\partial f}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial b} = 0.$$

Donc, *tout système de valeurs de* (x, y) *qui rend maximum ou minimum la fonction* $f(x, y)$ *doit annuler les dérivées partielles* $D_x f$, $D_y f$, à moins que la fonction f ou l'une de ces dérivées ne devienne discontinue dans le voisinage de ce système de valeurs.

On égalera donc à zéro les dérivées $D_x f$, $D_y f$; on tirera de ces équations, en général, un nombre déterminé de systèmes de valeurs pour x et y, propres à fournir des maxima ou minima de f; soit (a, b) un de ces systèmes. On sait que $t = 0$ répond à un maximum de $\varphi(t)$ si $\varphi''(0) < 0$, à un minimum si $\varphi''(0) > 0$. Mais nous avons, en calculant $\varphi''(t)$ par la règle des fonctions composées et faisant $t = 0$,

$$\varphi''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial a^2} h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial a \, \partial b} hk + \frac{\partial^2 f}{\partial b^2} k^2 = Ah^2 + 2\,Bhk + Ck^2.$$

Il faut donc que cette expression ne soit pas nulle, sauf pour $h = k = 0$, et reste constamment de même signe, quelques valeurs qu'on attribue à h et k.

Si A était nul, $\varphi''(0)$ se réduisant à $k(2Bh + Ck)$ changerait de signe avec k, supposé très petit; il n'y aurait ni maximum ni minimum.

157. Supposons A différent de 0, et écrivons $\varphi''(0)$ sous la forme

$$(3) \qquad A\left(h + \frac{B}{A} k\right)^2 + \left(C - \frac{B^2}{A}\right) k^2.$$

Si les coefficients A, $C - \dfrac{B^2}{A}$ sont de même signe, c'est-à-dire si $AC - B^2 > 0$, cette expression restera de même signe que A, quelques valeurs qu'on attribue à h et à k, car ces coefficients multiplient des carrés; $f(a, b)$ sera donc un maximum si $A < 0$, un minimum si $A > 0$. Si, au contraire, on a $AC - B^2 < 0$, comme on peut toujours disposer

des arbitraires h et k de façon à annuler l'un des termes de $\varphi''(o)$, et comme ces termes ont des signes contraires, $\varphi''(o)$ changerait de signe, il n'y aurait ni maximum ni minimum pour $x = a$, $y = b$.

Enfin, si $AC - B^2 = o$, $\varphi''(o)$ s'annulera encore pour des valeurs de h, k différentes de zéro, et l'on ne peut rien conclure sans recourir aux dérivées supérieures de $\varphi(t)$.

Ainsi, la fonction

$$f(x, y) = y^4 - 2(\alpha + \beta)xy^2 + 4\alpha\beta x^2$$

conduit, en vertu des équations (2), aux relations

$$4y^3 - 4(\alpha + \beta)xy = o, \quad 8\alpha\beta x - 2(\alpha + \beta)y^2 = o,$$

système d'équations qui n'admet que la solution $x = o$, $y = o$. Formant la différentielle seconde d^2f, on trouve

$$d^2f = 4\left\{2\alpha\beta dx^2 - (\alpha + \beta)ydxdy + [3y^2 - (\alpha + \beta)x]dy^2\right\}$$

et par suite

$$A = 8\alpha\beta, \quad B = o, \quad C = o, \quad AC - B^2 = o;$$

on a donc ici $\varphi''(o) = 8\alpha\beta h^2$, quantité positive qui ferait croire à un minimum, mais qui s'annule pour $h = o$ quel que soit k. On ne peut donc conclure. On trouve en effet, en posant $y^2 = \lambda x$,

$$f(x, y) = x^2(\lambda - 2\alpha)(\lambda - 2\beta),$$

et l'on voit que $f(x, y)$ est toujours positif, sauf pour λ compris entre 2α et 2β, où f devient négatif; $f(o, o)$ n'est donc pas un minimum.

158. Une méthode semblable s'applique aux fonctions de trois ou d'un plus grand nombre de variables. On verra d'abord que, pour que $f(x, y, z)$ devienne maximum ou minimum pour un système (a, b, c) de valeurs des variables, il faut (sauf les cas de discontinuité) que $D_x f$, $D_y f$, $D_z f$ s'annulent pour ce système (a, b, c), et ce principe fournira trois équations dont les solutions pourront donner des systèmes convenables.

Ensuite, d^2f devra rester de même signe, pour $x = a$, $y = b$, $z = c$, quelles que soient les valeurs de dx, dy, dz (sauf $dx = dy = dz = o$), et en transformant d^2f en une forme quadratique homogène comme ci-dessus, on en déduira un certain nombre de conditions qui devront être vérifiées pour le maximum ou le minimum. S'il y a doute, on passera à d^3f, et ainsi de suite.

Dans certains cas, les conditions particulières du problème indiquent

d'avance s'il y a un minimum, ou s'il y a un minimum, et dispensent de cet examen détaillé.

159. *Application.* — *Trouver la plus courte distance entre deux points appartenant à deux droites données* D *et* D_1 *dans l'espace.*

Mettons les équations de ces deux droites sous une forme convenable. Soient X, Y, Z les cosinus directeurs de la droite D prise dans un sens déterminé; a, b, c, les coordonnées d'un point fixe P, x, y, z celles d'un point variable M sur cette droite, u la distance PM, positive dans le sens (X, Y, Z), négative en sens contraire. Les équations de D peuvent s'écrire

$$(4)\qquad x = a + Xu, \quad y = b + Yu, \quad z = c + Zu,$$

et de même celles de D_1,

$$(5)\qquad x_1 = a_1 + X_1u_1, \quad y_1 = b_1 + Y_1u_1, \quad z_1 = c_1 + Z_1u_1,$$

en marquant de l'indice 1 les lettres qui se rapportent à D_1. Le carré de la distance ϖ des points M et M_1 a pour expression

$$\varpi^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2,$$

et pour que ϖ^2 soit un minimum, il faut, d'après la règle du N° **156**, u et u_1 étant deux variables indépendantes, que les dérivées partielles de ϖ^2 par rapport à ces variables s'annulent, ce qui donne les équations

$$(6)\quad \begin{cases} (x_1 - x)\,X + (y_1 - y)\,Y + (z_1 - z)\,Z = 0, \\ (x_1 - x)\,X_1 + (y_1 - y)\,Y_1 + (z_1 - z)\,Z_1 = 0, \end{cases}$$

ce qui fait voir que la droite de longueur minimum OO_1 est perpendiculaire à D et à D_1. Posons

$$(7)\qquad A = YZ_1 - ZY_1, \quad B = ZX_1 - XZ_1, \quad C = XY_1 - YX_1,$$

ce qui nous donnera

$$(8)\qquad AX + BY + CZ = 0, \quad AX_1 + BY_1 + CZ_1 = 0$$

et en désignant par φ l'angle compris entre les directions de D et de D_1,

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1 - (XX_1 + YY_1 + ZZ_1)^2 = 1 - \cos^2\varphi = \sin^2\varphi,$$

$$(9)\qquad \sin\varphi = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Les équations (6) nous donneront

$$\frac{x_1 - x}{A} = \frac{y_1 - y}{B} = \frac{z_1 - z}{C} = \pm\frac{\varpi}{\sin\varphi} = \frac{A(x_1 - x) + B(y_1 - y) + C(z_1 - z)}{\sin^2\varphi}$$

A cause des équations (4), (5) et (8), le numérateur de cette dernière expression se réduit à

$$(10) \qquad \mathrm{H} = \mathrm{A}(a_1 - a) + \mathrm{B}(b_1 - b) + \mathrm{C}(c_1 - c),$$

et nous avons enfin

$$(11)\ x_1 - x = \frac{\mathrm{AH}}{\sin^2\varphi},\quad y_1 - y = \frac{\mathrm{BH}}{\sin^2\varphi},\quad \mathrm{Z}_1 - \mathrm{Z} = \frac{\mathrm{CH}}{\sin^2\varphi},\quad \varpi = \pm\frac{\mathrm{H}}{\sin\varphi}.$$

ϖ étant positif, il faudra prendre le signe $+$ ou le signe — selon que H sera positif ou négatif, c'est-à-dire selon que $x_1 - x$ sera de même signe que A ou de signe contraire ; ou encore, que la droite OO_1 sera dirigée ou non dans le sens où la rotation de (X, Y, Z) vers $(\mathrm{X}_1, \mathrm{Y}_1, \mathrm{Z}_1)$ paraît se faire de la gauche vers la droite. Pour trouver les valeurs de u et u_1 qui déterminent ces points O et O_1, on remplacera dans les équations (11) $x_1 - x$, $y_1 - y$, $z_1 - z$ par leurs valeurs tirées de (4) et (5), et en multipliant les équations ainsi obtenues respectivement par X, Y, Z et ajoutant, eu égard à l'équation (8), on aura

$$(a_1 - a)\mathrm{X} + (b_1 - b)\mathrm{Y} + (c_1 - c)\mathrm{Z} - u + u_1\cos\varphi = 0.$$

Posons

$$(12) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (a_1 - a)\mathrm{X} + (b_1 - b)\mathrm{Y} + (c_1 - c)\mathrm{Z} = p, \\ (a_1 - a)\mathrm{X}_1 + (b_1 - b)\mathrm{Y}_1 + (c_1 - c)\mathrm{Z}_1 = p_1, \end{array} \right.$$

nous aurons

$$u - u_1\cos\varphi = p, \quad u\cos\varphi - u_1 = p_1,$$

la seconde équation s'obtenant par un procédé analogue. D'où, immédiatement,

$$(13) \qquad u = \frac{p - p_1\cos\varphi}{\sin^2\varphi}, \quad u_1 = \frac{p\cos\varphi - p_1}{\sin^2\varphi}.$$

L'interprétation géométrique de ces équations est facile. Il reste à vérifier si ces valeurs correspondent effectivement à un minimum de ϖ^2. Or, on voit sans peine que

$$\frac{\partial^2\varpi^2}{\partial u^2} = 2(\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + \mathrm{Z}^2) = 2, \quad \frac{\partial^2\varpi^2}{\partial u_1^2} = 2,$$

$$\frac{\partial^2\varpi^2}{\partial u\,\partial u_1} = -2(\mathrm{XX}_1 + \mathrm{YY}_1 + \mathrm{ZZ}_1) = -2\cos\varphi,$$

et l'expression $\mathrm{AC} - \mathrm{B}^2$ du N° **158** devient $4\sin^2\varphi > 0$; d'ailleurs $\mathrm{A} = 2 > 0$, c'est donc bien un minimum.

Exercices.

1. $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dy + ex + f$.

R. La condition du N° **157** fournit la relation $b^2 - 4ac < 0$; la fonction f est un minimum pour

$$x = \frac{2ae - bd}{b^2 - 4ac}, \quad y = \frac{2cd - be}{b^2 - 4ac}.$$

2. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

R. On trouve trois solutions : $(x = +\sqrt{2},\ y - \sqrt{2})$, minimum ; $(x = -\sqrt{2},\ y = +\sqrt{2})$, minimum ; $x = 0, y = 0$, ni max. ni min.

3. $f(x, y) = a^2x^2y - 2ax^3y + x^4y - 2ax^2y^2 + 2x^3y^2 + x^2y^3$.

La fonction a-t-elle un max. ou un min. pour $x = 0,\ y = 0$?

R. On trouve ici $\varphi''(0) = 0$, $\varphi'''(0) = 6a^2h^2k$, ni max. ni min.

4. On donne, sur une droite OX, n points successifs $A_1, A_2, \ldots A_n$; trouver un point M tel que la somme des carrés de ses distances à ces points ait avec l'aire du triangle A_1MA_n le plus petit rapport possible (Sluse).

R. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ étant les distances respectives de $A_1, A_2, \ldots, A_n$ à l'origine O; (x, y) les coordonnées rect. du point M, la fonction qui doit être minimum est

$$f(x,y) = \frac{\Sigma (x - a_i)^2}{y} + ny.$$

On trouve

$$x = \frac{\Sigma a_i}{n}, \quad y = \frac{\sqrt{n\Sigma a_i^2 - (\Sigma a_i)^2}}{n}.$$

$$A = C = \frac{2n^2}{\sqrt{n\Sigma a_i^2 - (\Sigma a_i)^2}}, \quad B = 0; \quad \text{min.}$$

CHAPITRE XI.

DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS IMPLICITES.

§ I. FONCTIONS D'UNE SEULE VARIABLE INDÉPENDANTE.

160. On appelle *fonctions implicites* celles qui sont liées aux variables indépendantes par des équations non résolues. Dans l'équation

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0,$$

y est fonction implicite de x. Les règles de différentiation de ces fonctions découlent des principes que nous allons établir sur l'existence et la

continuité des fonctions définies par des équations de cette espèce, en commençant par les équations entre deux variables.

Théorème. — *Soit* $F(x, y)$ *une fonction simple des variables* x, y, *qui s'annule pour un système de valeurs* (a, b). *Si dans le voisinage de ce système, la fonction* $F(x, y)$ *et ses dérivées partielles par rapport à* x *et à* y, $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ *sont finies et continues par rapport à ces variables; si de plus* $F'_y(a, b)$ *est* $>$ *ou* $<$ 0, *il existe, dans le voisinage de la valeur* a *de* x, *une fonction simple* y *de* x *qui est finie et continue, qui vérifie l'équation* $F(x, y) = 0$, *qui prend la valeur* $y = b$ *pour* $x = a$, *et qui admet une dérivée également finie et continue.*

D'après les conditions supposées, on peut déterminer deux quantités λ et μ telles que, pour tout système (x, y) compris dans la région $(a \pm \lambda, b \pm \mu)$ ou T, on aura $\mathrm{VA}\, F'_x(x, y) < A$ et $\mathrm{VA}\, F'_y(x, y) > B$, A et B étant des nombres finis, car $F'_y(x, y)$ ne s'annulant pas au point (a, b) et étant fonction continue ne peut s'annuler dans une région déterminée autour de ce point. De plus, comme ce qui est vrai pour une valeur de λ est vrai à plus forte raison pour une valeur plus petite, on peut toujours admettre que λ et μ vérifient l'inégalité

$$(1) \qquad \lambda A < \mu B.$$

Cela posé, soient h, k des accroissements respectivement égaux ou inférieurs en valeur absolue à λ, μ; la formule de Taylor donnera, $F(a, b)$ étant nul par hypothèse,

$$(2) \quad F(a+h, b+k) = hF'_x(a+\theta h, b+\theta k) + kF'_y(a+\theta h, b+\theta k),$$

θ étant $>$ 0 et $<$ 1. Dans le second membre, F'_x a une valeur absolue $<$ A, F'_y une valeur absolue $>$ B, et si nous prenons $\mathrm{VA}\, h \leqslant \lambda$, $k = \pm \mu$, il viendra

$$\mathrm{VA}\, h\, F'_x(a+\theta h, b+\theta h) < \lambda A < \mu B < \mathrm{VA}\, k F'_y(a+\theta h, b+\theta k).$$

Le second membre de l'équation (2) aura donc le signe de son dernier terme, et comme F'_y a un signe invariable dans la région T, ce dernier terme changera de signe avec k. Donc, pour chaque valeur de h dans l'intervalle $(-\lambda, +\lambda)$, $F(a+h, b+k)$ a des signes contraires pour $k = -\mu$ et $k = +\mu$; donc, pour toute valeur de x de l'intervalle $(a-\lambda, a+\lambda)$, $F(x, y)$ admet des signes contraires pour $y = b - \mu$, $y = b + \mu$, et s'annule (**66**) pour une valeur de $y > b - \mu$ et $< b + \mu$, mais pour *une seule*, car s'il existait dans cet intervalle deux valeurs de y

donnant $F(x, y) = 0$, $F'_y(x, y)$ devait s'annuler (**91**) entre $y = b - \mu$ et $y = b + \mu$, ce qui est contre l'hypothèse.

Le système de ces valeurs de y qui, pour chaque valeur de x, annulent la fonction $F(x, y)$, constitue évidemment une fonction simple $y = \varphi(x)$ qui vérifie l'équation $F(x, y) = 0$ dans la région T. Pour $x = a$, cette fonction prend la valeur $y = b$, car on a $F(a, b) = 0$ et $\varphi(x)$ est fonction simple. Elle est aussi continue pour $x = a$, car si h, k désignent les accroissements correspondants de x et de $\varphi(x)$, on a $F(a + h, b + k) = 0$, et en vertu de l'équation (2),

$$(3) \qquad h\, F'_x(a + \theta h,\ b + \theta k) + k\, F'_y(a + \theta h,\ b + \theta k) = 0.$$

Si h a pour limite zéro, comme F'_x et F'_y conservent des valeurs finies et que VAF'_y ne peut être inférieur à B, il faut que k ait pour limite zéro. Remarquons d'ailleurs que les raisonnements faits jusqu'ici subsistent si l'on prend, au lieu du point (a, b), tout autre point (x, y) de la région T qui vérifie l'équation $F(x, y) = 0$, donc la fonction $\varphi(x)$ sera continue dans l'intérieur de cette région. Enfin, de l'équation (3) entre les accroissements de x et de $\varphi(x)$,

$$\frac{k}{h} = -\frac{F'_x(a + \theta h,\ b + \theta k)}{F'_y(a + \theta h,\ b + \theta k)},$$

nous tirons en faisant tendre h vers zéro, F'_x et F'_y étant continus pour le système de valeurs (a, b),

$$(4) \qquad \lim \frac{k}{h} = -\frac{F'_x(a, b)}{F'_y(a, b)}.$$

La fonction $\varphi(x)$ admet donc une dérivée $\varphi'(a)$ pour $x = a$, et il en est de même pour toute autre valeur de x comprise entre $a - \lambda$, $a + \lambda$, puisque le même raisonnement lui est applicable.

Ainsi l'on a, dans le voisinage du point (a, b),

$$\varphi'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)},$$

d'où la relation entre dx et dy,

$$F'_x(x, y)\, dx + F'_y(x, y)\, dy = 0,$$

ou

$$(\alpha) \qquad \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0.$$

On prouverait de même que, si les dérivées partielles du second ordre de F sont continues dans la région T, $\varphi(x)$ admettra une dérivée seconde $\varphi''(x)$, et ainsi de suite.

161. Au reste, l'existence de la fonction simple et continue de x définie par une équation donnée entre x et y, et celle de ses dérivées, étant une fois prouvées, la détermination de ces dérivées successives se fait facilement au moyen des dérivées partielles successives de $F(x, y)$. En effet, regardant $F(x, y)$ comme une *fonction composée* de x par la substitution $y = \varphi(x)$, sa dérivée $DF(x, y)$ sera nulle puisque $F(x, y)$ s'annule pour $y = \varphi(x)$, et d'après la règle du N° **143**, on aura

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0, \tag{5}$$

ce qui détermine Dy et s'accorde avec l'équation (α). De même, puisque DF est constamment nul, sa dérivée totale D^2F par rapport à x est nulle aussi, et en la formant par les principes du N° **151** et observant que l'on peut prendre dx constant, on aura

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{d^2 y}{dx^2} = 0, \tag{6}$$

équation qui donnera $d^2y : dx^2$ ou D^2y. Et ainsi de suite pour D^3y, etc...

162. Soit, comme exemple, l'équation

$$y^3 - 3axy + x^3 = 0. \tag{A}$$

La règle (5) donne, en divisant par 3,

$$(y^2 - ax)\frac{dy}{dx} + (x^2 - ay) = 0, \tag{B}$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}.$$

Différentiant de nouveau l'équation (B), nous aurons

$$(y^2 - ax)\frac{d^2y}{dx^2} + 2y\frac{dy^2}{dx^2} - 2a\frac{dy}{dx} + 2x = 0,$$

d'où, remplaçant $dy : dx$ par sa valeur ci-dessus,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{y^2 - ax}\left[x + a\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax} + y\frac{(x^2 - ay)^2}{(y^2 - ax)^2}\right]$$

$$= -\frac{2}{(y^2 - ax)^3}[x(y^2 - ax)^2 + a(x^2 - ay)(y^2 - ax) + y(x^2 - ay)^2].$$

On remarque que ces dérivées, et en général que les dérivées obtenues par cette voie, renferment dans leur expression la fonction y en même temps que la variable x, mais l'équation F $(x, y) = 0$ permet souvent de simplifier. Ainsi, si l'on développe la valeur de $d^2y : dx^2$ et que l'on ait égard à l'équation (A), on trouvera

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2a^3xy}{(y^2 - ax)^3}.$$

163. *Remarque.* La théorie ci-dessus montre que, dans une région où F, F'_x, F'_y sont des fonctions continues de (x, y) et où F'_y ne s'annule pas, l'équation $F = 0$ définit une fonction $y = \varphi(x)$ simple et continue *dans le voisinage* de chacun de ses points, mais cela n'exclut pas la possibilité que l'équation admette plusieurs solutions pour chaque valeur de x. Seulement, ces divers systèmes de valeurs de y sont séparés et constituent en quelque sorte autant de *branches* d'une même fonction ; ce n'est que dans le voisinage d'un système (a, b) pour lequel les conditions ne seraient plus remplies, en particulier, pour lequel on aurait $F'_y(a, b)$ ou $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, que plusieurs branches pourraient se réunir et que la fonction simple cesserait d'exister. On remarquera que, pour ces valeurs, les équations (4), (5), (6) ne s'appliquent plus à la détermination des dérivées de y.

Exercices.

1. $e^{3x^2+y^2} + \sin(ax + by) = 0$; $\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{a - 6x\,\mathrm{tg}\,(ax + by)}{b + 2y\,\mathrm{tg}\,(ax + by)}$.

2. $x\,\mathrm{l}.y - y\,\mathrm{l}.x = 0$; $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x^2}\,\frac{\mathrm{l}.x - 1}{\mathrm{l}.y - 1}$.

3. $y^5 - 5axy + x^5 = 0$; $\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x^4 - ay}{y^4 - ax}$, $\quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{6axy\,(x^3y^3 + 2a^2)}{(y^4 - ax)^3}$.

4. $\quad \arcsin\frac{x}{a} + \arcsin\frac{y}{b} = 0$; $\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{b^2 - y^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{x\sqrt{b^2 - y^2} + y\sqrt{a^2 - x^2}}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

5. $\quad \mathrm{l}.\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a}\right) = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{y}{x}$; $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x - y}$, $\quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2(x^2 + y^2)}{(x - y)^3}$.

6. Démontrer que si l'on a, entre x et y, l'équation

$$\alpha\beta x^2y^2 - \alpha\gamma (x^2 + y^2) - \gamma\delta = 0,$$

on aura celles-ci

$$\frac{dx}{\sqrt{(\alpha x^2 + \delta)(\beta x^2 - \gamma)}} + \frac{dy}{\sqrt{(\alpha y^2 + \delta)(\beta y^2 - \gamma)}} = 0,$$

$$dx\sqrt{\frac{\beta x^2 - \gamma}{\alpha x^2 + \delta}} + dy\sqrt{\frac{\beta y^2 - \gamma}{\alpha y^2 + \delta}} = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha\gamma}} d.\, xy.$$

7. Démontrer que les fonctions $y = \text{arc tg}\, x$, $y = \text{arc sin}\, x$ satisfont respectivement aux équations suivantes, n étant entier et positif :

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} + \frac{2nx}{1 + x^2}\frac{d^n y}{dx^n} + \frac{n(n-1)}{1+x^2}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = 0,$$

$$\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}} - \frac{(2n+1)x}{1-x^2}\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} - \frac{n^2}{1-x^2}\frac{d^n y}{dx^n} = 0.$$

8. Démontrer que la fonction $y = x : (e^x - 1)$ vérifie, pour $n > 2$ et $x = 0$, l'égalité

$$n\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right)_0 + \cdots + n\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + y_0 = 0.$$

R. On met l'équation donnée sous la forme $(e^x - 1)\, y - x = 0$; on applique la théorie ci-dessus et la formule de Leibnitz.

§ 2. FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES.

164. On établit un théorème analogue à celui du N° **160** pour les équations renfermant trois ou un plus grand nombre de variables. Nous nous bornerons ici au cas de trois variables, la démonstration étant la même dans le cas général.

Soit $F(x, y, z) = 0$ *une équation entre trois variables; si la fonction* F *et ses dérivées partielles* F'_x, F'_y, F'_z *sont des fonctions continues de ces variables dans le voisinage d'un système de valeurs* $x = a$, $y = b$, $z = c$ *qui vérifie l'équation* $F = 0$; *si de plus* $F'_z(a, b, c)$ *n'est pas nul, il existe une fonction* $z = \varphi(x, y)$ *qui jouit des propriétés suivantes :* 1° *elle vérifie identiquement l'équation* $F = 0$; 2° *elle se réduit à* $z = c$ *pour* $x = a$, $y = b$; 3° *elle est simple et continue par rapport aux variables* (x, y) *dans le voisinage du point* (a, b, c), *et admet des dérivées partielles également continues par rapport à* x *et à* y.

Eu égard aux conditions supposées, on peut déterminer une région T

limitée par $(a \pm \lambda,\ b \pm \mu,\ c \pm \nu)$, λ, μ, ν étant des quantités positives telles que, dans cette région T, les fonctions F'_x, F'_y ne puissent surpasser en valeur absolue des nombres fixes A, B, et que $\text{VA}F'_z$ reste toujours supérieur à un nombre $C > 0$. On pourra supposer en outre

$$(1) \qquad A\lambda + B\mu < C\nu,$$

car on peut réduire à volonté λ et μ. Désignons par h, k, l des quantités positives ou négatives, en valeur absolue égales ou inférieures à λ, μ, ν respectivement; il sera permis d'écrire, par la formule de Taylor

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} F(a+h, b+k, c+l) = hF'_x(a+\theta h, b+\theta k, c+\theta l) \\ + kF'_y(a+\theta h, \ldots) + lF'_z(a+\theta h, \ldots), (0 < \theta < 1), \end{array} \right.$$

On prouvera par l'inégalité (1), comme au N° **160**, que le second membre doit être de même signe que son dernier terme, si l'on prend

$$l = \pm\nu, \quad \text{VA}\, h < \lambda, \quad \text{VA}\, k < \mu.$$

$F(a+h, b+k, c+l)$ changera donc de signe si, pour des valeurs données de h, k on prend successivement $z = c - \nu$, $z = c + \nu$, et s'annulera par conséquent pour une valeur de z comprise entre ces deux limites; donc, pour chaque système de valeurs de x, y pris dans l'intérieur de la région T, il existe une valeur de z (et une seule, à cause de $\text{VA}\, F'_z > C$) qui vérifie l'équation $F(x, y, z) = 0$. Cette valeur de z est une fonction simple $z = \varphi(x, y)$ des variables, qui se réduit à c pour $x = a$, $y = b$. Cette fonction est continue par rapport à x et y au point (a, b), car si h, k, l désignent les accroissements infiniment petits de x, y et de cette fonction z, on aura $F(a+h, b+k, c+l) = 0$ et l'équation (2) montre que l tendra vers zéro en même temps que h et k. De plus, si l'on fait $k = 0$, on tire de cette même équation

$$hF'_x(a+\theta h, b, c+\theta l) + lF'_z(a+\theta h, b, c+\theta l) = 0,$$

d'où, h tendant vers la limite zéro,

$$\lim \frac{l}{h} = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(a, b, c)}{F'_z(a, b, c)}.$$

Mais on peut raisonner de même sur tout système de valeurs (x, y, z) qui vérifie l'équation $F = 0$ dans l'intérieur de la région T; la fonction $\varphi(x, y)$ est donc continue dans le voisinage du point (a, b), et de plus, on aura en général

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial z},$$

c'est-à-dire que la fonction z des variables x et y définie par l'équation $F = 0$ admettra une dérivée partielle par rapport à x dans la région T, dérivée qui sera elle-même continue. Le même raisonnement s'applique à la variable y, le théorème est donc démontré.

165. Les dérivées partielles premières de z sont données par les équations

$$(3) \qquad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

On en tirera la différentielle totale dz par la formule connue

$$(4) \qquad dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{dz}{\partial y}dy.$$

Si l'on admet que les dérivées partielles successives de $F(x, y, z)$ soient encore des fonctions continues des variables x, y, z dans la région T, on établira de la même manière l'existence et la continuité des dérivées partielles successives

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \quad \ldots$$

et par suite des différentielles totales d^2z, d^3z, ... Mais leur existence admise, on les calculera le plus simplement comme il suit :

La fonction $F(x, y, z)$ a une valeur constante nulle si z représente $\varphi(x, y)$, sa différentielle totale est donc nulle, et en la formant par la règle du N° **147**, ce qui est permis, on a l'équation

$$(5) \qquad \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial x}dz = 0,$$

qui fournit la valeur de dz, puisque D_zF est supposé $\gtrless 0$. En ayant égard à la formule (4), on aura ensuite les dérivées partielles de z par le principe du N° **153** et l'on retombera sur les relations (3).

De même, considérant le premier membre de (5) comme une fonction de x, y et égalant sa différentielle totale à zéro, on aura (**152**)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}dz^2 +$$

$$2\frac{\partial F^2}{\partial x \partial z}dxdz + 2\frac{\partial F^2}{\partial y \partial z}dydz + \frac{\partial F}{\partial z}d^2z = 0;$$

cette équation donnera la valeur de d^2z, lorsqu'on y aura substitué celle de dz calculée plus haut, en fonction de dx, dy. On en déduira $D_x^2 z$, $D_y^2 z$, $D_x D_y z$ au moyen du principe du N° **153**. Et ainsi de suite.

166. *Exemple.* Soit z une fonction de x, y définie par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Égalant à zéro la différentielle du premier membre, nous avons

$$\frac{xdx}{a^2}+\frac{ydy}{b^2}+\frac{zdz}{c^2}=0,$$

d'où

$$dz=-\frac{c^2}{z}\left(\frac{x}{a^2}\,dx+\frac{y}{b^2}\,dy\right).$$

Différentions une seconde fois l'équation; dx et dy sont constants, et il vient

$$\frac{dx^2}{a^2}+\frac{dy^2}{b^2}+\frac{dz^2}{c^2}+\frac{z}{c^2}\,d^2z=0,$$

d'où, tirant la valeur de d^2z et remplaçant dz^2 par son expression, on trouve

$$d^2z=-\frac{c^4}{z^3}\left[\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{dx^2}{a^2}+\frac{2xy}{a^2b^2}\,dxdy+\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{dy^2}{b^2}\right],$$

ce qui se réduit par l'équation entre x, y, z, à

$$d^2z=-\frac{c^4}{a^2b^2z^3}\left[(b^2-y^2)\,dx^2+2xydxdy+(a^2-x^2)\,dy^2\right].$$

Connaissant dz, d^2z, on aura sans peine

$$D_x^2z,\quad D_yD_xz,\quad D_y^2z,\ \text{etc.}\ \ldots$$

167. Enfin, des théorèmes analogues peuvent être démontrés pour un système de m fonctions $y_1, .., y_m$ de n variables $x_1, .., x_n$, définies par un système de m équations entre ces variables, lorsque ces équations satisfont à certaines conditions; mais pour ne pas entraver la marche du cours, nous ne ferons pas ici cette généralisation (1), et, supposant établie l'existence et la continuité de ces fonctions et de leurs dérivées partielles successives, nous allons montrer comment on les détermine.

---

(1) Voir la note II à la fin du volume.

Soient

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} F_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0, \\ F_2(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0, \end{array}\right.$$

les équations données. Leurs premiers membres, considérés comme des fonctions de $x_1, \ldots, x_n$ par la substitution des valeurs de $y_1, \ldots, y_m$, sont nuls constamment. On a donc $dF_1 = 0$, $dF_2 = 0, \ldots, dF_m = 0$, et en développant ces différentielles par le principe du N° **149**, nous aurons les m équations suivantes

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial F_1}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial F_1}{\partial y_1} dy_1 + \cdots + \frac{\partial F_1}{\partial y_m} dy_m = 0, \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial F_2}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial F_2}{\partial y_1} dy_1 + \cdots + \frac{\partial F_2}{\partial y_m} dy_m = 0. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial F_m}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial F_m}{\partial y_1} dy_1 + \cdots + \frac{\partial F_m}{\partial y_m} dy_m = 0. \end{array}\right.$$

Elles sont du premier degré par rapport à $dy_1, \cdots, dy_m$ et l'on en tirera les valeurs de ces différentielles totales, si le déterminant de leurs coefficients est différent de zéro, comme on doit d'ailleurs le supposer.

On différentiera ensuite ces mêmes équations (7) par rapport à $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m, dy_1, \ldots, dy_m$, les différentielles des variables indépendantes étant prises constantes; on aura un système de m équations du premier degré par rapport à $d^2y_1, \ldots, d^2y_m$, que l'on résoudra par rapport à ces différentielles, et l'on aura ainsi les différentielles secondes des fonctions implicites; et ainsi de suite.

De ces différentielles totales on déduira immédiatement les dérivées partielles par le principe connu (**154**).

168. Si n se réduit à l'unité, ce qui a lieu quand le nombre total des variables ne surpasse celui des équations que d'une unité, il n'y a qu'une variable indépendante x, et une différentielle constante dx. Les opérations restent les mêmes, sauf que $dy_1, \ldots, dy_m$ deviennent des différentielles ordinaires, et pour obtenir directement les dérivées de $y_1, \ldots, y_m$ par rapport à x, il sera plus commode de diviser chaque fois les équations par dx en même temps qu'on les différentie.

Exercices.

1. $2axz + 2byz + cz^2 = k^2$.

R. $$dz = -\frac{(adx + bdy)\,z}{ax + by + cz}, \quad d^2z = \frac{k^3(adx + bdy)^2}{(ax + by + cz)^3}.$$

2. $z^3 + xy^2 - x = 0$. *R.* $dz = \frac{z}{3x}\,dx - \frac{2xy}{3z^2}\,dy$.

$$d^2z = -\frac{2}{9}\left[\frac{z}{x^2}\,dx^2 + \frac{2y}{z^2}\,dx\,dy + \frac{x^2(y^2+3)}{z^5}\,dy^2\right]$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = \frac{4}{27z^4}.$$

3. $x^x y^y z^z = a$; *R.* $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1 + \text{l}.\,x}{1 + \text{l}.\,z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1 + \text{l}.\,y}{1 + \text{l}.\,z},$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{x(1 + \text{l}.\,x)^2 + z(1 + \text{l}.\,z)^2}{xz(1 + \text{l}.\,z)^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{(1 + \text{l}.\,x)(1 + \text{l}.\,y)}{(1 + \text{l}.\,z)^3}.$$

4. Une seule variable indépendante x :

$$x + y + z = a, \quad x^2 + y^2 + z^2 = b^2.$$

R. $$\frac{dy}{dx} = \frac{z - x}{y - z}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{y - x}{z - y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3b^2 - a^2}{(z - y)^3}, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{3b^2 - a^2}{(y - z)^3}.$$

5. Deux équations entre cinq variables x, y, z, u, v :

$$uv - [\alpha(a - x) + \beta(b - y) + \gamma(c - z)] = 0.$$
$$(a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2 - v^2 = 0,$$

Former les dérivées partielles des deux premiers ordres de u et v, et prouver que l'on a

$$(a - x)\frac{\partial u}{\partial x} + (b - y)\frac{\partial u}{\partial y} + (c - z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{2u}{v^2}.$$

6. Etant données deux équations entre quatre variables

$$F_1(x, y, u, v) = 0, \quad F_2(x, y, u, v) = 0,$$

on peut y considérer u, v comme fonctions de x, y, ou x, y comme fonctions de u, v.

Les dérivées partielles de u, v dans la première hypothèse, celles de x, y, dans la seconde, vérifient les équations

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}=1, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial v}=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial v}=0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}=1.$$

7. Soient u, v des fonctions implicites de x, y, α, β, définies par deux équations de la forme

$$u=\alpha+x\,\varphi(u,v), \qquad v=\beta+y\,\psi(u,v),$$

et $f(u, v)$ une fonction quelconque de u, v. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\varphi(u,v)\frac{\partial f}{\partial \alpha}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\psi(u,v)\frac{\partial f}{\partial \beta}.$$

CHAPITRE XII.

MAXIMA ET MINIMA DES FONCTIONS IMPLICITES.

169. Les principes relatifs à ce problème ont été exposés aux chapitres VII et X, mais lorsque les fonctions ne sont pas données explicitement, le calcul se fait de différentes manières suivant les cas. Nous ne considérons ici que ceux où les fonctions et leurs dérivées satisfont aux conditions de continuité.

I. Soit y une fonction de x, définie par une équation $F(x, y)=0$; il faut trouver les valeurs de x qui rendent cette fonction un maximum ou un minimum.

L'équation donne

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0,$$

et la dérivée de y devant être nulle pour que y soit maximum ou minimum, on devra égaler à zéro la valeur de $dy : dx$ fournie par cette équation. On cherchera les systèmes de valeurs de (x, y) qui vérifient à la fois cette condition et l'équation $F(x, y) = 0$, et on les substituera dans l'expression de $d^2y : dx^2$ tirée de l'équation

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2}=0.$$

Le signe qu'elle prendra fera connaître quelles sont les valeurs de x qui donnent un maximum pour y, quelles sont celles qui donnent un minimum.

Exemple. — Soit l'équation

$$4y^3 - 3y + \sin x = 0.$$

On en déduit

$$3(4y^2 - 1)\frac{dy}{dx} + \cos x = 0, \quad 3(4y^2 - 1)\frac{d^2y}{dx^2} + 24y\frac{dy^2}{dx^2} - \sin x = 0.$$

$4y^2 - 1$ ne peut être infini, il faut donc poser $\cos x = 0$ pour que dy soit nul ; de là $\sin x = \pm 1$. La première hypothèse transforme l'équation donnée en

$$4y^3 - 3y + 1 = 0,$$

qui admet une racine simple $y = -1$ et une racine double $y = 1 : 2$, mais cette dernière doit être écartée puisqu'elle annule D_yF. On a d'ailleurs, quand $dy = 0$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\sin x}{3(4y^2 - 1)},$$

ce qui, pour $\sin x = 1$, $y = -1$, devient égal à $1 : 9 > 0$; minimum.

L'hypothèse $\sin x = -1$, combinée avec l'équation

$$4y^3 - 3y - 1 = 0,$$

conduit à un système $\sin x = -1$, $y = 1$ qui rend la dérivée seconde égale à $-1 : 9$, maximum.

En résumé, toutes les valeurs de x fournies par l'équation $\sin x = 1$ correspondent à un minimum $y = -1$, toutes les valeurs fournies par l'équation $\sin x = -1$, donnent un maximum $y = 1$.

170. — II. Soit $f(x, y)$ une fonction de deux variables, liées entr'elles par une équation

$$F(x, y) = 0,$$

en sorte que f, au fond, dépend de la seule variable x. Il faut trouver ses maxima et minima.

On égalera à zéro la dérivée *complète* de f par rapport à x, y étant considéré comme fonction de x, et l'on différentiera l'équation $F(x, y) = 0$ pour en tirer $dy : dx$. On aura ainsi

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0,$$

et en éliminant dy

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x}=0.$$

Cette nouvelle relation entre x et y, combinée avec la première, donnera les systèmes de valeurs de x, y pour lesquels f peut devenir maximum ou minimum, et l'on vérifiera s'il y a l'un ou l'autre, soit par le signe de d^2f, soit par les conditions mêmes du problème.

171. III. Considérons enfin le cas général où l'on cherche les maxima et les minima d'une fonction $f(x, y, \ldots, u) = 0$ de n variables liées entr'elles par m équations

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} F_1(x, y, \ldots, u)=0, \\ F_2(x, y, \ldots, u)=0, \\ \cdots\cdots \\ F_m(x, y, \ldots, u)=0, \end{array}\right.$$

de sorte que f est fonction de $n - m$ variables indépendantes. D'après la théorie exposée au N° **158**, tout système de valeurs de ces variables qui rend f un maximum ou un minimum annule la différentielle totale df. D'autre part, les relations (1) entre les variables entraînent les équations $dF_1 = 0$, $dF_2 = 0, \ldots, dF_m = 0$, entre leurs différentielles. On devra donc poser le système d'équations

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\cdots+\frac{\partial f}{\partial u}du=0, \\ \frac{\partial F_1}{\partial x}dx+\frac{\partial F_1}{\partial y}dy+\cdots+\frac{\partial F_1}{\partial u}du=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x}dx+\frac{\partial F_m}{\partial y}dy+\cdots+\frac{\partial F_m}{\partial u}du=0. \end{array}\right.$$

Si, entre ces $m + 1$ équations, on élimine les différentielles $du, \ldots$ des m variables que l'on regarde comme dépendant des autres $x, y, \ldots,$ on aura une équation résultante

$$Pdx + Q\,dy + \cdots = 0,$$

qui ne renfermera plus que les différentielles arbitraires dx, dy, ... et qui, par suite, se décomposera en $n - m$ autres

$$(3)\qquad P=0,\quad Q=0, \ldots.$$

Les équations (1) et (3) constituent un système de n équations entre n inconnues $x, y, \ldots, u$; les systèmes de valeurs qui vérifient simultanément (1) et (3) comprendront ceux qui satisfont au problème. Il restera à vérifier, par le signe de d^2f, si ces systèmes correspondent réellement à un maximum ou à un minimum, à moins que la nature du problème ne dispense de cet examen.

172. L'élimination des différentielles dx, dy, ... du se fait d'une manière élégante et souvent commode par la *méthode des multiplicateurs*. Après avoir multiplié les équations $dF_1 = 0, \ldots, dF_m = 0$ respectivement par des facteurs à déterminer $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, on les ajoute membre à membre avec l'équation $df = 0$, en ayant soin de grouper les termes en dx, les termes en dy, etc... On suppose ensuite que l'on dispose des m facteurs arbitraires $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, de façon à faire évanouir les coefficients des différentielles du, ... que l'on regarde comme *dépendantes;* il ne restera dans l'équation résultante que les termes affectés des différentielles *indépendantes* dx, dy, ... et ces termes devront être égalés à zéro, comme on l'a vu plus haut.

Nous sommes donc conduits à égaler à zéro, quoique pour des raisons différentes, les coefficients de toutes les différentielles, ce qui fournira les n équations

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial x} + \lambda_2 \dfrac{\partial F_2}{\partial x} + \cdots + \lambda_m \dfrac{\partial F_m}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial y} + \lambda_2 \dfrac{\partial F_2}{\partial y} + \cdots + \lambda_m \dfrac{\partial F_m}{\partial y} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial u} + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial u} + \lambda_2 \dfrac{\partial F_2}{\partial u} + \cdots + \lambda_m \dfrac{\partial F_m}{\partial u} = 0. \end{array}\right.$$

Jointes aux m équations (1), ces n équations serviront à déterminer les valeurs des n quantités $x, y, \ldots, u$ pour lesquelles f est un maximum ou un minimum, et les multiplicateurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$.

Les équations (4) sont les mêmes auxquelles on serait conduit en cherchant les maxima et minima de $f + \lambda_1 F_1 + \cdots + \lambda_m F_m$, $x, y, \ldots u$ étant traités comme *variables indépendantes*, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ comme constants.

La vérification du maximum ou du minimum de f se fait, comme on l'a vu, au moyen du signe de d^2f, où l'on traitera dx, dy, ... comme des

arbitraires, et où les différentielles des variables dépendantes du, ..., d^2u, ... seront remplacées par leurs valeurs tirées des équations $dF_1 = 0$, ..., $dF_m = 0$, $d^2F_1 = 0$, ..., $d^2F_m = 0$. Mais cette nouvelle élimination se fait aussi au moyen des multiplicateurs, car, d'une part, l'expression

$$(5) \qquad d^2f + \lambda_1 d^2F_1 + \cdots + \lambda_m d^2F_m$$

équivaut à d^2f à cause des équations $d^2F_1 = 0, \ldots d^2F_m = 0$; d'autre part, le coefficient d'une différentielle d^2u dans cette expression sera, d'après les règles de différentiation,

$$\frac{\partial f}{\partial u} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial u} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial u},$$

c'est-à-dire zéro, en vertu des équations (4). Les différentielles d^2u, ... des variables dépendantes auront donc disparu dans la valeur de d^2f mise sous la forme (5), et il suffit d'y remplacer $x, y, \ldots u$ par l'un des systèmes de valeurs fournis par les équations (4) pour reconnaître, par le signe qu'elle prendra, s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum de f. On remarque que l'expression (5) est encore la différentielle seconde de $f_1 + \lambda_1 F_1 + \cdots + \lambda_m F_m$, prise dans la même hypothèse que ci-dessus.

Exercices.

1. Trouver la route que doit suivre un rayon lumineux pour aller d'un point A à un point B dans le moindre temps possible, ces points étant situés dans deux milieux distincts où les vitesses de la lumière sont respectivement u et v.

R. A', B', étant (fig. 19) les projections des points A, B sur le plan de séparation MN des deux milieux, $AA' = a$, $BB' = b$, $A'B' = c$; x, y les angles respectifs du rayon incident et du rayon réfracté avec la normale au plan MN, la fonction qui doit être un minimum est

$$\frac{a}{u \cos x} + \frac{b}{v \cos y},$$

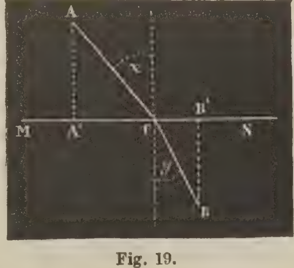


Fig. 19.

x et y satisfaisant à la relation $a \operatorname{tg} x + b \operatorname{tg} y = c$.

On trouve

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{u}{v}.$$

2. Par un point A dans un angle XOY, mener une droite dont la partie PQ interceptée par les côtés de l'angle soit un minimum.

R. Soient a, b les coordonnées du point A par rapport à OX, OY; x, y les angles aigus que fait la droite PQ avec les axes; on trouve

$$\frac{b \cos x}{\sin^2 x} = \frac{a \cos y}{\sin^2 y}.$$

Les perpendiculaires à OX en P, à OY en Q, à PQ en A, concourent en un même point.

3. Max. et min. de $\cos x \cos y \cos z$, x, y, z étant les trois angles d'un triangle.

R. On trouve $x = y = z$, triangle équilatéral, min.; $x = 0$, $y = 0$, $z = \pi$, trois côtés en ligne droite, min.

4. Déterminer les axes de la section faite dans un ellipsoïde par un plan passant par le centre.

R. Si x, y, z sont les coordonnées du point de la surface où aboutit l'un des axes, l, m, n les cosinus directeurs de la normale au plan sécant, la fonction qui doit être maximum ou minimum est

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

les variables x, y, z vérifiant les équations

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad lx + my + nz = 0.$$

La méthode des multiplicateurs donne

$$x + \lambda_1 \frac{x}{a^2} + \lambda_2 l = 0, \quad y + \lambda_1 \frac{y}{b^2} + \lambda_2 m = 0, \quad z + \lambda_1 \frac{z}{c^2} + \lambda_2 n = 0;$$

multipliant par x, y, z et ajoutant, on trouve

$$r^2 + \lambda_1 = 0, \quad \lambda_1 = -r^2,$$

d'où

$$x = \lambda_2 \frac{la^2}{r^2 - a^2}, \quad y = \lambda_2 \frac{mb^2}{r^2 - b^2}, \quad z = \lambda_2 \frac{nc^2}{r^2 - c^2},$$

d'où

$$\frac{a^2 l^2}{r^2 - a^2} + \frac{b^2 m^2}{r^2 - b^2} + \frac{c^2 n^2}{r^2 - c^2} = 0.$$

Deux valeurs pour r^2 : ce sont les carrés des demi axes de la section. On a enfin

$$\lambda_2 = \left[\frac{a^2 l^2}{(r^2 - a^2)^2} + \frac{b^2 m^2}{(r^2 - b^2)^2} + \frac{c^2 n^2}{(r^2 - c^2)^2}\right]^{-\frac{1}{2}},$$

ce qui achève de déterminer le point (x, y, z) auquel aboutit le rayon maximum ou minimum.

5. Même problème pour la surface

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2.$$

R.
$$\frac{l^2}{r^2 - a^2} + \frac{m^2}{r^2 - b^2} + \frac{n^2}{r^2 - c^2} = 0.$$

6. Partager un nombre donné a en trois parties x, y, z telles que $f = x^m y^n z^p$ soit un maximum (m, n, p entiers et positifs).

R.
$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p} = \frac{a}{m+n+p}.$$
$$d^2 f = -f\left(\frac{x^2}{m}dx^2 + \frac{y^2}{n}dy^2 + \frac{z^2}{p}dz^2\right) < 0, \quad \text{max.}$$

7. Par un point donné (a, b, c) mener le plan qui fait avec les plans coordonnés rectangulaires, le tétraèdre de volume minimum V.

R. Soit
$$l(x-a) + m(y-b) + n(z-c) = 0$$
l'équation du plan cherché. On trouvera
$$al = bm = cn, \qquad V = \frac{9}{2}abc.$$

8. Quel est le triangle sphérique de moindre périmètre parmi ceux qui ont une surface donnée ?

7. Soient x, y, z les côtés du triangle, $2p$ son périmètre. On a
$$2p = x + y + z, \quad \operatorname{tg}\frac{p}{2}\operatorname{tg}\frac{p-x}{2}\operatorname{tg}\frac{p-y}{2}\operatorname{tg}\frac{p-z}{2} = \text{const.}$$

On trouve
$$x = y = z,$$
le triangle est équilatéral.

9. Déterminer les maxima et minima de la fonction
$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2,$$
les variables étant liées entr'elles par l'équation
$$F_1(x, y, z) = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + 2b_1yz + 2b_2zx + 2b_3xy = 1.$$

R. L'application de la méthode (**172**) conduit aux équations
$$x + \lambda_1(a_1x + b_3y + b_2z) = 0,$$
$$y + \lambda_1(b_3x + a_2y + b_1z) = 0,$$
$$z + \lambda_1(b_2x + b_1y + a_3z) = 0,$$
d'où, posant $1 : \lambda = -\omega$, on tire
$$\begin{vmatrix} \omega - a_1 & -b_3 & -b_2 \\ -b_3 & \omega - b_2 & -b_1 \\ -b_2 & -b_1 & \omega - b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation a trois racines réelles en ω. Discussion (Voir Lipschitz, *Diff. und Integral Rechnung*, p. 326).

CHAPITRE XIII.

DU CHANGEMENT DES VARIABLES.

§ 1. FONCTIONS D'UNE SEULE VARIABLE.

173. Soit y une fonction, ordinairement inconnue, de x, et

$$(1) \qquad V = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\right)$$

une expression renfermant les variables et les dérivées de y jusqu'à un certain ordre. Le *premier problème* que nous allons résoudre est celui-ci : Etant donnée une équation $x = \varphi(t)$ entre x et une nouvelle variable, introduire t au lieu de x dans V, et par suite les dérivées de y par rapport à t au lieu des dérivées par rapport à x. C'est le *changement de la variable indépendante.*

Nous exprimerons d'abord comme il suit les dérivées $D_x y$, $D_x^2 y$, ... au moyen des dérivées de x et de y par rapport à t, que nous désignerons respectivement par $x', x'', x''', \ldots y', y'', y''', \ldots$ Considérant y comme fonction de x et x comme fonction de t, la règle des fonctions de fonctions nous donne successivement

$$y' = D_x y \cdot x', \quad y'' = D_x^2 y \cdot x'^2 + D_x y \cdot x'',$$
$$y''' = D_x^3 y \cdot x'^3 + 3 D_x^2 y \cdot x' x'' + D_x y \cdot x''',$$

et ainsi de suite. De là on tire successivement

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} & D_x y = \frac{y'}{x'}, \quad D_x^2 y = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^3}, \\ & D_x^3 y = \frac{(x'y''' - y'x''')\,x' - 3\,(x'y'' - y'x'')\,x''}{x'^5}, \end{aligned} \right.$$

et ainsi de suite. La loi générale est assez compliquée. On peut aussi écrire ces formules, en désignant par dx, d^2x, ... dy, d^2y, ... les différentielles successives de x et de y par rapport à t,

$$D_x y = \frac{dy}{dx}, \quad D_x^2 y = \frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{dx^3},$$

$$D_x^3 y = \frac{(dx\, d^3y - dy\, d^3x)\, dx - 3\,(dx\, d^2y - dy\, d^2x)\, d^2x}{dx^5},$$

etc... Il suffit de multiplier haut et bas la première par dt, la deuxième par dt^3, la troisième par dt^5, etc...

174. Cela posé, pour résoudre le problème, on commencera par exprimer les dérivées de y qui figurent dans l'expression de V, au moyen des formules (2), en fonction des dérivées de x et de y par rapport à t; l'équation entre x et t permettra de calculer x', x'', ... en fonction de t, et il ne restera plus qu'à éliminer x de l'expression (1) au moyen de cette même équation pour que le problème soit résolu.

Exemple. Étant donnée entre x et y *l'équation différentielle*

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + a^2y = 0,$$

la transformer en une équation du même ordre entre y et t au moyen de la substitution $x = \cos t$.

On a

$$x' = -\sin t, \quad x'' = -\cos t,$$

et par les formules (2),

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin t}\frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\sin^2 t}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{\cos t}{\sin^3 t}\frac{dy}{dt}.$$

Substituant et réduisant, éliminant x, on a, pour l'équation entre y et t,

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a^2y = 0.$$

175. Le *deuxième problème* est celui-ci : Étant données deux équations entre x, y et deux nouvelles variables u et t,

$$F(x, y, u, t) = 0, \quad F_1(x, y, u, t) = 0,$$

exprimer V au moyen de u, t et des dérivées de u par rapport à t. C'est le changement de toutes les variables.

Différentions les équations $F = 0$, $F_1 = 0$, en considérant t comme variable indépendante, d'après la méthode du N° **167**. Nous en déduirons x', x'', ... y', y'', ... en fonction des variables x, y, u, t et des dérivées successives de u par rapport à t; en les substituant dans les équations (2), nous aurons les dérivées D_xy, D_x^2y, ... exprimées au moyen des dérivées de même ordre, au plus, de u par rapport à t. Nous porterons ces valeurs dans l'expression de V, nous éliminerons x et y au

moyen des mêmes équations $F=0$, $F_1=0$, et nous aurons une expression de la forme

$$V=\varphi\left(u, t, \frac{du}{dt}, \frac{d^2u}{dt^2}, \ldots\right)$$

qui donnera la transformation demandée.

Ce cas se présente lorsque, une grandeur géométrique étant exprimée en coordonnées rectangulaires x, y, on veut trouver sa valeur en coordonnées polaires r, θ, par les relations.

$$x=r\cos\theta, \quad y=r\sin\theta.$$

On a

$$\frac{dx}{d\theta}=\cos\theta\frac{dr}{d\theta}-r\sin\theta, \quad \frac{dy}{d\theta}=\sin\theta\frac{dr}{d\theta}+r\cos\theta,$$

$$\frac{d^2x}{d\theta^2}=\cos\theta\frac{d^2r}{d\theta^2}-2\sin\theta\frac{dr}{d\theta}-r\cos\theta,$$

$$\frac{d^2y}{d\theta^2}=\sin\theta\frac{d^2r}{d\theta^2}+2\cos\theta\frac{dr}{d\theta}-r\sin\theta, \text{ etc...}$$

Les relations (2) donnent ensuite

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin\theta\frac{dr}{d\theta}+r\cos\theta}{\cos\theta\frac{dr}{d\theta}-r\sin\theta}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{r^2+2\frac{dr^2}{d\theta^2}-r\frac{d^2r}{d\theta^2}}{\left(\cos\theta\frac{dr}{d\theta}-r\sin\theta\right)^3}, \text{ etc...}$$

Substituant les valeurs de x, y, D_xy, D_x^2y, ... dans une expression de la forme de V, on aura résolu la question.

Exercices.

1. $V=(a^2+x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}, \quad x=\frac{a}{2}(e^t-e^{-t}).$

R. $$V=\frac{d^2y}{dt^2}.$$

2. $(a+x)^3\frac{d^3y}{dx^3}+3(a+x)^2\frac{d^2y}{dx^2}+(a+x)\frac{dy}{dx}+by=0, \quad a+x=e^t.$

R. $$\frac{d^3y}{dt^3}+by=0.$$

3. Transformer, en prenant y pour variable indépendante,

$$\frac{d^2y}{dx^2}-x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+e^y\left(\frac{dy}{dx}\right)^3=0.$$

R. On exprime les dérivées $D_x y$, $D_x^2 y$ en fonction des dérivées $D_y x$, $D_y^2 x$ en faisant $t = y$ dans les équations (2). On trouve

$$\frac{d^2x}{dy^2} + x = e^y.$$

4. Transformer, par les relations $x = r \cos\theta$, $y = r \sin\theta$, les expressions

$$V = \frac{x\frac{dy}{dx} - y}{x + y\frac{dy}{dx}}, \quad V_1 = \frac{x\frac{dy}{dx} - y}{\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}}, \quad V_2 = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

R. $$V = r\frac{d\theta}{dr}, \quad V_1 = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}}}, \quad V_2 = \frac{\left(r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\frac{dr^2}{d\theta^2} - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}.$$

5. Transformer V_2 (ex. **4**) en u et t, par les relations

$$\frac{dy}{dx} = \text{tg.}\, t, \quad dx^2 + dy^2 = du^2. \qquad R.\ V_2 = \frac{du}{dt}.$$

6. Même problème par les relations

$$t = \frac{dy}{dx}, \quad u = y - tx. \qquad R.\ V_2 = -(1 + t^2)^{\frac{3}{2}}\frac{d^2u}{dt^2}.$$

§ 2. FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES.

176. Les fonctions de deux ou de plusieurs variables donnent lieu à des problèmes analogues aux précédents. Soit z une fonction inconnue de deux variables indépendantes x et y, et

$$(1) \qquad V = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \cdots\right)$$

une expression renfermant les variables et les dérivées partielles de z jusqu'à un certain ordre.

Le premier problème (*changement des variables indépendantes*) consiste à exprimer V en fonction de deux nouvelles variables u et t liées à x et à y par deux équations données, et des dérivées partielles successives de z par rapport à u et à t.

La première chose à faire est d'exprimer, en fonction de ces dernières dérivées, les dérivées partielles $D_x z$, $D_y z$, $D_x^2 z$, ... La méthode la plus commode *en pratique* est celle-ci : z étant fonction de x, y, qui sont

eux-mêmes des fonctions de u, t, on a, par la règle des fonctions composées,

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},\quad \frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}. \tag{2}$$

Les dérivées partielles de x, y par rapport à u et à t sont données, en fonction de u, t, par les deux équations entre x, y, u, t. On a donc là deux équations du premier degré qui donneront $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ en fonction de $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$.

On aura ensuite, en opérant d'après le même principe.

$$(3)\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}&=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2},\\
\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial t}&=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial t}\right)+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial t},\\
\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}&=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.
\end{aligned}\right.$$

Ces trois équations feront connaître les dérivées $D_x^2 z$, $D_y^2 z$, $D_x D_y z$ en fonction de $D_u^2 z$, $D_t^2 z$, $D_u D_t z$, et des dérivées premières ; et ainsi de suite. Substituant ces valeurs dans l'expression (1) et éliminant les variables x et y, on aura la transformation demandée.

177. Prenons comme exemple l'expression

$$V=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

avec les relations $x=u\cos\psi$, $y=u\sin\psi$.

Les équations (2) deviennent ($t=\psi$)

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\psi+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\psi,\quad \frac{\partial z}{\partial \psi}=-\frac{\partial z}{\partial x}u\sin\psi+\frac{\partial z}{\partial y}u\cos\psi,$$

d'où l'on déduirait sans peine $D_x z$, $D_y z$.

On aura ensuite, en dérivant de nouveau partiellement,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}&=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cos^2\psi+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\sin\psi\cos\psi+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\sin^2\psi,\\
\frac{\partial^2 z}{\partial \psi^2}&=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}u^2\sin^2\psi-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}u^2\sin\psi\cos\psi+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}u^2\cos^2\psi\\
&\qquad-\frac{\partial z}{\partial x}u\cos\psi-\frac{\partial z}{\partial y}u\sin\psi,
\end{aligned}$$

d'où l'on tire, en divisant la seconde équation par u^2, ajoutant, et ayant égard à la valeur ci-dessus de $D_u z$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \psi^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{1}{u}\cdot\frac{\partial z}{\partial u},$$

donc, enfin,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \psi^2}+\frac{1}{u}\frac{\partial z}{\partial u}.$$

La forme des équations a permis ici de simplifier quelque peu la méthode générale.

178. On suivrait une marche analogue si l'on avait à transformer une expression dépendant d'un plus grand nombre de variables, et nous en donnerons un exemple remarquable. Supposons qu'il s'agisse d'exprimer la fonction

$$V=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2},$$

U étant une fonction de x, y, z, au moyen des coordonneés polaires r, θ, ψ, avec les relations

$$x=r\sin\theta\cos\psi,\quad y=r\sin\theta\sin\psi,\quad z=r\cos\theta.$$

Au lieu de suivre la méthode sans modification, nous opérerons deux transformations successives; posant

$$r\sin\theta=u,\quad \text{d'où}\quad x=u\cos\psi,\ y=u\sin\psi,$$

et éliminant d'abord x et y seulement, nous aurons, le calcul étant le même que ci-dessus,

$$(\alpha)\qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 U}{\partial u^2}+\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2}+\frac{1}{u}\frac{\partial U}{\partial u}.$$

Ensuite, éliminant u et z au moyen des relations

$$z=r\cos\theta,\quad u=r\sin\theta,$$

on aura évidemment, par un calcul identique,

$$(\beta)\qquad \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial u^2}=\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}.$$

Ajoutant membre à membre les deux égalités (α) et (β), on trouve

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}+\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2}+\frac{1}{u}\frac{\partial U}{\partial u}.$$

Il faut encore exprimer ce dernier terme en r et θ; comme x et θ peuvent être considérés comme fonctions de u et z, vu que l'on a

$$r^2 = u^2 + z^2, \quad \operatorname{tg}\theta = u : z,$$

d'où

$$\frac{\partial r}{\partial u} = \frac{u}{r} = \sin\theta, \quad \frac{\partial\theta}{\partial u} = \frac{\cos^2\theta}{z} = \frac{\cos\theta}{r},$$

on aura aussi

$$\frac{\partial U}{\partial u} = \frac{\partial U}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial U}{\partial\theta}\frac{\cos\theta}{r},$$

d'où

$$V = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2} + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial\psi^2}.$$

Si l'on observe enfin que l'on a

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 . Ur}{\partial r^2},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\theta} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right),$$

on trouvera pour la transformation demandée

$$V = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 . Ur}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial\psi^2}.$$

179. Le second problème, celui du *changement de toutes les variables* dans l'expression (1), consiste à introduire, au lieu des variables x, y, z, trois nouvelles variables v, u, t, liées aux précédentes par trois relations données, de sorte que, u et t étant regardés comme les nouvelles variables indépendantes, il faut introduire dans (1), au lieu des dérivées de z par rapport à x et à y, les dérivées partielles de v par rapport à u et à t.

Soient les relations données

$$(4) \qquad x = f(v, u, t), \quad y = f_1(v, u, t), \quad z = f_2(v, u, t);$$

v étant fonction de u, t, les relations (2) prendront la forme suivante :

$$(5) \begin{cases} \dfrac{\partial f_2}{\partial u} + \dfrac{\partial f_2}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial u}\right) + \dfrac{\partial z}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial u} + \dfrac{\partial f_1}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial u}\right), \\[2ex] \dfrac{\partial f_2}{\partial t} + \dfrac{\partial f_2}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial t} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial t}\right) + \dfrac{\partial z}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial t} + \dfrac{\partial f_1}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial t}\right). \end{cases}$$

Ces deux équations donneront les expressions de $D_x z$, $D_y z$ en fonction des variables et de $D_u v$, $D_t v$, car les autres dérivées partielles qui y figurent se tirent facilement des équations (4).

En dérivant partiellement les équations (5) par rapport à u et à t, et observant toujours que v est fonction de u et de t, on trouvera trois équations distinctes, qu'on pourrait d'ailleurs tirer des équations (3), et desquelles il sera facile de déduire $D_x^2 z$, $D_y^2 z$, $D_x D_y z$ en fonction des variables, des dérivées partielles du premier et du second ordre de v par rapport à u et à t, et ainsi de suite. Substituant ces expressions dans la formule (1) et remplaçant x, y, z par leurs valeurs en v, u, t, on aura la transformation demandée.

Ces principes s'étendent au cas où le nombre des variables indépendantes est supérieur à deux ; il suffit de les appliquer directement à chaque cas, ce qui sera plus commode que d'établir des formules générales assez compliquées.

Exercices.

1. Transformer, en posant $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, les expressions

$$V_1 = x\frac{\partial z}{\partial y} - y\frac{\partial z}{\partial x}, \quad V_2 = x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}.$$

R.
$$V_1 = \frac{\partial z}{\partial \theta}, \quad V_2 = r\frac{\partial z}{\partial r}.$$

2. Transformer par les relations $x + y = u$, $x - y = t$, l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0. \qquad R.\ \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial t} = 0.$$

3.
$$V = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2, \quad x = \alpha u + \beta t, \quad y = \alpha_1 u + \beta_1 t.$$

R.
$$V = \frac{1}{(\alpha\beta_1 - \alpha\beta_1)^2}\left[\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial t}\right)^2\right].$$

Cette propriété peut être généralisée.

4. Transformer les expressions

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2},$$

par la substitution *orthogonale*

$$\begin{array}{lll} x = ax' + by' + cz', & a^2 + b^2 + c^2 = 1, & aa' + bb' + cc' = 1, \\ y = a'x' + b'y' + c'z', & a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1, & aa'' + bb'' + cc'' = 1, \\ z = a''x' + b''y' + c''z', & a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1, & a'a'' + b'b'' + c'c'' = 1. \end{array}$$

R. $$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 = \left(\frac{\partial U}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z'}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z'^2}.$$

5. Transformer l'expression

$$V = x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + z^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + yz \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} + zx \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} + xy \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y},$$

au moyen des relations

$$x = uv, \quad y = vt, \quad z = tu.$$

R. $$V = \tfrac{1}{2}\left(t^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + u^2 \frac{\partial^2 U}{\partial u^2} + v^2 \frac{\partial^2 U}{\partial v^2}\right).$$

6. Transformer l'expression $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ en prenant λ, μ, ν pour variables, au moyen des relations

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1.$$

$$\frac{x^2}{a^2+\mu} + \frac{y^2}{b^2+\mu} + \frac{z^2}{c^2+\mu} = 1,$$

$$\frac{x^2}{a^2+\nu} + \frac{y^2}{b^2+\nu} + \frac{z^2}{c^2+\nu} = 1,$$

avec la condition $\lambda > \mu > \nu$.

R. Résolvant par rapport à x^2, y^2, z^2, on aura les expressions de ces variables en fonction des nouvelles,

$$x^2 = \frac{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)(a^2+\nu)}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)};$$

y^2, z^2 par permutation de a en b, b en c, c en a. On démontre facilemeni que l'on a

$$\frac{x^2}{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)} + \frac{y^2}{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)} + \frac{z^2}{(c^2+\lambda)(c^2+\mu)} = 0,$$

et deux autres équations semblables; puis

$$\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2} + \frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2} = \frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)},$$

et deux autres semblables. Tirant dx, dy, dz des valeurs de x^2, y^2, z^2 et réduisant, on a

$$4ds^2 = \frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}\,d\lambda^2 + \frac{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}{(a^2+\mu)(b^2+\mu)(c^2+\mu)}\,d\mu^2$$
$$+ \frac{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}{(a^2+\nu)(b^2+\nu)(c^2+\nu)}\,d\nu^2$$

7. Deux fonctions φ, φ_1 des variables x, y, z vérifient l'équation

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}=0,$$

transformer cette égalité en introduisant les variables λ, μ, ν (ex. **6**).

R.

$$(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)(\mu-\nu)\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\lambda}$$

$$+(a^2+\mu)(b^2+\mu)(c^2+\mu)(\nu-\lambda)\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\mu}$$

$$+(a^2+\nu)(b^2+\nu)(c^2+\nu)(\lambda-\mu)\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\nu}=0.$$

8. $V=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$; transformer en r, θ, ψ par les formules du N° **178**.

R. $V=\sqrt{\sin^2\theta\left[r^2+\left(\frac{\partial r}{\partial\theta}\right)^2\right]+\left(\frac{\partial r}{\partial\psi}\right)^2} : \sin\theta\left(\sin\theta\frac{\partial r}{\partial\theta}+r\cos\theta\right).$

LIVRE DEUXIÈME.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

CHAPITRE XIV.

TANGENTES ET NORMALES AUX COURBES PLANES.

180. Il a été établi au N° **50** que si l'équation d'une courbe plane en coordonnées rectilignes est $y = f(x)$, et si la fonction $f(x)$ admet une dérivée pour une valeur de x, le coefficient angulaire τ de la tangente au point correspondant $M(x, y)$ sera donné par l'équation

$$\tau = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Si donc nous désignons par (ξ, η) les coordonnées courantes de la tangente, l'équation de cette droite sera

$$(1) \qquad \eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x).$$

L'équation de la courbe se présente souvent sous la forme

$$F(x, y) = 0,$$

d'où l'on déduit par différentiation

$$(\alpha) \qquad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0,$$

et en substituant la valeur de $dy : dx$ tirée de cette formule dans

l'équation (1), on a l'équation de la tangente sous cette forme commode

$$(2) \qquad (\xi - x)\frac{\partial F}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

181. La normale est la perpendiculaire à la tangente, élevée par le point de contact. Lorsque *les axes sont supposés rectangulaires*, son coefficient angulaire est $-1:\tau$, et en joignant à cette condition celle de passer par le point (x, y), on a pour l'équation de la normale

$$(3) \qquad \eta - y = -\frac{dx}{dy}(\xi - x),$$

ξ, η étant ici les coordonnées courantes de la normale. On lui donne aussi la forme suivante pour le cas où l'équation de la courbe est $F(x, y) = 0$:

$$(4) \qquad (\xi - x)\frac{\partial F}{\partial y} - (\eta - y)\frac{\partial F}{\partial x} = 0,$$

182. La *sous-tangente* S_t est la distance PT (fig. 10) du pied de l'ordonnée au point T où la tangente coupe l'axe des x, prise avec le signe $+$ lorsqu'elle tombe à droite, avec le signe $-$ lorsqu'elle tombe à gauche du point P.

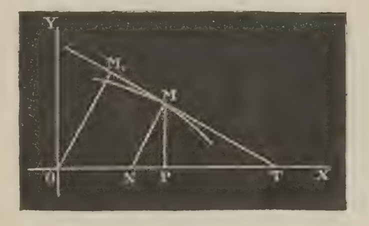


Fig. 10.

La *sous-normale* S_n est, de même, la distance PN du pied de l'ordonnée au point N où la normale coupe l'axe des x. On voit par là que S_t, S_n sont les valeurs de $\xi - x$ tirées respectivement des équations de la tangente et de la normale où l'on fait $\eta = 0$. On a donc

$$(5) \qquad S_t = -y\frac{dx}{dy}, \quad S_n = y\frac{dy}{dx}.$$

Enfin, les *longueurs* T et N *de la tangente et de la normale* se comptent du point de contact M aux points où ces droites coupent l'axe des x. On a donc, par les triangles rectangles MPT, MPN,

$$(6) \qquad T = \pm y\sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}}, \quad N = \pm y\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}.$$

On donnera au radical le signe convenable pour obtenir un résultat positif.

183. On a souvent à calculer la perpendiculaire $OM_1 = P$ abaissée de l'origine des coordonnées sur la tangente. Soient (x_1, y_1) les coordonnées du point M_1; ce point étant à la fois sur la droite OM_1 parallèle à la normale, et sur la tangente en M, satisfait aux équations

$$\frac{y_1}{x_1} = -\frac{dx}{dy}, \quad y_1 - y = \frac{dy}{dx}(x_1 - x),$$

d'où l'on tire par l'élimination de $dy : dx$

$$(\beta) \qquad x_1^2 + y_1^2 - xx_1 - yy_1 = 0.$$

On peut aussi écrire

$$(7) \qquad x_1\,dx + y_1\,dy = 0, \quad x_1\,dy - y_1\,dx = x\,dy - y\,dx.$$

Elevant au carré et ajoutant, on a

$$(x_1^2 + y_1^2)(dx^2 + dy^2) = (x\,dy - y\,dx)^2,$$

d'où l'on tire

$$(8) \qquad P = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \pm \frac{xdy - ydx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}},$$

en déterminant le signe de façon à avoir un résultat positif. Si l'équation de la courbe est sous la forme $F(x, y) = 0$, il suffit de remplacer dy par sa valeur tirée de l'équation (α); on trouve

$$(9) \qquad P = \pm\left(x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y}\right) : \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{dy}\right)^2}.$$

Si l'on remplace dy par sa valeur dans les équations (7), qu'on supprime le facteur dx, et qu'on élimine x et y entre les équations (7) et l'équation de la courbe, on aura entre x_1, y_1 l'équation du lieu géométrique du point M_1. C'est la *podaire* de la courbe donnée par rapport au point O.

184. *Application à quelques exemples.*

1. *Ellipse* : $\quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \quad a^2 - b^2 = c^2.$

Tangente : $\dfrac{\xi x}{a^2} + \dfrac{\eta y}{b^2} = 1$; Normale : $\dfrac{a^2\xi}{x} - \dfrac{b^2\eta}{y} = c^2$.

$$S_t = \frac{a^2 - x^2}{x}, \quad S_n = -\frac{b^2}{a^2}x, \quad T = \frac{a^2 y}{x}\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}},$$

$$N = b^2\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}, \quad P = \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad NP = b^2.$$

2. *Hyperbole* : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a^2 + b^2 = c^2$;

changer b^2 en $-b^2$ dans les résultats obtenus pour l'ellipse.

3. *Parabole* : $y^2 = 2px.$

Tangente : $\eta y = p(\xi + x)$; Normale : $(\xi - x)y + (\eta - y)p = 0.$

$S_t = -\frac{y^2}{p}$, $S_n = p$, constante; $T = \sqrt{2x(p+2x)}$, $N = \sqrt{p(p+2x)}$.

4. *Logarithmique* : $y = ae^{mx}$, $S_t = -\frac{1}{m}$, const..

5. *Cycloïde*. — C'est la courbe OMD engendrée par un point d'une circonférence qui roule sur une droite OX *sans glisser*, c'est-à-dire de manière que la distance entre deux points de contact successifs O et A soit égale à l'arc MA compris entre les points correspondants sur la circonférence.

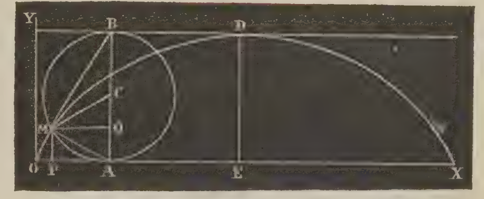


Fig. 11.

L'origine étant au point O, OX étant l'axe des x, l'axe OY perpendiculaire, appelons a le rayon AC du cercle, ω l'angle ACM entre le point de contact A du cercle mobile et le point décrivant M; abaissons MP, MQ perpendiculaires sur OX et sur le rayon OA. On aura immédiatement

$$x = OP = OA - AP = a\omega - a \sin \omega,$$

$$y = MP = AQ = AC - CQ = a - a \cos \omega.$$

Les équations de la cycloïde sont donc

$$(\gamma) \qquad x = a(\omega - \sin \omega), \quad y = a(1 - \cos \omega).$$

L'élimination de ω donne

$$x = a \arccos \frac{a-y}{a} \mp \sqrt{2ay - y^2},$$

mais il vaut mieux conserver les équations sous la forme (γ), x et y étant exprimés en fonction d'une même variable ω.

Ces équations montrent que la courbe se compose d'une suite indéfinie d'*arcades* égales OMDX, contiguës, ayant une base $2\pi a$ égale à la circonférence du cercle générateur et une ordonnée maximum égale à $2a$, de

part et d'autre de laquelle l'arcade est symétrique. Il suffit donc de faire varier ω de 0 à 2π.

Cherchons le point où la normale en M coupe l'axe des x; l'équation de la normale donne pour ce point

$$\xi = x + y\frac{dy}{dx},$$

et l'équation de la courbe

$$dx = a(1 - \cos\omega)\,d\omega = y\,d\omega, \quad dy = a\sin\omega\,d\omega,$$

donc

$$\xi = a(\omega - \sin\omega) + a\sin\omega = a\omega = \text{OA};$$

la normale MA *passe par le point de contact du cercle générateur et de la droite* OX, et la tangente MD passe par le point D diamétralement opposé à A.

185. *Coordonnées polaires.* — Soient M un point quelconque d'une courbe, O le *pôle*, OX l'*axe polaire*, OM $= r$ le *rayon vecteur*, XOM $= \theta$ l'*argument* du point M;



Fig. 12.

$$r = f(\theta) \quad \text{ou} \quad F(r, \theta) = 0$$

l'équation de la courbe dans ce système de coordonnées polaires. Pour trouver la tangente à la courbe en M, nous déterminerons l'angle μ que fait la direction MF de la tangente, menée dans le sens où croît l'angle θ, avec la direction OM du rayon vecteur.

Menons une sécante MM', le rayon OM', MK perpendiculaire sur OM'; appelons $r + \Delta r$, $\theta + \Delta\theta$ les coordonnées du point M'. Le triangle rectangle MKM' donne

$$\text{MK} = \text{M'K}\,\text{tg}\,\text{MM'K}.$$

En négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur à $\Delta\theta$, on a

$$\text{MK} = r\sin\Delta\theta = r\,\Delta\theta, \quad \text{M'K} = \text{OM'} - \text{OK} = \text{OM'} - \text{OM} = \Delta r,$$

l'angle MM'K a pour limite μ; donc enfin, en vertu du principe sur la limite d'un rapport d'infiniment petits (**47**) on a

$$\lim \text{tg}\,\text{MM'K} = \lim \frac{r\Delta\theta}{\Delta r},$$

ou

$$(10) \qquad \operatorname{tg} \mu = r \frac{d\theta}{dr} = \frac{f(\theta)}{f'(\theta)} \cdot$$

La *sous-tangente* et la *sous-normale polaire* se comptent sur la perpendiculaire au rayon vecteur menée par le pôle, du point O aux points T et N où elle est coupée respectivement par la tangente et la normale. Les *longueurs* MT, MN sont celles *de la tangente* et *de la normale*. On a, par les triangles MOT, MON,

$$(11) \qquad OT = S_t = r \operatorname{tg} \mu = r^2 \frac{d\theta}{dr}, \quad ON = S_n = r \cot \mu = \frac{dr}{d\theta},$$

$$(12) \quad MT = T = r \sqrt{1 + r^2 \frac{d\theta^2}{dr^2}}, \quad MN = N = \sqrt{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}}.$$

Pour la généralité des formules (11), on devra regarder S_t, S_n comme positifs ou négatifs selon que r sera une fonction croissante ou décroissante de θ (**69**).

La distance $OM_1 = P$ du pôle à la tangente a pour expression

$$(13) \qquad P = r \sin \mu = \frac{r^2\, d\theta}{\sqrt{dr^2 + r^2\, d\theta^2}} \cdot$$

Soient r_1, θ_1 les coordonnées du point M_1; l'équation de la podaire de la courbe par rapport au pôle O s'obtiendra en éliminant r, θ et μ entre l'équation de la courbe $r = f(\theta)$, et les équations

$$(14) \qquad r_1 = r \sin \mu, \quad \theta - \theta_1 = \frac{\pi}{2} - \mu, \quad \operatorname{tg} \mu = r \frac{d\theta}{dr} \cdot$$

Exercices.

1. Dans la courbe qui a pour équation

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

les distances α, β de l'origine aux points où la tangente coupe les axes ont pour expressions

$$\alpha = a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}}, \quad \beta = a^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}};$$

la normale passe par le point (α, β). La portion de la tangente entre les axes est égale à a. On a, de plus,

$$P = (axy)^{\frac{1}{3}}, \quad x_1 = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}, \quad y_1 = x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}};$$

l'équation de la podaire est

$$(x_1^2 + y_1^2)^3 = (a x_1 y_1)^2.$$

2. Un cercle de rayon a roule sur une droite OX ; un point M′ situé sur le rayon à une distance $b < a$ du centre décrit la *cycloïde allongée*

$$x = a\omega - b\sin\omega, \quad y = a - b\cos\omega.$$

La normale à la courbe passe encore par le point de contact du cercle générateur et de la droite OX.

3. Trois droites fixes sont données par leurs équations $x\cos\alpha + y\sin\alpha - \delta = 0$, $x\cos\beta + y\sin\beta - \delta' = 0$, $x\cos\gamma + y\sin\gamma - \delta'' = 0$; les distances p, q, r d'un point quelconque (x, y) du plan à ces droites respectives sont représentées par les premiers membres de ces équations. On représente une courbe par une équation entre les rapports $p : r$, $q : r$ pour l'un quelconque de ses points, ou par une équation homogène

$$f(p, q, r) = 0,$$

(coordonnées trilinéaires). Trouver l'équation de la tangente.

R. Si l'on remplaçait p, q, r par leurs valeurs en x, y, $f(p, q, r)$ deviendrait une fonction de x, y. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial p}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial q}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial r}\cos\gamma, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial p}\sin\alpha + \cdots,$$

et en substituant dans l'équation

$$(\xi - x)\frac{\partial f}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

de la tangente, on aura pour celle-ci, en désignant par P, Q, R les coordonnées trilinéaires d'un point de la tangente, et ayant égard au théorème du N° 144,

$$P\frac{\partial f}{\partial p} + Q\frac{\partial f}{\partial q} + R\frac{\partial f}{\partial r} = 0.$$

4. Mener la normale à la podaire d'un courbe donnée.

R. On tire de l'équation (β) par différentiation

$$(2x_1 - x)\,dx_1 + (2y_1 - y)\,dy_1 = x_1\,dx + y_1\,dy = 0;$$

L'équation de la normale à la podaire est

$$\eta - y_1 = \frac{y - 2y_1}{x - 2x_1}(\xi - x_1).$$

Elle passe par le point $(x : 2, y : 2)$, milieu du rayon mené de l'origine O au point M.

5. Podaire de la courbe

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m = 1$$

par rapport à l'origine.

R. L'équation de la podaire est

$$(ax_1)^{\frac{m}{m-1}} + (by_1)^{\frac{m}{m-1}} = (x_1^2 + y_1^2)^{\frac{m}{m-1}}.$$

Dans l'hyperbole équilatère, $m = 2$, $b = ai$, on trouve

$$(x_1^2 + y_1^2)^2 + a^2 (y_1^2 - x_1^2) = 0;$$

c'est la *lemniscate de Bernoulli.*

6. Une courbe (C) est définie par une relation $f(u, v, w, \ldots) = 0$ entre les distances normales $u, v, w, \ldots$ de chacun de ses points M à des courbes données U, V, W,... Si l'on porte sur les directions $u, v, w, \ldots$ des longueurs respectivement égales à

$$\frac{\partial f}{\partial u}, \quad \frac{\partial f}{\partial v}, \quad \frac{\partial f}{\partial w}, \ldots$$

à partir du point M et dans le sens marqué par le signe de ces dérivées, la *résultante* de ces droites sera normale à la courbe (C).

R. Soient $\varphi, \varphi', \varphi'', \ldots$ les angles que fait l'élément ε de la tangente à la courbe (C) avec les directions $u, v, w, \ldots$ prolongées au-delà du point M. On a

$$du = \varepsilon \cos \varphi, \quad dv = \varepsilon \cos \varphi', \ldots$$

et en substituant ces valeurs dans l'équation $df = 0$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial u} \cos \varphi + \frac{\partial f}{\partial v} \cos \varphi' + \frac{\partial f}{\partial w} \cos \varphi'' + \cdots = 0,$$

équation qui renferme le théorème énoncé. Il s'applique au cas où U, V, W,... se réduisent à des points (coord. multipolaires). Coniques définies par l'équation $u = ev$ entre les distances au foyer et à la directrice : *la droite qui joint le foyer au point où la tangente coupe la directrice est normale au rayon vecteur.*

7. Etant donnée la tangente MT en un point M de la courbe $y = f(x)$, on construit la courbe (C), lieu des milieux des cordes M_1M_2 parallèles à MT. Trouver le coefficient angulaire τ' de la tangente en M à cette courbe (C).

R. Soient $M(x, y)$; $M_1(x_1, y_1)$; $M_2(x_2, y_2)$; $x_1 = x + h_1$, $x_2 = x + h_2$. On a

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \tau = f'(x), \quad \tau' = \lim_{h_1 = 0} \frac{y_1 + y_2 - 2y}{x_1 + x_2 - 2x}.$$

Développant y_1, y_2 suivant les puissances de h_1, h_2 par la formule de Taylor jusqu'aux termes du 3e ordre, tirant de la première équation la valeur de $h_1 + h_2$ et la portant dans la seconde, on trouve

$$\tau' = f'(x) - \frac{3f''(x)^2}{f'''(x)}.$$

8. *Spirale logarithmique :* $r = ae^{m\theta}$, a, m constants.

R. On trouve

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{1}{m}, \quad S_t = \frac{r}{m}, \quad S_n = mr, \quad \frac{S_n}{S_t} = m^2, \quad P = \frac{r}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

La courbe coupe le rayon vecteur sous un angle constant. Le podaire a pour équation

$r_1 = a_1 e^{m\theta_1}$, a_1 désignant une constante. Les points T, N, M_1 décrivent des spirales semblables à la proposée.

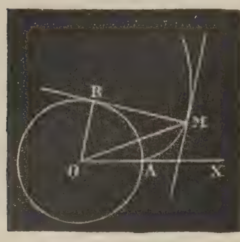


Fig. 13.

9. *Cardioïde* : $r = 2a\,(1 + \cos\theta)$.

$$R.\ \mu = \frac{\pi + \theta}{2},\quad S_t = -r\cot\tfrac{1}{2}\theta,\quad S_n = -2a\sin\theta,$$

$$T = r : \sin\tfrac{1}{2}\theta,\quad N = r : \cos\tfrac{1}{2}\theta.$$

Podaire : $\qquad r_1 = 4a\cos^3\tfrac{1}{3}\theta_1$.

10. *Hyperbole équilatère* :

$$r^2\cos 2\theta = a^2,\quad \operatorname{tg}\mu = \cot 2\theta,\quad r_1^2 = a^2\cos 2\theta_1.$$

(La podaire est la lemniscate, v. Ex. **5**).

11. *Strophoïde* :

$$r = a\,\frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta},\quad \frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\cos\theta},\quad \operatorname{tg}\mu = \cos\theta.$$

Construction facile de la sous-normale.

12. Podaires de la parabole par rapport 1° au pied de la directrice ; 2° au sommet.

R. La première est une *strophoïde* ; la seconde une *cissoïde*

$$r_1 = \frac{p}{2}\,\frac{\sin^2\theta_1}{\cos\theta_1},$$

le pôle étant au sommet de la parabole.

13. *Développante de cercle* (fig. 13). — On porte sur la tangente au cercle, à partir du point de contact R, une longueur RM égale à l'arc du cercle AR compté d'une origine fixe A. Soient (r, θ) les coordonnées du point M, ω l'angle AOR ; on a pour le lieu du point M :

$$r^2 = a^2(1 + \omega^2),\quad \theta = \omega - \operatorname{arctg}\omega,\quad \operatorname{tg}\mu = \omega = \operatorname{tg}(\omega - \theta).$$

La tangente à la développante est parallèle au rayon OR ; la normale est MR, tangente au cercle.

CHAPITRE XV.

ASYMPTOTES DES COURBES PLANES.

186. On appelle *asymptote* d'une branche de courbe indéfinie, une droite telle que la distance à cette droite d'un point M qui s'éloigne indéfiniment sur la courbe ait pour limite zéro. Il existe aussi des asymptotes curvilignes dont nous ne parlerons pas ici.

Si la branche infinie admet une asymptote non parallèle à l'axe des y, l'équation de cette droite sera de la forme

$$y = kx + l,$$

k, l étant des constantes; la différence entre l'ordonnée de la courbe et celle de l'asymptote, pour un même x, aura pour limite zéro d'après la définition, lorsque x tendra vers $+\infty$ si la branche est infinie du côté des x positifs. L'équation de cette branche pourra donc être mise sous la forme

$$(1) \qquad y = kx + l + V,$$

V tendant vers zéro pour x infini. De là

$$\frac{y}{x} = k + \frac{l + V}{x}, \quad \lim_{x=\infty} \frac{y}{x} = k.$$

Ensuite, l'équation (1) donnant encore

$$y - kx = l + V, \quad \text{d'où} \quad \lim_{x=\infty} (y - kx) = l,$$

puisque $\lim V = 0$, on conclut que les limites de $y : x$ et de $y - kx$ tirées de l'équation de la branche infinie donneront successivement les coefficients k et l de l'asymptote.

Réciproquement, si ce calcul conduit à des valeurs déterminées pour k et l, la courbe aura une asymptote $y = kx + l$, car les coordonnées (x, y) de la branche infinie vérifiant la condition

$$\lim (y - kx) = l, \quad \text{d'où} \quad y - kx = l + V,$$

V tendant vers zéro lorsque x croît à l'infini, l'équation de cette branche sera

$$y = kx + l + V,$$

et sous cette forme, on voit que la courbe s'approche indéfiniment de la droite $y = kx + l$ quand x croît indéfiniment.

Si la branche s'étendait à l'infini du côté des x négatifs, il faudrait chercher les limites de $y : x$ et de $y - kx$ pour $x = -\infty$.

Cette méthode ne s'applique pas aux asymptotes parallèles à l'axe des y. On peut les trouver en permutant x et y dans l'équation de la courbe et procédant comme plus haut.

Lorsque y a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ quand x tend vers une limite

finie a soit en croissant, soit en décroissant, on voit sans peine que $x = a$ est une asymptote de la courbe.

187. Supposons que l'équation de la courbe soit *algébrique*, c'est-à-dire que le premier membre soit une fonction rationnelle et entière de x et de y; ou, plus généralement, qu'elle soit réductible à forme suivante, en posant $y : x = u$;

$$x^m f(u) + x^{m-\alpha} f_1(u) + x^{m-\beta} f_2(u) + \cdots = 0;$$

$m, m - \alpha, m - \beta, \ldots$ étant positifs et décroissants; $f(u), f_1(u), \ldots$ des fonctions qui ne peuvent devenir infinies pour aucune valeur finie de u. Divisant l'équation par x^m, nous aurons

$$(2) \qquad f(u) + \frac{1}{x^\alpha} f_1(u) + \frac{1}{x^\beta} f_2(u) + \cdots = 0.$$

S'il y a une asymptote du côté $x > 0$, il faut, en faisant croître x indéfiniment, que $\lim f(u) = 0$, et comme la limite de u est précisément le coefficient k, on trouvera les coefficients angulaires des asymptotes en résolvant l'équation

$$f(k) = 0.$$

Considérons une racine k de cette équation, et posons, t étant une variable,

$$u = k + \frac{t}{x}, \quad \text{d'où} \quad \lim_{x=\infty} t = \lim (y - kx) = l.$$

Substituant cette valeur de u dans l'équation (2), appliquant la formule de M. Bonnet et ayant égard à l'équation $f(k) = 0$; puis multipliant par x, nous aurons $(0 < \theta < 1)$

$$tf'\left(k + \theta\frac{t}{x}\right) + \frac{1}{x^{\alpha-1}} f_1(k) + \frac{t}{x^\alpha} f_1'\left(k + \theta\frac{t}{x}\right) + \frac{1}{x^{\beta-1}} f_2(k) + \cdots = 0.$$

Si l'on a $f(k) >$ ou < 0, $f_1(k) >$ ou < 0, $\alpha < 1$, il sera impossible qu'une valeur indéfiniment croissante de x donne une valeur finie pour $\lim t$, il n'y aura aucune asymptote pour la racine k considérée. Si $f_1(k) = 0$ ou si $\alpha > 1$, on aura $l = \lim t = 0$, l'asymptote passera par l'origine. Enfin, si l'on suppose $\alpha = 1$, $f_1(k) >$ ou < 0, on aura, en faisant tendre x vers l'infini,

$$\lim [t f'(k) + f_1(k)] = 0,$$

d'où

$$(3) \qquad l = -\frac{f_1(k)}{f'(k)}.$$

Si l'on avait $f'(k) = 0$, on pousserait jusqu'aux termes du second ordre le développement de $f(u)$, ce qui donnerait

$$f(u) = \frac{t^2}{2x^2} f''\left(k + \theta_1 \frac{t}{x}\right), \qquad (0 < \theta_1 < 1),$$

et en multipliant toute l'équation (2) par x^2, on aurait

$$\frac{t^2}{2} f''\left(k + \theta_1 \frac{t}{x}\right) + \frac{1}{x^{\alpha-2}} f_1(k) + \frac{t}{x^{\alpha-1}} f'_1\left(k + \theta \frac{t}{x}\right) + \cdots = 0.$$

Si $f_1(k)$ n'est pas nul, il faudra que α soit égal ou supérieur à 2 pour qu'il y ait une asymptote; la valeur correspondante de l sera zéro si $\alpha > 2$, et si $\alpha = 2$, on aura

$$l^2 = -\frac{2 f_1(k)}{f''(k)}.$$

Il faudra donc que le second membre soit positif, auquel cas l admettra deux valeurs réelles, égales et de signes contraires.

On continuerait la discussion de la même manière si d'autres particularités se présentaient. Soit, comme exemple, la courbe

$$xy^2 + 5x^2y + 4x^3 + xy - 9 = 0.$$

Divisant par x^3, on a

$$(u^2 + 5u + 4) + \frac{u}{x} - \frac{9}{x^3} = 0.$$

On a ici $f(u) = u^2 + 5u + 4$, $f_1(u) = u$, $\alpha = 1$. L'équation en k est donc

$$k^2 + 5k + 4 = 0,$$

et a pour racines $k = -1$, $k = -4$. Comme $\alpha = 1$, l'équation (3) s'applique, on a

$$l = -\frac{k}{2k+5},$$

ce qui donne respectivement pour l les deux valeurs $l = 1 : 3$, $l = -4 : 3$. La courbe a donc deux asymptotes non parallèles à l'axe des y,

$$y = -x + \frac{1}{3}, \quad y = -4x - \frac{4}{3}.$$

En outre, l'équation de la courbe, résolue par rapport à y, donne deux valeurs de y qui tendent respectivement vers $+\infty$ et vers $-\infty$ lorsque x tend vers zéro en restant positif; l'axe des y est une asymptote dans les deux sens.

Pour les courbes transcendantes dont l'équation ne serait pas réductible à la forme (2), il faudrait procéder directement à la recherche de lim $(y : x)$ et lim $(y - kx)$.

188. *Coordonnées polaires.* — Si l'équation de la courbe est donnée en coordonnées polaires r et θ, et si la courbe admet une branche infinie MZ (fig. 14) douée d'une asymptote AZ, nous abaisserons du pôle O, sur l'asymptote, une perpendiculaire $OA = \delta$, et projetterons le point M en P sur OA. La distance PA du point M à l'asymptote ayant pour limite zéro, $\lim OP = OA = \delta$, donc

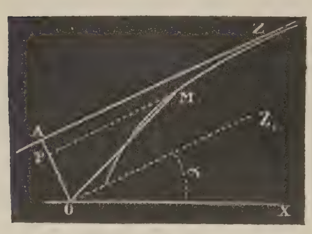


Fig. 14.

$$\lim (OM \sin OMP) = OA.$$

Comme $OM = r$ tend vers l'infini, il faut que sin OMP et par suite OMP ait pour limite zéro. Menons par le pôle OZ_1 parallèle à AZ, et soit $\alpha = XOZ_1$ l'angle que fait cette parallèle avec l'axe polaire. L'angle $OMP = Z_1OM = \pm (\theta - \alpha)$; on a donc

$$\lim (\theta - \alpha) = 0, \quad \lim \theta = \alpha;$$

la direction limite du rayon vecteur, quand le point M *s'éloigne à l'infini sur la branche de courbe, donne la direction* OZ_1 *de l'asymptote.*

De plus, l'équation ci-dessus donne

$$\delta = \pm \lim r \sin (\theta - \alpha) = \pm \lim r (\theta - \alpha),$$

car $\sin (\theta - \alpha) : (\theta - \alpha)$ a pour limite l'unité. On observera que $\theta - \alpha$ est $>$ ou $<$ 0 suivant que la rotation de OZ_1 vers OA est dans le sens où θ croît ou en sens opposé; on peut donc prendre simplement

$$\delta = \lim r (\theta - \alpha),$$

en se rappelant que le signe $+$ de δ répondra au premier cas, et le signe — au second. On aura ainsi les éléments nécessaires pour construire l'asymptote AZ dans sa vraie position.

Réciproquement, si θ et $r (\theta - \alpha)$ tendent vers des limites déterminées α et δ lorsque le point M s'éloigne à l'infini sur une branche de courbe, cette branche a une asymptote AZ déterminée par ces valeurs de α et de δ, car l'équation

$$\delta = \lim r (\theta - \alpha) = \lim r \sin (\theta - \alpha) = \lim OM \sin OMP$$

montre que la distance du point M à cette droite a pour limite zéro.

Exemple : Soit l'équation d'une conique rapportée à un foyer comme pôle

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \theta}.$$

Pour que r croisse à l'infini, il faut et il suffit que $1 - \varepsilon \cos \theta$ tende vers zéro, donc

$$\cos \alpha = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Cet angle α ne peut être réel si $\varepsilon < 1$, l'ellipse est exclue. Pour $\varepsilon > 1$, l'équation donne deux valeurs pour l'angle α, deux directions OZ_1 également inclinées sur l'axe polaire. Ensuite on a

$$\lim r(\theta - \alpha) = p \lim \frac{\theta - \alpha}{1 - \varepsilon \cos \theta} = \frac{p}{\varepsilon \sin \alpha},$$

d'après la règle du N° **100**. Si $\varepsilon = 1$, $\sin \alpha = 0$, il n'y a pas d'asymptote, ce qui exclut la parabole. Pour l'hyperbole, $\varepsilon > 1$, on a deux valeurs finies

$$\delta = \pm \frac{p}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}},$$

le signe $+$ se rapportant à $\sin \alpha > 0$, le signe $-$ à $\sin \alpha < 0$, ce qui détermine la longueur et le sens des perpendiculaires OA abaissées sur les deux asymtotes.

Exercices.

1. $y^3 - 3axy + x^3 = 0$.
Une asymptote $y = -x - a$.
2. $xy^2 + 4x^2y + 30xy + 24y + 57x + 20 = 0$.
Trois asymptotes $x = 0$, $y = 0$, $y = -4x - 30$.
3. $xy^2 - x + 2y - 1 = 0$.
Trois asymptotes $x = 0$, $y = +1$, $y = -1$.
4. $y^3 + x^3 + \sin \frac{y}{x} = 0$.
Une asymptote $y = -x$.
5. $xy = \sin x$.
Une asymptote $y = 0$.
6. $r \cos \theta = 2a \sin^2 \theta$. (cissoïde).
Deux branches infinies, ayant une même asymptote normale à l'axe polaire, à la distance $2a$ du pôle du côté $x > 0$.

CHAPITRE XVI.

ANALYSE DES COURBES PLANES.

§ 1. DU SENS DE LA CONCAVITÉ.

189. Lorsqu'en un point M d'une courbe, la tangente MT (fig. 15) n'est pas parallèle à l'axe des y, on dit que la courbe tourne en ce point ***sa concavité du côté des y positifs*** ou *du côté des y négatifs* suivant que, dans le voisinage du point M, la courbe se trouve par rapport à la tangente MT du même côté que l'axe des y positifs ou que l'axe des y négatifs.

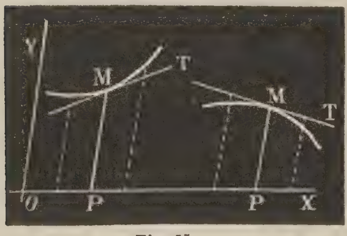


Fig. 15

Pour distinguer par l'analyse ces deux cas l'un de l'autre, on observe que la différence δ entre l'ordonnée de la courbe et celle de la tangente MT, pour une même abscisse, est constamment positive dans le premier cas et négative dans le second, pour les points suffisamment voisins de M. Soient donc

$$y = f(x)$$

l'équation de la courbe, (x, y) les coordonnées du point M, $(x + h, y')$ celles d'un point voisin M', h étant positif ou négatif et arbitrairement petit. Nous aurons, par le théorème de Taylor, $f(x)$, $f'(x)$ et $f''(x)$ étant fonctions continues dans le voisinage du point M, et $\theta > 0$ et < 1,

$$y' = f(x+h) = f(x) + h\,f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x+\theta h).$$

L'équation de la tangente en M,

$$\eta - y = f'(x)(\xi - x)$$

donne, pour l'ordonnée de cette droite qui répond à $x + h$,

$$\eta = f(x) + h\,f'(x),$$

d'où

$$\delta = y' - \eta = \frac{h^2}{2} f''(x+\theta h).$$

Si $f''(x)$ n'est pas *nul*, $f''(x+\theta h)$ sera de même signe que $f''(x)$

pour h très petit numériquement, et comme h^2 est positif, quel que soit le signe de h, le signe de δ sera celui de $f''(x)$. On en conclut que *la courbe tourne sa concavité du côté des y positifs ou du côté des y négatifs, en un point donné, suivant que la dérivée seconde*

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

est positive ou négative en ce point.

190. Si δ changeait de signe en même temps que h, en un point déterminé M de la courbe, la courbe traverserait sa tangente en M ; le point M serait ce qu'on nomme un *point d'inflexion* (fig. 16). La discussion précédente prouve qu'un tel point ne peut exister que si $f''(x) = 0$. *On trouvera donc les points d'inflexion d'une courbe en cherchant ceux dont les coordonnées vérifient l'équation*

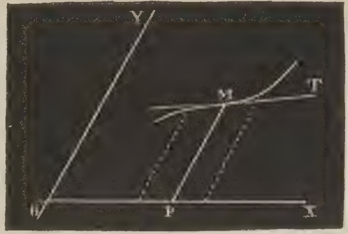


Fig. 16.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Il faudra toutefois que $f'''(x)$ soit différent de zero, sans quoi on verrait, en poussant plus loin le développement de y', que δ sera de même signe que $f^{IV}(x)$ quel que soit le signe de h, et la courbe ne traverserait pas sa tangente ; etc...

On observera encore que la théorie ci-dessus suppose la continuité des premières dérivées de y ; il pourra donc se trouver des points d'inflexion non compris dans la règle précédente, pour les valeurs de x qui rendent discontinue $f'(x)$ ou $f''(x)$.

Exercices.

1. *Cycloïde allongée* : $x = a\omega - b \sin \omega$, $y = a - b \cos \omega$ (Ch. XIV, ex. **2**).

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{b(a \cos \omega - b)}{(a - b \cos \omega)^2}.$$

De $\omega = 0$ à $\omega = \text{arc} \cos \frac{b}{a}$, concavité vers les y positifs. Pour $\cos \omega = \frac{b}{a}$, point d'inflexion. Au delà, concavité vers le bas.

Points d'inflexion des courbes suivantes :

2. $$y = \frac{x^2}{a} - \frac{x^3}{a^2}. \quad R. \; x = \frac{a}{3}, \quad y = \frac{2a}{9}.$$

3. $y = 3x^5 - 30x^4 + 110x^3 - 189x^2 + mx + n.$
R. Trois points d'inflexion,

$$x = 1, \quad x = 2, \quad x = 3.$$

4. $y = \sin^3 x$. *R.* Une infinité de points d'inflexion correspondant à

$$x = i\pi, \quad y = 0 \quad (i \text{ entier}),$$

et à

$$\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{2}.$$

5. $x^4 - a^2x^2 + a^3y = 0$. *R.* Deux points d'inflexion,

$$x = \pm\frac{a}{\sqrt{6}}, \quad y = \frac{5a}{36}.$$

6. $x^3 + y^3 = a^3$. *R.* Deux points d'inflexion

$$x = 0, \quad y = a; \qquad x = a, \quad y = 0.$$

7. $y = \operatorname{arc\,tg} x - \dfrac{x}{1 + x^2}$. *R.* Trois points d'inflexion, pour

$$x = 0, \quad x = +1, \quad x = -1.$$

8. $y = a + x^{\frac{5}{3}}$. $x = 0$, $y = a$ est un point d'inflexion pour lequel

$$\frac{dy}{dx} = 0, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \infty.$$

§ 2. DES POINTS SINGULIERS.

191. Soit $F(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe plane rapportée à des axes rectangulaires OX, OY ; supposons $F(a, b) = 0$, le point A (a, b) appartient à la courbe. Supposons de plus que $F(x, y)$ et ses dérivées partielles $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ soient continues dans le voisinage du point (a, b). D'après le théorème du N° **160**, si $F'_y(a, b)$ n'est pas nul, il passe par le point A une branche de courbe simple et continue qui vérifie l'équation $F(x, y) = 0$, et qui a en A et dans le voisinage du point A une tangente déterminée dont la direction varie d'une manière continue. Le point A est alors ce qu'on appelle un *point ordinaire*, à moins que la courbe en A ne traverse sa tangente, ce qui (**190**) donnerait un point d'inflexion.

Si l'on a $F'_y(a,b) = 0$, mais $F'_x(a, b) > 0$ ou < 0, on pourra raisonner par rapport à x comme on a raisonné par rapport à y au N° **160**, et l'on verra sans peine que la conclusion précédente subsiste, avec cette seule particularité que la tangente en A sera parallèle à l'axe des y. Si donc nous nommons *points singuliers* les seuls points où la courbe ne jouit pas, dans le voisinage du point A, des propriétés énumérées plus haut, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Lorsque la fonction $F(x, y)$ *et ses dérivées partielles* $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ *sont continues dans le voisinage d'un point* A (a, b) *qui vérifie l'équation* $F(a, b) = 0$, *ce point ne peut être un point singulier à moins que les équations*

$$F(a, b) = 0, \quad F'_x(a, b) = 0, \quad F'_y(a, b) = 0$$

ne soient satisfaites simultanément.

Donc, pour trouver les points singuliers d'une courbe, il faudra chercher s'il existe des systèmes de valeurs pour (x, y) qui rendent discontinue l'une des fonctions F, F'_x, F'_y, ou qui satisfassent aux équations $F(x, y) = 0$, $F'_x(x, y) = 0$, $F'_y(x, y) = 0$.

192. Considérons donc un point A (a, b) qui vérifie ces conditions, en sorte que l'on ait

$$(1) \quad F(a, b) = 0, \frac{\partial F}{\partial a} = 0, \frac{\partial F}{\partial b} = 0,$$

et cherchons à discuter la nature de la courbe dans le voisinage de A. Pour cela, nous décrivons de A (fig. 17) comme centre, avec un rayon ρ que nous pourrons supposer aussi petit que nous voudrons, un cercle; soient M un point de ce cercle, θ l'angle du rayon AM avec AX_1 parallèle à OX, compris entre 0 et 2π; les coordonnées du point M seront $a + \rho \cos\theta$, $b + \rho \sin\theta$, et pour que M appartienne à la courbe, il faut et il suffit que θ vérifie l'équation

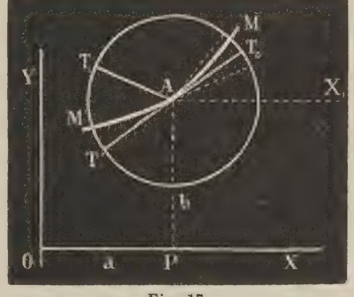


Fig. 17.

$$F(a + \rho\cos\theta, \ b + \rho\sin\theta) = 0.$$

Développons le premier membre suivant les puissances de ρ par la formule de Taylor, [**155**, éq. (2)] en supposant les dérivées partielles de

F (x, y) continues jusqu'au cinquième ordre inclusivement; nous aurons, vu les relations (1),

$$\rho^2\left(\frac{\partial^2 F}{da^2}\cos^2\theta + 2\frac{\partial^2 F}{\partial a\partial b}\cos\theta\sin\theta + \frac{\partial^2 F}{\partial b^2}\sin^2\theta\right)$$

$$+\frac{\rho^3}{3}\left(\frac{\partial^3 F}{\partial a^3}\cos^3\theta + 3\frac{\partial^3 F}{\partial a^2\partial b}\cos^2\theta\sin\theta + 3\frac{\partial^3 F}{\partial a\partial b^2}\cos\theta\sin^2\theta + \frac{\partial^3 F}{\partial b^3}\sin^3\theta\right)$$

$$+\frac{\rho^4}{12}\left(\frac{\partial^4 F}{\partial a^4}\cos^4\theta + \cdots\right) + \frac{\rho^5}{60}\left(\frac{\partial^5 F}{\partial x^5}\cos^5\theta + \cdots\right) = 0.$$

Il faut, dans les dérivées partielles du dernier terme, remplacer x, y par $a + \lambda\rho\cos\theta$, $b + \lambda\rho\sin\theta$, λ étant > 0 et < 1. Cette équation divisée par ρ^2 donne un résultat de la forme

$$(2)\qquad f(\theta) + \rho f_1(\theta) + \rho^2 f_2(\theta) + \rho^3\varphi(\theta, \rho) = 0.$$

$f(\theta)$, $f_1(\theta)$, $f_2(\theta)$ étant des fonctions entières de $\sin\theta$, $\cos\theta$, donc, des fonctions continues de θ; $\varphi(\theta, \rho)$ une fonction continue de θ et ρ qui ne peut surpasser en valeur absolue un nombre fixe dans un cercle de rayon déterminé δ. On observera de plus que $f(\theta)$, $f_2(\theta)$ ne changent pas, non plus que leurs dérivées successives, lorsqu'on change θ en $\theta + \pi$, et que $f_1(\theta)$ et ses dérivées changent seulement de signe.

La propriété caractéristique du premier membre de l'équation (2) est celle-ci : pour une valeur donnée de θ, on peut toujours supposer ρ assez petit pour que la somme des trois derniers termes soit moindre numériquement qu'un nombre donné ε. Donc, si $f(\theta)$ ne s'annule pour aucune valeur de θ dans un intervalle (θ_1, θ_2), VA$f(\theta)$ restera supérieur à un nombre fixe, et si ρ est suffisamment petit, le premier membre de (2) restera de même signe que son premier terme de $\theta = \theta_1$ à $\theta = \theta_2$ et ne s'annulera pas; il n'y aura aucun point de la courbe sur la circonférence de rayon ρ entre $\theta = \theta_1$ et $\theta = \theta_2$. De là résultent les conséquences suivantes :

I. Si l'équation $f(\theta) = 0$ n'a pas de racines réelles, la courbe n'a aucun point autre que A dans l'intérieur du petit cercle ; A est un point isolé ou *conjugué*.

Exemple :

$$\mathrm{F}(x, y) = y^2 + a^2x^2 - x^4 = 0.$$

L'origine ($x = 0$, $y = 0$) vérifie les conditions (1). L'équation (2) est ici

$$\sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta - \rho^2 \cos^4 \theta = 0,$$

$f(\theta) = \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta$ ne s'annule pour aucune valeur de θ; l'origine est un point conjugué.

193. — II. Si l'équation $f(\theta) = 0$ a des racines réelles, le premier membre de (2) ne pourra s'annuler que pour des valeurs de θ qui rendent $f(\theta)$ très petit, c'est-à-dire des valeurs très-voisines des racines de l'équation $f(\theta) = 0$. Si donc on mène les droites AT_0, AT_1, ... dans les directions données par ces racines, les points de la courbe ne pourront se trouver sur le petit cercle que dans le voisinage des points T_0, T_1, ... et les sécantes menées du point A à ces divers points feront avec les directions respectives AT_0, AT_1, ... des angles tendant vers zéro en même temps que ρ. Il suffit donc de chercher à vérifier l'équation (2) par des valeurs de θ de la forme $\theta_0 + \alpha$, θ_0 étant une racine réelle de l'équation $f(\theta) = 0$, α un angle positif ou négatif qui ne pourra être que très petit lorsque ρ sera lui-même très petit.

L'équation (2) devient par cette substitution

$$(3) \quad f(\theta_0 + \alpha) + \rho f\theta(\theta_0 + \alpha) + \rho^2 f_2(\theta_0 + \alpha) + \rho^3 \varphi(\theta_0 + \alpha, \rho) = 0.$$

Mais le théorème de M. Bonnet est applicable à $f(\theta)$, et $f(\theta_0) = 0$, donc

$$f(\theta_0 + \alpha) = \alpha f'(\theta_0 + \omega),$$

ω désignant une quantité qui tend vers zéro avec α. Donc, l'équation (3) deviendra

$$(4) \quad \alpha f'(\theta_0 + \omega) + \rho f_1(\theta_0 + \alpha) + \rho^2 f_2(\theta_0 + \alpha) + \rho^3 \varphi(\theta_0 + \alpha, \rho) = 0$$

et nous supposerons d'abord $f'(\theta_0) >$ ou < 0. Choisissons un nombre ε assez petit pour que $f'(\theta_0 + \omega)$ soit de même signe que $f'(\theta_0)$ pour $\alpha = \mathcal{M}(-\varepsilon, +\varepsilon)$, et faisons décroître ρ suffisamment pour que le premier membre de l'équation (4) ait le signe du premier terme pour $\alpha = \pm \varepsilon$; il aura donc des signes contraires pour $\alpha = -\varepsilon$, $\alpha = +\varepsilon$, et s'annulera pour une valeur de α dans l'intervalle $(-\varepsilon, +\varepsilon)$. La courbe aura un point M dans le voisinage du point T_0, et un seul, car si le premier membre de l'équation (2) s'annulait deux fois, sa dérivée

$$f'(\theta) + \rho f_1'(\theta) + \cdots$$

s'annulerait, d'après le théorème de Rolle, pour une valeur de θ entre

$\theta_0 - \varepsilon$ et $\theta_0 + \varepsilon$, ce qui est impossible si $f'(\theta_0)$ n'est pas nul et si ρ est très petit.

Ces conclusions subsistant pour toute valeur de ρ inférieure à un certain nombre δ, la courbe présente un arc simple MA qui, d'après la remarque faite ci-dessus, est tangent en A à AT_0.

On tire de l'équation (4), pour la valeur approchée de α qui vérifie cette équation,

$$\alpha = -\frac{f_1(\theta_0)}{f'(\theta_0)}\rho. \tag{5}$$

Le signe de α est opposé à celui du rapport $f_1(\theta_0) : f'(\theta_0)$, si nous admettons d'abord que $f_1(\theta_0)$ ne soit pas nul. Ce signe fait connaître de quel côté de la tangente AT_0 se trouve l'arc AM.

D'après la remarque faite (**192**) sur les fonctions $f(\theta)$, $f_1(\theta)$, ..., $\theta_0 + \pi$ sera une autre solution de l'équation $f(\theta_0)$, et déterminera une direction AT' opposée à AT_0. On ferait voir comme ci-dessus qu'il existe un arc de courbe simple AM' tangent en A à cette droite AT'; la valeur correspondante de α sera

$$\alpha' = -\frac{f_1(\theta_0 + \pi)}{f'(\theta_0 + \pi)}\rho = \frac{f_1(\theta_0)}{f'(\theta_0)}\rho,$$

donc α' sera de signe contraire à α, ce qui montre que AM, AM' sont du même côté de la tangente commune T_0T'. Il n'y a pas d'inflexion.

Chacune des racines réelles de l'équation $f(\theta) = 0$ donne lieu à une discussion analogue; à chacune répond une branche de courbe simple passant par le point A et ayant sa tangente propre en ce point.

Le point A se nomme un ***point multiple.***

194. III. Nous avons admis que $f_1(\theta_0)$ n'était pas nul. S'il en était autrement, on aurait $f_1(\theta_0 + \alpha) = \alpha f'_1(\theta_0 + \omega')$, ω' tendant vers zéro avec α, et l'équation (4) serait remplacée par celle-ci,

$$\alpha f'(\theta_0 + \omega) + \rho\alpha f'_1(\theta_0 + \omega') + \rho^2 f_2(\theta_0 + \alpha) + \rho^3 \varphi(\theta_0 + \alpha, \rho) = 0.$$

L'existence des arcs MA, $M'A$ tangents en A à la droite T_0T' se démontrerait comme plus haut, mais la valeur approchée de α étant ici

$$\alpha = -\frac{f_2(\theta_0)}{f'(\theta_0)}\rho^2, \tag{6}$$

et $f_2(\theta_0)$, $f'(\theta_0)$ ne changeant pas par le changement de θ_0 en $\theta_0 + \pi$,

α' serait de même signe que α, la branche MAM' traverserait sa tangente T_0T' et aurait un *point d'inflexion* en A. Exemple :

$$y^2 - x^2 + x^4 = 0.$$

L'origine ($x = 0$, $y = 0$) vérifie les conditions (1), l'équation (2) se réduit à

$$\sin^2\theta - \cos^2\theta + \rho^2 \cos^4\theta = 0;$$

$$f(\theta) = \sin^2\theta - \cos^2\theta, \quad f_1(\theta) = 0, \quad f_2(\theta) = \cos^4\theta,$$

L'équation $f(\theta) = 0$ admet quatre racines réelles

$$\frac{\pi}{4}, \ \frac{5\pi}{4}; \quad \frac{3\pi}{4}, \ \frac{7\pi}{4};$$



Fig. 18.

on a donc deux tangentes T_0T', T_1T'' (fig. 18) se coupant en O, également inclinées sur les axes. L'origine est un *point double*. L'équation (6) donne

$$\alpha = -\frac{\cos^3\theta_0}{4\sin\theta_0}\rho^2,$$

donc $\alpha < 0$ pour $\theta_0 = \pi : 4$ et $\theta_0 = 5\pi : 4$, $\alpha > 0$ pour $\theta_0 = 3\pi : 4$ et $\theta_0 = 7\pi : 4$; les deux branches ont chacune une inflexion au point O.

195. — IV. Considérons le cas où $f'(\theta_0) = 0$, et où l'équation (5) devient impossible. En poussant plus loin le développement de $f(\theta_0 + \alpha)$ dans l'équation (3), on aura, $f(\theta_0)$ et $f'(\theta_0)$ étant nuls,

$$(7) \quad \alpha^2 f''(\theta_0 + \omega) + 2\rho f_1(\theta_0 + \alpha) + \rho^2 f_2(\theta_0 + \alpha) + 2\rho^3\varphi(\theta_0 + \alpha, \rho) = 0,$$

ω tendant vers zéro en même temps que α. Si $f''(\theta_0)$ n'est pas nul non plus que $f_1(\theta_0)$, on pourra supposer ε assez petit pour que $f''(\theta_0 + \omega)$, $f_1(\theta_0 + \alpha)$ soient de même signe que $f''(\theta_0)$, $f_1(\theta_0)$ respectivement, entre $\alpha = -\varepsilon$ et $\alpha = +\varepsilon$, et ρ assez petit pour que 1° le premier membre de (7) ait le signe du premier terme pour $\alpha = \pm\varepsilon$; 2° la somme des trois derniers termes ait le signe de $f_1\theta(_0 + \alpha)$ dans l'intervalle $(-\varepsilon, +\varepsilon)$ de α. Donc

1° Si $f''(\theta_0)$ et $f_1(\theta_0)$ sont de même signe, positifs par exemple, le premier membre de (7) restera de même signe que $f''(\theta_0)$ de $\alpha = -\varepsilon$ à $\alpha = +\varepsilon$, et ne pourra s'annuler; la courbe n'aura aucun point dans le voisinage de T_0, donc, aucune branche tangente en A à AT_0;

2° Si $f''(\theta_0)$, $f_1(\theta_0)$ sont de signes contraires, le premier membre de (7) aura le signe de $f''(\theta_0)$ pour $\alpha = \pm \varepsilon$, le signe de $f_1(\theta_0)$ pour $\alpha = 0$; il changera de signe entre $\alpha = -\varepsilon$ et $\alpha = 0$; entre $\alpha = 0$ et $\alpha = +\varepsilon$, la courbe aura un point de chaque côté de T_0, donc, deux arcs de courbe MA, M_1A (fig. 19) toucheront AT_0 en A, de part et d'autre de cette tangente. Il n'y en aura pas davantage, car si $f(\theta) + \rho f_1(\theta) + \cdots$ s'annulait trois fois dans l'intervalle $(-\varepsilon, +\varepsilon)$ de α, sa dérivée seconde devrait s'annuler, ce qui ne peut se faire si $f''(\theta_0)$ est $>$ ou $<$ o.

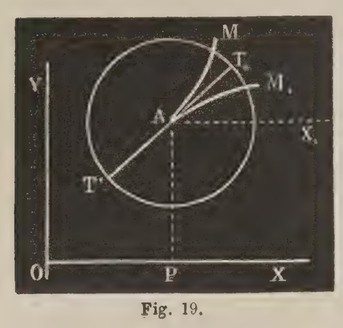


Fig. 19.

Les valeurs approchées de α sont données par la formule

$$\alpha^2 = -\frac{2f_1(\theta_0)}{f''(\theta_0)}\rho,$$

et sont réelles et de signes contraires dans l'hypothèse actuelle.

3° Lorsqu'on change θ_0 en $\theta_0 + \pi$, $f_1(\theta_0)$ change de signe et $f''(\theta_0)$ ne change pas, donc, si dans l'équation (7) $f''(\theta_0)$ et $f_1(\theta_0)$ étaient de signes contraires, ils deviendront de même signe et vice versa. Donc, sur le prolongement AT' de AT_0, il y aura permutation des cas 1° et 2° l'un dans l'autre. Il y a donc *toujours* deux branches de courbe tangentes à la droite T_0T' de part et d'autre au point A, s'arrêtant toutes deux à ce point : c'est un *point de rebroussement de première espèce.*

Exemple: $y^2 - x^3 = 0$. L'origine O vérifie les équations (1); l'équation (2) est

$$\sin^2\theta - \rho\cos^3\theta = 0,$$

$f(\theta) = 0$ a pour racines o et π; pour $\theta = 0$ on a $f(\theta_0) = 0$, $f'(\theta_0) = 2\sin\theta_0\cos\theta_0 = 0$, $f''(\theta_0) = 2(\cos^2\theta_0 - \sin^2\theta_0) = 2$, $f_1(\theta) = -\cos^3\theta_0 = -1$; $f_1(\theta_0)$ et $f''(\theta_0)$ sont de signes contraires; pour $\theta_0 = \pi$ ils sont de même signe; le rebroussement est situé du côté des x positifs; les valeurs approchées de α sont $+\sqrt{\rho}$, $-\sqrt{\rho}$.

196. — V. Considérons actuellement le cas où $f_1(\theta_0) = 0$. Il faudra développer, dans l'équation (3), f, f_1 et f_2 suivant les puissances de α, et en ayant égard aux équations

$$f(\theta_0) = 0,\quad f'(\theta_0) = 0,\quad f_1(\theta_0) = 0,$$

on trouvera, $\omega, \omega', \omega''$ désignant des quantités qui tendent vers zéro avec α,

$$(8)\quad \begin{cases} \alpha^2 f''(\theta_0) + \frac{1}{3}\alpha^3 f'''(\theta_0+\omega) + 2\rho\alpha f_1'(\theta_0) + \rho\alpha^2 f_1''(\theta_0+\omega') \\ + 2\rho^2 f_2(\theta_0) + 2\rho^2\alpha f_2'(\theta_0+\omega'') + 2\rho^3\varphi(\theta_0+\alpha, \rho) = 0, \end{cases}$$

ou, en posant $\alpha = \rho u$, divisant par $\rho^2 f''(\theta_0)$,

$$(8')\quad \begin{cases} u^2 + 2\frac{f_1'(\theta_0)}{f''(\theta_0)}u + \frac{2 f_2(\theta_0)}{f''(\theta_0)} + \frac{\rho}{f''(\theta_0)}[2\varphi(\theta_0+\alpha, \rho) \\ + 2u f_2'(\theta_0+\omega'') + u^2 f_1''(\theta_0+\omega') + \frac{1}{3}u^3 f'''(\theta_0+\omega)] = 0. \end{cases}$$

On raisonnera comme dans les cas précédents. Si l'on attribue au rapport u de α à ρ une valeur finie, déterminée, on pourra toujours supposer ρ assez petit pour que le premier membre de l'équation (8′) ait le signe du trinôme

$$(9)\qquad u^2 + \frac{2f_1'(\theta_0)}{f''(\theta_0)}u + \frac{2f_2(\theta_0)}{f''(\theta_0)}.$$

Donc 1° si cette expression ne s'annule pour aucune valeur finie de u, l'équation (8) ne sera vérifiée, pour de très petites valeurs de ρ, par aucune valeur de α. La courbe n'aura aucun point dans le voisinage de T_0 sur le petit cercle, aucun arc tangent en A à la droite AT_0. Il n'y en aura aucun non plus tangent à AT′, car le changement de θ_0 en $\theta_0 + \pi$ ne fait que changer le signe du second terme du trinôme (9), les racines restent imaginaires.

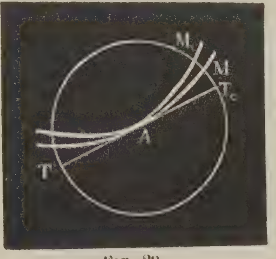


Fig. 20.

2° Si le trinôme admet deux racines réelles et inégales, il changera deux fois de signe lorsque l'on fera varier u, et l'on en conclura que, ρ étant très petit, l'équation (8′) admet deux racines réelles pour u, u_0 et u_1, auxquelles correspondront deux valeurs réelles $\alpha_0 = \rho u_0$, $\alpha_1 = \rho u_1$ de α; la conclusion subsistera en changeant θ_0 en $\theta_0 + \pi$; la courbe présentera donc deux branches tangentes en A à la droite T_0T' de part et d'autre du point A ; elle aura la forme de la figure 20 ou de la figure 21 suivant que ces racines u_0, u_1 seront de même signe ou de signes contraires.

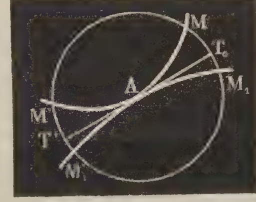


Fig. 21.

197. — VI. Enfin, si le trinôme (9) a ses racines égales à une même racine u_0, nous développerons $\varphi(\theta, \rho)$ dans l'équation (2) et, en désignant

par $f_3(\theta)$ le premier terme du développement, il est facile de voir que le premier membre de l'équation (8') pourra se mettre sous la forme

$$(10)\quad (u-u_0)^2+\frac{\rho}{f''(\theta_0)}\left[\tfrac{1}{3}u^3 f'''(\theta_0)+u^2 f_1''(\theta_0)+2u f_2'(\theta_0)+2f_3(\theta_0)+\Omega\right],$$

Ω désignant une quantité que l'on peut rendre aussi petite qu'on le veut en supposant ρ suffisamment petit, pourvu que u conserve une valeur finie invariable. Cette expression (10) sera *positive* en même temps que son premier terme, si $(u-u_0)^2$ a une valeur fixe différente de zéro et si ρ est pris très petit. Pour $u=u_0$, l'expression (10) se réduit à

$$(11)\qquad \frac{\rho}{f''(\theta_0)}\left[\tfrac{1}{3}u_0^3 f'''(\theta_0)+u_0^2 f_1'(\theta_0)+2u_0 f_2'(\theta_0)+2f_3(\theta_0)+\Omega\right],$$

et nous avons encore à distinguer trois cas :

1° Si l'expression (11) est positive, on reconnaît que l'expression (10) ne peut changer de signe pour aucune valeur de u, en supposant ρ suffisamment petit, et qu'aucun arc de courbe ne touche la droite AT_0 en A, dans le sens AT_0.

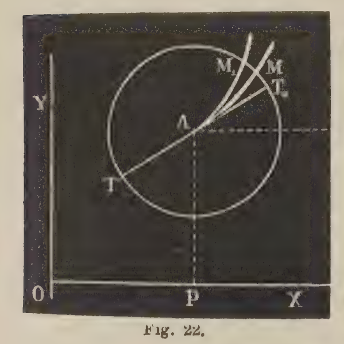


Fig. 22.

2° Si l'expression (11) est négative, l'expression (10) change deux fois de signe, pour des valeurs très petites de ρ et pour des valeurs de u, l'une plus petite, l'autre plus grande que u_0. On en conclura que l'équation (8) admet, pour α, deux racines réelles, très petites à cause de la relation $\alpha=\rho u$, et dont les valeurs approchées sont

$$\alpha=u_0\rho\pm\rho\sqrt{-\frac{\rho}{f''(\theta_0)}\left[\tfrac{1}{3}u_0^3 f'''(\theta_0)+u_0^2 f_1'(\theta_0)+2u_0 f_2'(\theta_0)+2f_3(\theta_0)\right]}.$$

La courbe a donc deux branches MA, M_1A (fig. 22) tangentes en A à la droite AT_0, placées du même côté de cette droite, et qui ne se prolongent pas au delà du point A. En effet, si l'on change θ_0 en $\theta_0+\pi$, le second terme du trinôme (9) change de signe, u_0 est remplacé par $-u_0$; $f''(\theta_0)$, $f'''(\theta_0)$, $f_2'(\theta_0)$ ne changent pas, $f_1'(\theta_0)$ et $f_3(\theta_0)$ changent de signe, la quantité sous le radical change de signe et les valeurs de α deviennent imaginaires. La courbe présente, en A, un *point de rebroussement de deuxième espèce.*

Remarquons que, dans le cas 1°, le changement de θ_0 en $\theta_0 + \pi$ a pour effet, au contraire. de changer le signe de l'expression (11), et de rendre réelles les deux branches tangentes à T_0T' du coté AT'. La courbe a donc aussi, dans ce cas, un rebroussement de deuxième espèce, mais placé en sens contraire du premier.

3° Enfin, si l'expression (11) s'annulait encore dans sa partie principale, il faudrait pousser plus loin les développements suivant le puissances de ρ et de α et procéder de la même manière.

Exemple : $y^2 - 2yx^2 + x^4 - x^5 = 0.$

L'origine satisfait aux conditions (1). L'équation (2)

$$\sin^2\theta - 2\rho \sin\theta \cos^2\theta + \rho^2 \cos^4\theta - \rho^3 \cos^5\theta = 0,$$

donne $f(\theta) = \sin^2\theta$, $f_1(\theta) = -2\sin\theta\cos^2\theta$, $f_2(\theta) = \cos^4\theta$, $f_3(\theta) = -\cos^5\theta$. Les racines de $f(\theta) = 0$ sont 0 et π. Pour $\theta = 0$, on a $f'(\theta_0) = 0$, $f_1(\theta_0) = 0$, et l'équation en u devient

$$u^2 - 2u + 1 + \rho(-1 + \Omega) = 0, \quad \text{ou} \quad (u-1)^2 + \rho(-1 + \Omega) = 0,$$

les racines du trinôme (9) sont réelles et égales à l'unité ; d'après ce qui précède la courbe a à l'origine un rebroussement de deuxième espèce tangent à l'axe des x du côté de x positifs et au dessus de cet axe, puisque la racine double du trinôme est positive.

198. L'équation (2) peut encore offrir d'autres particularités. Ainsi, si l'on avait

$$\frac{\partial^2 F}{\partial a^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial a \partial b} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial b^2} = 0,$$

il s'ensuivrait identiquement $f(\theta) = 0$ quel que soit θ. L'équation (2) admettant le facteur ρ, se réduirait à

$$f_1(\theta) + \rho f_2(\theta) + \rho^2 \varphi(\theta, \rho) = 0,$$

et l'équation $f_1(\theta) = 0$ étant du troisième degré en $\sin\theta$ ou $\cos\theta$, pourrait admettre six racines réelles pour θ ; on aurait en général trois branches de courbe se coupant au point A, qui serait un *point triple* ; etc. ... La méthode suivie précédemment indiquera assez comment il faut procéder dans ces cas plus compliqués.

Nous traiterons encore l'exemple suivant :

$$(x^2 - y^2)^2 - x^4 \sin x = 0.$$

Si l'on se borne à considérer la portion de la courbe entre $x = 0$ et $x = \pi$, on trouve seulement deux points qui vérifient les conditions (1), savoir : $(x = 0, y = 0)$, $(x = \frac{\pi}{2}, y = 0)$.



Fig. 23.

Pour le premier point, l'équation (2) est

$$(\cos^2\theta - \sin^2\theta)^2 - \cos^4\theta \sin(\rho\cos\theta) = 0,$$

ou, en développant $\sin(\rho\cos\theta)$,

$$\cos^2 2\theta - \rho\cos^5\theta + \rho^3\varphi(\theta, \rho) = 0.$$

On a donc

$$f(\theta) = \cos^2 2\theta, \ f_1(\theta) = -\cos^5\theta, \ f_2(\theta) = 0,$$

et les racines de l'équation $f(\theta) = 0$ sont

$$\theta_0 = \frac{\pi}{4}, \quad \theta_1 = \frac{3\pi}{4}, \quad \theta_0 + \pi, \quad \theta_1 + \pi.$$

Pour la première, on trouve

$$f'(\theta_0) = 0, \quad f''(\theta_0) = 8, \quad f_1(\theta_0) = -2^{-\frac{5}{2}};$$

on est donc dans le cas du N° **195**, 2°; la courbe a un point de rebroussement de première espèce à l'origine, la tangente faisant un angle de 45° avec l'axe des x. Pour la valeur θ_1, $f_1(\theta_1) = 2^{-\frac{5}{2}}$, il n'y a donc aucune branche tangente à la direction correspondante, mais il y a un point de rebroussement de première espèce sur la direction opposée.

Pour le second point singulier, on substituera dans l'équation de la courbe

$$x = \frac{\pi}{2} + \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta,$$

et l'on développera. On aura ainsi

$$\left(\frac{\pi}{2} + \rho\cos\theta\right)^4 [1 - \cos(\rho\cos\theta)] - 2\rho^2\sin^2\theta\left(\frac{\pi}{2} + \rho\cos\theta\right)^2 + \rho^4\sin^4\theta = 0,$$

puis, en développant $\cos(\rho\cos\theta)$ et réduisant,

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\frac{\cos^2\theta}{2} - 2\sin^2\theta\right] + \pi\rho\cos\theta\left[\frac{\pi^2}{4}\cos^2\theta - 2\sin^2\theta\right] + \rho^2\varphi(\theta, \rho) = 0.$$

L'équation $f(\theta) = 0$ a pour racines

$$\operatorname{tg} \theta = \pm \frac{\pi}{4},$$

ce qui donne deux tangentes également inclinées sur l'axe des x; comme $f_1(\theta_0)$ et $f'(\theta_0)$ ne sont pas nuls, on a ici un point double.

199. Comme on l'a remarqué, il peut se rencontrer d'autres points singuliers tenant à des discontinuités dans les fonctions F (x, y), $F'_x(x,y)$, $F'_y(x, y)$, etc..., mais on n'a pas de règles générales pour cet objet. Nous observerons seulement que si $y = f(x)$ est l'équation d'une courbe, et si $f(x)$ est une fonction simple qui cesse d'être réelle, sans devenir infinie, pour une valeur a de la variable x, la courbe s'arrêtera brusquement; elle aura un *point d'arrêt*. Si la fonction $f(x)$ reste continue, mais que le rapport $\Delta y : \Delta x$ tende vers deux limites différentes pour $\Delta x > 0$ et pour $\Delta x < 0$, en un point de la courbe, ce point sera un *point saillant*, la direction de la tangente variera brusquement.

On peut remarquer encore les *points de dédoublement* signalés par Plateau(1).

Exercices.

Analyser les courbes suivantes et discuter leurs points singuliers

1. $(x^2 + y^2)^2 + a^2(y^2 - x^2) = 0$. (Courbe en forme de ∞, symétrique par rapport aux axes; point double à l'origine, deux branches tangentes aux bissectrices des angles des axes coordonnés).

2. $y^4 - 96\, a^2y^2 + 100\, a^2x^2 - x^4 = 0$. (Courbe du *diable* (fig. 24), symétrique par rapport aux axes; une branche fermée en forme de 8, avec point double à l'origine, $\operatorname{tg} \theta_0 = \pm 5 : \sqrt{24}$; deux autres branches s'étendant à l'infini; deux asymptotes $y = \pm x$; quatre points d'inflexion dans les intervalles $(x = \pm 8a, x = \pm 10\, a)$.

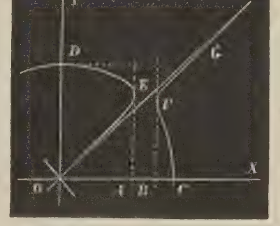


Fig. 24.

3. Cos $x +$ cos $y = 2$. (La courbe se réduit à une infinité de points conjugués, donnés par les équations $x = \pm 2i\pi$, $y = \pm 2i'\pi$, i et i' entiers).

4. $[y - \varphi(x)]^2 - l. \sin ax = 0$. [La courbe se réduit à une infinité de points conjugués, aux abscisses $x = \frac{\pi}{2a} \pm \frac{2n\pi}{a}$, ($n$ entier) distribués sur la courbe $y = \varphi(x)$].

5. $y^4 - ay^2x + bx^5 = 0$. (Courbe ayant deux feuilles du côté des x positifs, entre les droites $x = 0$ et $x = a^2 : 4b$, et deux branches infinies du côté des x négatifs, l'origine

(1) *Bulletin de l'Académie R. de Belgique*, 2e série, t. XLIII, p. 255.

est un point triple; une branche tangente à l'axe des y, deux autres inclinées sur cet axe, $\operatorname{tg}\theta_0 = \pm\sqrt{b} : \sqrt{a}$.

6. $x^4 - 2ay^3 - 3a^2y^2 - 2a^2x^2 + a^4 = 0$. (Trois points doubles : $x = a$, $y = 0$; $x = -a$, $y = 0$, $x = 0$, $y = -a$).

7. $y^3(2x - a) + a^2x^2 - x^4 = 0$. (Courbe indéfinie dans le sens des x positifs et négatifs, une asymptote $x = a : 2$ parallèle à l'axe des y; une autre ayant pour équation $2^{\frac{1}{3}}y = x + \frac{a}{6}$. La courbe coupe l'axe des x sous un angle droit en $x = a$, $x = -a$. L'origine est un point de rebroussement de première espèce, la tangente coïncide avec l'axe des y positifs).

8. $(y - \sin x)^2 - x^5 \sin^2 x = 0$. (Courbe serpentante à deux branches, tout entière du côté des x positifs. Rebroussement de première espèce à l'origine, la tangente inclinée à 45^0 sur l'axe des x; une infinité de points doubles pour $x = n\pi$, $y = 0$.)

9. $y^5 + ax^4 - b^2xy^2 = 0$. (Rebroussement de première espèce à l'origine, tangent à l'axe des x positifs. En outre, par ce point passe une branche tangente à l'axe des y et offrant une inflexion).

10. $x^4 + x^2y^2 - 6ax^2y + a^2y^2 = 0$. [Courbe à deux feuilles limitées à $x = \pm 2a\sqrt{2}$. L'origine est un point double dont les deux branches sont tangentes du même côté à l'axe des x (**196**, 2°)].

11. $[y - \varphi(x)]^p - (x - a)^q\psi(x) = 0$, p et q entiers et positifs, p est pair. [Si $q > p$, le point $x = a$, $y = \varphi(a)$ est un rebroussement, de première espèce si $q < 2p$, de deuxième espèce si $q > 2p$].

12. $y - x\,\mathrm{l}.\,x = 0$. (Point d'arrêt à l'origine).

13. $y = \cos\sqrt{x}$. (Courbe indéfinie dans le sens des x positifs, s'arrêtant brusquement au point $x = 0$, $y = 1$).

14. $y = 2\cos\sqrt{1 - x} \pm (1 - x)x^{\frac{3}{2}}$ (Courbe fermée, comprise entre $x = 0$, $x = 1$; point de rebroussement de première espèce $x = 0$, $y = 2\cos(1)$; point saillant $x = 1$, $y = 2$).

CHAPITRE XVII.

DIFFÉRENTIELLES DE L'ARC ET DE L'INCLINAISON DE LA TANGENTE.

200. La longueur de l'arc d'une courbe plane $y = f(x)$ (**54**), comptée depuis un point fixe A de la courbe jusqu'au point variable M (x, y), est une fonction s de l'abscisse x, fonction dont nous allons chercher la dérivée, au moyen du lemme suivant.

Il résulte du théorème de M. Bonnet que si, en chaque point d'un arc

de courbe MM′, la tangente est déterminée, il existe sur la courbe entre M et M′, au moins un point où la tangente est parallèle à la corde MM′.

Cela admis, inscrivons dans l'arc MM′ un polygone dont tous les côtés tendront vers zéro; soient α_i un de ces côtés, β_i sa projection sur la corde MM′, φ_i l'angle compris entre α_i et β_i. Nous aurons

$$\beta_i = \alpha_i \cos \varphi_i, \quad \frac{\beta_i}{\alpha_i} - 1 = -2 \sin^2 \frac{\varphi_i}{2},$$

et l'on pourra poser

$$\frac{\beta_i}{\alpha_i} = 1 + \varepsilon_i, \quad \mathrm{VA}\,\varepsilon_i < \frac{\varphi_i^2}{2}.$$

Si nous supposons qu'en chacun des points de l'arc MM′ la tangente fasse, avec la corde MM′, un angle dont le carré soit moindre qu'une quantité donnée 2σ, il résulte de la remarque faite plus haut que l'on aura $\mathrm{VA}\,\varepsilon_i < \sigma$, et en vertu du théorème du n° **48**, Σ désignant une somme qui s'étend à tous les côtés du polygone, on aura aussi

$$\mathrm{VA}\left(\frac{\Sigma\beta_i}{\Sigma\alpha_i} - 1\right) < \sigma.$$

Mais cette inagalité subsistant quand les côtés du polygone décroissent indéfiniment, comme $\Sigma\beta_i$ est égal à la longueur c de la corde MM′, que $\Sigma\alpha_i$ a pour limite la longueur s de l'arc MM′, on aura aussi

$$\mathrm{VA}\left(\frac{c}{s} - 1\right) \leqq \sigma.$$

Concevons maintenant que le point M′ se rapproche indéfiniment du point M. La corde MM′ fera avec la tangente en M un angle qui décroîtra au-dessous de toute grandeur donnée. D'autre part, si la dérivée $f'(x)$ de l'ordonnée de la courbe est continue dans la voisinage du point M, on peut supposer le point M′ assez voisin du point M pour que, en chaque point de l'arc MM′, la tangente fasse avec la tangente au point M un angle plus petit qu'une fraction donnée quelconque. La quantité σ pourra donc être supposée aussi petite qu'on voudra, et par conséquent, on aura

$$\lim \frac{c}{s} = 1.$$

Donc, *un arc infiniment petit et sa corde ont pour limite de leur rapport l'unité,* si la direction de la tangente varie d'une manière continue.

201. Ce lemme admis, soit, pour un accroissement Δx de l'abscisse, $\Delta s = \text{MM}'$ l'accroissement de l'arc s. On aura donc, $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ étant les coordonnées rectangulaires du point M′,

$$\lim \frac{\Delta s}{\Delta x} = \pm \lim \frac{c}{\Delta x} = \pm \lim \sqrt{1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}},$$

d'où

$$\frac{ds}{dx} = \pm \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}.$$

Le signe + se rapporte au cas où les arcs sont comptés positivement dans le sens des x positifs, le signe — au cas contraire.

Dans le premier cas, on a donc

$$(1) \qquad ds = dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}.$$

Si l'équation de la courbe est donnée en coordonnées polaires, on peut résoudre le même problème directement, ou mieux par un changement de variables.

Les équations

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

entraînent celles-ci

$$dx = \cos \theta \, dr - r \sin \theta \, d\theta, \quad dy = \sin \theta \, dr + r \cos \theta \, d\theta,$$

d'où

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 \, d\theta^2,$$

donc

$$(2) \qquad ds = d\theta \sqrt{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}},$$

en nous bornant au signe + du radical, ce qui suppose que s et θ varient dans le même sens.

202. La tangente à la courbe au point M (x, y) fait avec l'axe des x un angle φ dont la tangente est donnée par l'équation

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx}.$$

Dérivant par rapport à x, multipliant par $\cos^2 \varphi$, nous aurons

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} \cos^2 \varphi = \frac{d^2y}{dx^2} \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{d^2y}{dx^2} \frac{1}{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}.$$

On sait que, si l'on prend dx égal à Δx, comme on peut le faire, l'expression précédente donnera l'accroissement $\Delta\varphi$ de l'inclinaison de la tangente sur l'axe des x, aux quantités près d'ordre supérieur à Δx. Or, si l'on mène les tangentes MT, M'T' (fig. 25) en deux points infiniment voisins correspondant à x, $x + \Delta x$, l'angle infiniment petit TNT' compris entre ces tangentes est égal en valeur absolue à $\Delta\varphi$. Il sera donc donné par la formule ci-dessus au signe près, en prenant $dx = \Delta x$ et négligeant des quantités infiniment petites par rapport à Δx; $d\varphi$ s'appelle l'*angle de contingence* de la courbe.

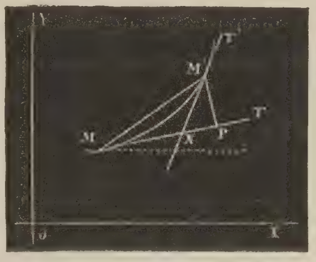


Fig. 25.

203. L'expression de $\Delta\varphi$ conduit à une conséquence utile. Soit α l'angle infiniment petit M'MT entre la tangente MT et la corde MM'; M'P étant perpendiculaire sur cette tangente, on a

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{M'P}}{\text{MP}}.$$

Prenons pour un instant MT pour axe des x; nous aurons, au point M,

$$y = 0, \quad \frac{dy}{dx} = 0, \quad \Delta x = \text{MP}, \quad \Delta y = \text{M'P} = \frac{\Delta x^2}{2} \frac{d^2y}{dx^2},$$

en développant Δy par la formule de Taylor et négligeant les termes du troisième ordre par rapport à Δx. Substituant dans l'expression de $\operatorname{tg} \alpha$ et observant que $\operatorname{tg} \alpha$ et α ne diffèrent que de quantités infiniment petites par rapport à α, nous aurons

$$\alpha = \frac{\Delta x}{2} \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Mais la formule (3) nous donne pour $\Delta\varphi$, dans le choix particulier d'axes que nous avons fait,

$$\Delta\varphi = \frac{d^2y}{dx^2} \Delta x,$$

donc

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\,\Delta\varphi, \quad \text{angle M'MT} = \tfrac{1}{2}\,\text{TNT}';$$

l'angle compris entre la corde d'un arc infiniment petit et la tangente à l'origine de cet arc est la moitié de l'angle des tangentes extrêmes, abstraction faite d'une quantité infiniment petite par rapport à cet angle.

204. Dans un système de coordonnées polaires, φ est l'inclinaison de la tangente sur l'axe polaire; si μ désigne l'angle du rayon vecteur avec la tangente (**185**), on aura toujours

$$\varphi = \mu + \theta \quad \text{ou} \quad \varphi = \mu + \theta - \pi,$$

d'où

$$d\varphi = d\mu + d\theta.$$

De la formule (10) du N° **185** on tire, $d\theta$ étant constant,

$$\frac{d\mu}{d\theta} = \frac{dr^2 - rd^2r}{dr^2}\cos^2\mu = \frac{dr^2 - rd^2r}{dr^2}\,\frac{1}{1+\text{tg}^2\mu} = \frac{dr^2 - rd^2r}{dr^2 + r^2d\theta^2},$$

d'où

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{2dr^2 - rd^2r + r^2d\theta^2}{dr^2 + r^2d\theta^2},$$

donc

$$(4) \qquad d\varphi = \frac{r^2 + 2\dfrac{dr^2}{d\theta^2} - r\dfrac{d^2r}{d\theta^2}}{r^2 + \dfrac{dr^2}{d\theta^2}}\,d\theta.$$

Telle est l'expression de l'angle de contingence en coordonnées polaires.

Exercices.

1. La *chaînette* a pour équation

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right);$$

prouver que l'on a les relations

$$ads = ydx, \quad y = a\sec\varphi, \quad s = a\,\text{tg}\,\varphi, \quad y^2 = a^2 + s^2,$$

l'arc s étant compté du point ($x = 0$, $y = a$). Conséquences géométriques.

2. *Cycloïde* : $x = a(\omega - \sin\omega)$, $y = a(1 - \cos\omega)$. On trouve

$$ds = 2a\sin\frac{\omega}{2}\,dx = -2d.\text{MB},$$

MB étant la portion de la tangente comprise dans le cercle générateur (fig. 11, p. 181). On en conclut que *l'arc de cycloïde* DM, *compté du sommet* D *de la courbe, a une longueur double de la corde* MB.

3. Chercher la différentielle ds_1 de l'arc de la *podaire* d'une courbe donnée.

R. Les équations faciles à tirer des équations (7) (**183**).

$$dxdy_1 - dydx_1 = (x_1 - x)\, d^2y, \quad dxdx_1 + dydy_1 = -\, y_1 d^2y$$

donnent

$$\frac{dx_1}{y - 2y_1} = \frac{dy_1}{2x_1 - x} = \frac{dxd^2y}{ds^2} = \frac{ds_1}{\sqrt{(y - 2y_1)^2 + (x - 2x_1)^2}} = \frac{ds_1}{r},$$

r étant le rayon mené de l'origine au point de tangente (x, y). On a donc

$$ds_1 = r d\varphi.$$

Démontrer géométriquement cette équation.

4. On prend le rayon vecteur d'une courbe (C) égal et parallèle à la droite qui joint, sur deux courbes données (A) et (B), les points où les tangentes sont parallèles. Démontrer que la tangente à la nouvelle courbe (C) sera parallèle aux tangentes à (A) et à (B) aux points correspondants, et que la longueur de l'arc de cette courbe (C) sera la somme ou la différence des arcs correspondants de (A) et de (B).

5. Différentielle de l'arc d'une *ovale de Descartes*

$$r^2 - 2r(a \cos\theta + b) = c.$$

R. $$ds = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta + c}\left[1 \pm \frac{a\cos\theta + b}{\sqrt{(a\cos\theta + b)^2 + c}}\right] d\theta.$$

6. Démontrer que la différence entre un arc infiniment petit et sa corde est du troisième ordre par rapport à l'arc.

7. L'équation d'une courbe étant donnée entre les distances de chacun de ses points à deux pôles fixes, trouver la différentielle de l'arc dans ce système de coordonnées. (*Mathesis*, t. II.)

R. Soient $2e$ la distance des pôles, q et q_1, la demi-somme et la demi-différence des rayons vecteurs. On a

$$\frac{ds^2}{q^2 - q_1^2} = \frac{dq^2}{q^2 - e^2} + \frac{dq_1^2}{e^2 - q_1^2}.$$

8. Trouver la différentielle de l'arc d'ellipse en coordonnées bipolaires.

R. Conservant les notations ci-dessus et appelant a le demi grand axe, on a

$$ds = dq_1 \sqrt{\frac{a^2 - q_1^2}{e^2 - q_1^2}}.$$

CHAPITRE XVIII.

COURBURE ET DÉVELOPPÉES DES COURBES PLANES.

205. Soit MM′ (fig. 26) un arc de courbe plane, tel que la direction de la tangente varie d'une manière continue et toujours dans le même sens du point M au point M′. L'angle TNT′, compris entre les directions des tangentes MT, M′T′ prolongées dans le même sens, se nomme la *courbure* de l'arc MM′.

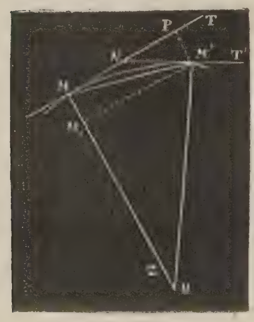


Fig. 26.

Si l'on prend sur la courbe, à partir d'un point donné M, un arc MM′ de longueur variable, le rapport TNT′ : arc MM′ de la courbure de cet arc à sa longueur varie généralement avec la longueur de l'arc, et quand le point M′ se rapproche indéfiniment du point M, ce rapport de deux infiniment petits tend vers une limite déterminée lorsque l'équation de la courbe satisfait à certaines conditions. Cette limite est ce qu'on appelle la *courbure de la courbe au point* M.

Dans un cercle, la courbure est constante et égale à l'unité divisée par le rayon, car l'angle TNT′ est égal à l'angle au centre qui répond à l'arc MM′, c'est-à-dire au rapport de l'arc au rayon. C'est pour cela que pour avoir la mesure de la courbure en un point M d'une courbe quelconque, courbure généralement variable avec la position de ce point, on la compare à celle d'un cercle, en assignant le rayon R du cercle qui aurait en tous ses points une courbure égale à celle de la courbe donnée au point M. Ce rayon R est le *rayon de courbure* de la courbe en M.

Pour trouver son expression, nous partirons de l'équation

$$\frac{1}{R} = \lim \frac{TNT'}{\text{arc } MM'},$$

qui résulte de la définition précédente.

L'arc MM′ n'est autre chose que l'accroissement Δs de l'arc de courbe quand on passe du point M au point M′; l'angle TNT′ au signe

près, est à $\Delta\varphi$ (**202**), d'où cette première expression du rayon de courbure

(I) $$R = \lim \pm \frac{\Delta s}{\Delta\varphi} = \pm \frac{ds}{d\varphi}.$$

R étant une longueur absolue, on prendra le signe + ou — de manière à trouver un résultat positif.

206. Si l'on remplace ds et $d\varphi$ par les expressions (1) et (3) des Nos **200** et **202**, on a l'expression du rayon de courbure en coordonnées rectangulaires

(II) $$R = \pm \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Si l'équation de la courbe est donnée en coordonnées polaires, on prendra pour ds et $d\varphi$ les expressions (2) et (4) des Nos **201** et **204**, et il viendra

(III) $$R = \pm \frac{\left(r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\frac{dr^2}{d\theta^2} - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}.$$

On observera que, d'après l'équation (II), le rayon de courbure devra être infini si le point M est un point d'inflexion, à cause de l'égalité $d^2y = 0$. En transportant cette condition dans l'équation (III), on en déduira le moyen de trouver les points d'inflexion d'une courbe dont on a l'équation en coordonnées polaires.

La formule (II) se rapporte au cas où dx est constant. Si x et y étaient donnés en fonction d'une même variable indépendante dont la différentielle serait prise constante, on se servirait des formules du changement de variables (**173**) et l'on aurait

(IV) $$R = \pm \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y - dyd^2x}.$$

Enfin, si du point M′ on abaisse M′P perpendiculaire sur la tangente MT, on aura, d'après la remarque du N° **203**,

$$TNT' = 2\,PMM' = 2\frac{M'P}{MP},$$

abstraction faite de quantités infiniment petites par rapport à TNT′. D'autre part, l'arc MM′, sa corde MM′, et la projection MP de celle-ci sur la tangente, sont des quantités qui ont pour limite de leur rapport l'unité; on aura donc, d'après le théorème du N° **47**,

$$(V) \qquad R = \lim \frac{\text{arc MM}'}{\text{TNT}'} = \lim \frac{\overline{\text{MP}}^2}{2\text{M}'\text{P}}.$$

Cette expression géométrique du rayon de courbure est utile pour construire approximativement le rayon de courbure d'une courbe donnée graphiquement.

207. A partir du point donné M, on porte sur la normale, du côté où la courbe tourne sa concavité, une longueur MZ égale au rayon de courbure R. Le point Z ainsi obtenu est le *centre de courbure* relatif au point M; le cercle décrit du centre Z avec le rayon R est le *cercle de courbure*; il a même tangente en M que la courbe proposée.

Le centre de courbure Z *coïncide avec la limite du point de rencontre* Q *de la normale* MQ *au point considéré et de la normale* M′Q *en un point infiniment voisin.*

Le triangle MQM′ donne en effet la relation

$$\text{MQ} = \sin \text{MM}'\text{Q} \, \frac{\text{MM}'}{\sin \text{MQM}'}.$$

L'angle MM′Q a pour limite un angle droit, car l'angle MM′N < TNT′ a pour limite zéro. Dans le rapport d'infiniment petits MM′ : sin MQM′, on peut remplacer la corde MM′ par l'arc MM′, sin MQM′ par MQM′ ou par son égal TNT′; donc, M′ se rapprochant indéfiniment de M,

$$\lim \text{MQ} = \lim \frac{\text{arc MM}'}{\text{TNT}'} = R = \text{MZ}.$$

De plus, l'inclinaison de la tangente M′T′ sur MT étant supposée varier toujours dans le même sens du point M au point M′, le point de rencontre Q des normales en M et en M′ se trouvera du côté de la concavité de la courbe; donc le point Q aura pour limite le point Z.

208. Pour déterminer les coordonnées (α, β) du centre de courbure Z relatif à un point (x, y), nous exprimerons que la distance MZ est égale à R, donc

$$(1) \qquad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2.$$

Le point Z étant sur la normale en M, ses coordonnées vérifient l'équation de la normale [**181**, éq. (3)], d'où

$$\beta - y = -\frac{dx}{dy}(\alpha - x),$$

ou

(2) $$(x - \alpha) + (y - \beta)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Substituons, dans l'équation (1), à R son expression (II), et éliminons $x - \alpha$ entre les équations (1) et (2) ; nous aurons

$$(y - \beta)^2\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) = \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^3 : \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2.$$

Supprimant le facteur commun aux deux membres et prenant la racine carrée, nous aurons

$$y - \beta = \pm\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) : \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Il faut choisir le signe inférieur, car le point Z étant, sur la normale, du côté où la courbe tourne sa concavité, $y - \beta$ sera négatif si d^2y est positif et vice versâ. On tire donc de là l'égalité

(3) $$1 + \frac{dy^2}{dx^2} + (y - \beta)\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Les équations (2) et (3) déterminent complètement α et β.

209. Le *cercle osculateur*, en un point M d'une courbe, est la limite du cercle passant par ce point et par deux autres points M′ et M″ de la courbe, qui se rapprochent indéfiniment du premier.

Si nous désignons par x, x_1, x_2 les abscisses respectives des points M, M′, M″, par $f(x)$ l'ordonnée de la courbe et par $\varphi(x)$ celle du cercle passant par les points M, M′, M″, la condition des trois points communs entraîne évidemment, pour déterminer le centre (α, β) et le rayon R du cercle, les équations

$$f(x) - \varphi(x) = 0, \quad f(x_1) - \varphi(x_1) = 0, \quad f(x_2) - \varphi(x_2) = 0.$$

Nous en tirons, par l'application du théorème de Rolle (**91**), en désignant par ξ, ξ_1 certaines quantités comprises, la première entre x et x_1, la seconde entre x_1 et x_2, les équations

$$f'(\xi) - \varphi'(\xi) = 0, \quad f'(\xi_1) - \varphi'(\xi_1) = 0,$$

et de celles-ci, ξ' étant compris entre ξ et ξ_1,

$$f''(\xi^1) - \varphi''(\xi^1) = 0.$$

Lorsque les points M′, M″ se rapprochent indéfiniment du point M suivant une loi quelconque, x_1 et x_2 ont pour limite x, et il en est de même nécessairement, de ξ, ξ_1 et ξ'. On a donc, à la limite, les relations

$$f(x) = \varphi(x), \quad f'(x) = \varphi'(x), \quad f''(x) = \varphi''(x),$$

auxquelles doivent satisfaire l'ordonnée du cercle limite et ses dérivées par rapport à x au point M. En d'autres termes, si l'équation du cercle limite est mise sous la forme

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - R^2 = 0,$$

et si on en tire les deux dérivées premières,

$$x - \alpha + (y-\beta)\frac{dy}{dx} = 0, \quad 1 + \frac{dy^2}{dx^2} + (y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

ces équations devront être vérifiées lorsqu'on y remplacera x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ par les valeurs des mêmes quantités appartenant à la courbe au point M. Mais on voit que l'on retombe ainsi sur les équations (1), (2) et (3) du n° précédent, pour déterminer le centre (α, β) et le rayon R du cercle osculateur. Il en résulte que *le cercle osculateur ne diffère pas du cercle de courbure.*

On trouverait encore le même cercle en cherchant la limite d'un cercle tangent à la courbe en M et la coupant en un point infiniment voisin M′.

210. Si la position du point M varie sur la courbe, celle du centre de courbure Z variera également. On peut considérer y, α, β, R comme des fonctions continues, en général, de x, déterminées par l'équation $F(x, y) = 0$ de la courbe et par les équations (1), (2), (3).

Le lieu du centre de courbure Z sera une nouvelle courbe, dite la *développée* de la courbe primitive, laquelle prend alors le nom de *développante*.

Pour trouver les propriétés de la développée, différentions les équations (1) et (2) en observant que y, α, β, R y dépendent de x. La seconde donnera

$$1 - \frac{d\alpha}{dx} + \left(\frac{dy}{dx} - \frac{d\beta}{dx}\right)\frac{dy}{dx} + (y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

équation qui se réduira, par (3), à

$$\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dx}\frac{dy}{dx}, \quad \text{ou} \quad (4) \quad 1+\frac{d\beta}{d\alpha}\frac{dy}{dx}=0.$$

De la première, on tirera

$$(x-\alpha)\left(1-\frac{d\alpha}{dx}\right)+(y-\beta)\left(\frac{dy}{dx}-\frac{d\beta}{dx}\right)=R\frac{dR}{dx},$$

d'où, en vertu de l'équation (2),

$$(5) \qquad (x-\alpha)\,d\alpha+(y-\beta)\,d\beta=-R\,dR.$$

Enfin, combinant (2) et (4), on a

$$\frac{x-\alpha}{d\alpha}=\frac{y-\beta}{d\beta}=\frac{(x-\alpha)\,d\alpha+(y-\beta)\,d\beta}{d\alpha^2+d\beta^2}=\pm\frac{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}}{\sqrt{d\alpha^2+d\beta^2}},$$

et cette dernière égalité se réduit, par les équations (5) et (1), à

$$(6) \qquad dR=\pm\sqrt{d\alpha^2+d\beta^2}.$$

L'équation (4) nous montre que la tangente en Z à la développée, dont le coefficient angulaire est $d\beta : d\alpha$, est perpendiculaire à la tangente en M à la courbe, et comme elle a un point sur la normale, savoir, le point Z, elle se confond avec cette normale. Donc, *la normale à la courbe en un point touche la développée au centre de courbure qui correspond à ce point.*

De plus, si l'on désigne par σ la longueur de l'arc de la développée compté à partir d'un point fixe jusqu'au point Z, *dans le sens où le rayon* R *va en croissant*, on aura, comme on sait

$$d\sigma=\sqrt{d\alpha^2+d\beta^2},$$

et la formule (6) donnera $dR=d\sigma$. R et σ sont donc deux fonctions de x qui ne diffèrent que par une constante (**91**), et si R', R'' représentent deux rayons de courbure de la développante ; σ', σ'' les arcs de la développée qui se terminent respectivement à ces rayons, nous aurons

$$R''-R'=\sigma''-\sigma' ;$$

la longueur d'un arc de la développée est égale à la différence des rayons de courbure de la développante, tangents à ses extrémités.

Cette propriété suppose, comme on l'a dit, que $dR : d\sigma$ reste de même signe sur toute l'étendue de l'arc, ou que le rayon de courbure R varie toujours dans le même sens de R′ à R″.

211. Le théorème précédent conduit à la conséquence que voici : concevons un fil parfaitement flexible, inextensible, sans épaisseur, appliqué sur la développée dont il se détache tangentiellement en Z pour venir se terminer à la développante en M. Imaginons que l'on *développe* ce fil en le détachant successivement de la développée et le tenant toujours tendu; *le point* M, *extrémité du fil, décrira la développante.* En effet, la portion rectiligne du fil s'accroît, d'une position MZ (fig. 27) à une autre M′Z′, d'une longueur égale à l'arc ZZ′ de la développée sur lequel le fil était appliqué; égale, par suite, à l'acroissement du rayon de courbure R entre les points Z et Z′; M′Z′ sera donc encore égal au rayon de courbure qui touche la développée en Z′, et coïncidera avec lui; M′ sera donc sur la développante.

Cette remarque permet de faire voir que le cercle de courbure relatif à un point traverse généralement la courbe en ce point en même temps qu'il la touche. Considérons trois rayons de courbure MZ, M′Z′, M″Z″, infiniment voisins. Joignons M et M″ au centre de courbure Z′ qui répond au point M′. D'après le théorème ci-dessus, on aura, dans les triangles Z′MZ, Z′M″Z″, les relations suivantes :



Fig. 27.

$$M'Z' = MZ + \text{arc } ZZ' > MZ + ZZ' > MZ',$$
$$M'Z' = M''Z'' - \text{arc } Z'Z'' < M''Z'' - Z'Z'' < M''Z'.$$

Le cercle décrit du centre Z′ avec le rayon M′Z′ coupera donc MZ′ au delà du point M, MZ″ en deça de point M″, et traversera par conséquent la courbe au point M.

212. La recherche de l'équation entre α et β de la développée d'une courbe $F(x, y) = 0$ se fait en remplaçant dans les équations (2) et (3) les valeurs de $dy : dx$, $d^2y : dx^2$ en x et y tirées de l'équation de la courbe, puis éliminant x et y entre ces équations et celle de la courbe.

Réciproquement, si l'équation $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ de la développée d'une courbe est donnée, pour remonter de cette équation à celle de la développante, on tirera de l'équation $\varphi = 0$ l'expression de $d\beta : d\alpha$ en α et β, et on la substituera dans l'équation (4), ce qui donnera une relation

entre α, β et $dy : dx$. On éliminera α et β entre cette relation, l'équation $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ et l'équation (2), ce qui fournira une équation entre x, y et $dy : dx$, qui sera l'*équation différentielle* de la développante. Le calcul intégral sera nécessaire pour en tirer l'équation $F(x, y) = 0$ de cette courbe, et, comme on le verra, cette dernière renfermera nécessairement une *constante arbitraire* qui permettra de trouver, pour une développée donnée, une infinité de développantes. Ceci s'accorde avec ce qu'on a vu plus haut de la génération de la développante par le moyen d'un fil enroulé sur la développée.

213. *Applications.* — I. *Coniques en général.* L'équation des coniques peut se mettre sous la forme

$$(\alpha) \qquad y^2 = p^2 + 2p\varepsilon x - (1 - \varepsilon^2)x^2,$$

l'origine étant à un foyer F (fig. 28), l'axe des x suivant l'axe focal de la courbe, p désignant le demi-paramètre et ε le rapport des distances d'un point de la courbe au foyer F et à la directrice correspondante. On tire de cette équation (α), réductions faites,



Fig. 28.

$$y\frac{dy}{dx} = p\varepsilon - (1 - \varepsilon^2)x, \quad y\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p^2}{y^2}.$$

Soit N la longueur de la normale ; l'expression générale du rayon de courbure, d'après les équations (6) du N° **182** et (II) du N° **206** peut se mettre sous la forme

$$R = \pm\frac{N^3}{y^3 \cdot D^2y}, \quad \text{ou} \quad (\beta)\ R = \frac{N^3}{p^2}$$

dans le cas actuel. Donc, *dans les coniques, le rayon de courbure est égal au cube de la normale divisé par le carré du demi-paramètre.*

Projetons la normale MN sur le rayon vecteur FM en MG; soient $FM = r$, $FMN = \gamma$ l'angle entre la normale et le rayon vecteur. On a par l'équation (α)

$$r = p + \varepsilon x, \quad FN = x + y\frac{dy}{dx} = \varepsilon(p + \varepsilon x) = \varepsilon r,$$

$$FG = FN \cos NFG = \varepsilon r \cos NFG = \varepsilon x,$$
$$MG = FM - FG = r - \varepsilon x = p,$$

ce qui nous apprend que *la projection de la normale sur le rayon vecteur est constante et égale au demi-paramètre.*

De la relation

$$MG = N \cos \gamma = p$$

et de l'équation (β), on conclut pour l'expression de R,

$$R = \frac{N}{\cos^2 \gamma},$$

d'où la construction suivante pour le centre de courbure des coniques : on élève sur la normale MN, au point N où elle coupe l'axe focal, une perpendiculaire NH, et au point H où celle-ci coupe le rayon vecteur FM, une perpendiculaire à ce dernier ; cette perpendiculaire ira rencontrer la normale MN au centre de courbure Z, correspondant au point M.

II. *Parabole.* — Il faut poser $\varepsilon = 1$ dans l'équation (α); on a

$$(\gamma) \qquad y^2 = p(p + 2x), \quad \frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p^2}{y^3},$$

et la formule du rayon de courbure donne

$$R = \frac{(p^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}.$$

Cherchons la développée. Les équations (2) et (3) deviennent

$$x - \alpha + (y - \beta)\frac{p}{y} = 0, \quad 1 + \frac{p^2}{y^2} - (y - \beta)\frac{p^2}{y^3} = 0,$$

et de la dernière on tire

$$1 + \frac{\beta p^2}{y^3} = 0 \quad \text{ou} \quad y = -\beta^{\frac{1}{3}} p^{\frac{2}{3}}.$$

De la première

$$x - \alpha = -p + \frac{\beta p}{y} = -p - \frac{y^2}{p} = -2p - 2x, \quad x = \frac{\alpha - 2p}{3}.$$

Substituant ces valeurs de x et de y dans l'équation (γ), on trouve pour l'équation de la développée de la parabole

$$\beta^{\frac{2}{3}} = \frac{2\alpha - p}{3p^{\frac{1}{3}}}.$$

Courbe symétrique par rapport à l'axe de la parabole, ayant son sommet et un rebroussement de première espèce tangent à cet axe au point ($\alpha = p : 2$, $\beta = 0$).

III. *Ellipse.* — On a, sous la forme ordinaire,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^4}{a^2y^3},$$

d'où l'on déduit

$$R=a^2b^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Si c désigne l'excentricité de l'ellipse, r et r' les rayons vecteurs menés des foyers de la courbe au point M (x, y), P la perpendiculaire du centre sur la tangente en M, on sait que l'on a

$$rr'=\left(a-\frac{cx}{a}\right)\left(a+\frac{cx}{a}\right)=a^2-\frac{c^2x^2}{a^2}=a^2-x^2+\frac{b^2x^2}{a^2}$$

$$=\frac{a^2y^2}{b^2}+\frac{b^2x^2}{a^2}=a^2b^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right), \quad P=\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

donc

$$R=\frac{rr'}{P}.$$

Le rayon de courbure de l'ellipse en un point donné est une quatrième proportionnelle à la perpendiculaire du centre sur la tangente en ce point et aux rayons vecteurs menés des foyers à ce point. Construction facile de Z.

Les équations (2) et (3) deviennent ici

$$(x-\alpha)-(y-\beta)\frac{b^2x}{a^2y}=0, \quad 1+\frac{b^4x^2}{a^4y^2}-(y-\beta)\frac{b^4}{a^2y^3}=0,$$

d'où

$$\frac{x-\alpha}{b^2x}=\frac{y-\beta}{a^2y}=\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}=\frac{x^2}{a^4}+\frac{1}{b^2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)=\frac{y^2}{b^4}+\frac{1}{a^2}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right).$$

On tire de ces égalités, d'abord,

$$1-\frac{\alpha}{x}=1-\frac{x^2}{a^2}+\frac{b^2x^2}{a^4}, \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha}{x}=\frac{c^2x^2}{a^4},$$

d'où

$$\frac{x}{a}=\left(\frac{a\alpha}{c^2}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \text{et de même} \quad \frac{y}{b}=-\left(\frac{b\beta}{c^2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation de l'ellipse et posant pour

simplifier $c^2 : a = A$, $c^2 : b = B$, on a pour la développée de l'ellipse

$$\left(\frac{\alpha}{A}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\beta}{B}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Courbe (fig. 29) symétrique par rapport aux axes de l'ellipse; quatre sommets avec rebroussements de première espèce situés sur les axes. Aux sommets A et B de l'ellipse sur le grand et le petit axe, répondent des rayons de courbure respectivement égaux à $b^2 : a$, $a^2 : b$. Leur différence



Fig. 29.

$$\frac{a^3 - b^3}{ab}$$

représente donc (**210**) la longueur de l'arc A_1B_1 de la développée, ou le quart du périmètre de cette courbe.

III. *Hyperbole :* l'équation de cette courbe

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

se déduisant de celle de l'ellipse par le changement de b^2 en $-b^2$, il suffira de faire ce changement dans les calculs précédents. Le rayon de courbure aura la même expression; l'équation de la développée, en posant $c^2 = a^2 + b^2$,

$$A = c^2 : a, \quad B = c^2 : b,$$

sera

$$\left(\frac{\alpha}{A}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{\beta}{B}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

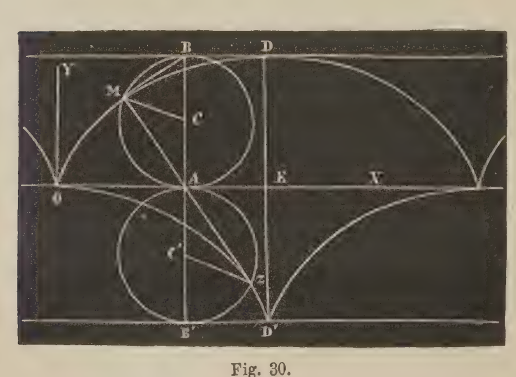


Fig. 30.

IV. *Cycloïde.* — Les équations de cette courbe

$$x = a(\omega - \sin \omega),$$
$$y = a(1 - \cos \omega)$$

donnent immédiatement (ch. XVII, ex. **2**)

$$ds = 2a \sin \tfrac{1}{2} \omega d\omega.$$

D'autre part, la tangente MB (fig. 30) à la cycloïde passant par le point B, diamétralement opposé au point de contact A, son inclinaison φ sur l'axe

des x (considérée comme positive ou négative selon que ω est $<$ ou $>$ π), aura pour expression

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}, \quad \text{d'où} \quad d\varphi = -\frac{d\omega}{2},$$

et la formule (1) du N° **205** nous donnera

$$(\delta) \qquad R = \pm \frac{ds}{d\varphi} = 4a \sin \tfrac{1}{2}\omega.$$

Mais la longueur N de la normale MA a évidemment pour expression

$$N = 2a \sin \tfrac{1}{2}\omega,$$

donc $R = 2N$. *Le rayon de courbure de la cycloïde est double de la normale.*

Cette propriété permet de trouver la développée de la cycloïde presque sans calcul. Le centre de courbure étant au point Z, la droite MZ est partagée en deux parties égales au point A, ce qui donne immédiatement (**184**, 5)

$$\alpha = OA + a \sin \omega = a(\omega + \sin \omega),$$
$$\beta = -y = -a(1 - \cos \omega).$$

Posons

$$\alpha = x' + a\pi, \quad \beta = y' - 2a, \quad \omega = \pi + \omega',$$

ce qui revient à transporter l'origine au point D′ qui a pour coordonnées $a\pi$, $-2a$.

Nous trouverons

$$x' = a(\omega' - \sin \omega'), \quad y' = a(1 - \cos \omega'),$$

équations d'une cycloïde égale à la première, puisque le rayon a du cercle générateur est le même, mais dont la position est différente ; on l'obtient en déplaçant la cycloïde primitive d'une quantité πa parallèlement à l'axe des x positifs, et d'une quantité $2a$ parallèlement à l'axe des y négatifs. Les sommets de la développée coïncident avec les points de rebroussement de la développante.

Des considérations géométriques conduisent aux mêmes résultats.

D'après le théorème connu, l'arc OZD′ de la développée est égal à la différence des rayons de courbure correspondants de la développante. L'expression (δ) donne $R = 0$ au point O et $R = 4a$ au point D. Donc l'arc $OZD' = 4a$, la longueur d'une arcade de la cycloïde est donc égale à $8a$, ou à quatre fois le diamètre du cercle générateur.

214. — V. *Spirale logarithmique.* — De l'équation $r = ae^{m\theta}$ de cette courbe on tire

$$\frac{dr}{d\theta} = mr, \quad \frac{d^2r}{d\theta^2} = m^2r, \quad R = r\sqrt{1+m^2},$$

d'après l'équation (IV). On a vu d'ailleurs (ch. XIV, ex. 8) que dans cette courbe la longueur N de la normale polaire est donnée par la même expression $r\sqrt{1+m^2}$. Dans la spirale logarithmique, le centre de courbure est donc au point de rencontre N de la normale et de la perpendiculaire au rayon vecteur menée par le pôle O. Si donc r', θ' sont les coordonnées du centre de courbure, on aura

$$r' = ON = S_n = mr, \quad \theta' = \frac{\pi}{2} + \theta,$$

et l'élimination de r et θ entre ces équations et celle de la courbe donnera

$$r' = mae^{m\left(\theta' - \frac{\pi}{2}\right)}$$

pour l'équation de la développée de la spirale. Mais *cette développée est une spirale égale à la première,* car en faisant tourner l'axe polaire autour du pôle, de manière à augmenter l'argument d'une quantité α vérifiant l'équation

$$mae^{m\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)} = 1,$$

on retombera sur une équation identique à celle de la spirale primitive.

Exercices.

1. Démontrer les formules suivantes, où R désigne le rayon de courbure, φ l'inclinaison de la tangente sur l'axe des x; r, P les distances de l'origine au point de contact et à la tangente :

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2, \quad \frac{1}{R} = \frac{d\sin\varphi}{dx}, \quad R = r\frac{dr}{dP}.$$

2. Rayon de courbure de la chaînette (ch. XVII, ex. 1) :

$$R = \frac{y^2}{a} = N, \quad R = \frac{a}{\cos^2\varphi}.$$

3. Calculer, par la formule (V), le rayon de courbure au sommet de la courbe

$$y^2 = ax + bx^2 + \cdots + kx^m, \quad (R = \tfrac{1}{2}a).$$

4. Rayon de courbure de la courbe

$$\frac{x^m}{a^m}+\frac{y^m}{b^m}=1.$$

R. On a

$$R=\frac{1}{m-1}\,\frac{a^m b^m}{x^{m-2}y^{m-2}}\left(\frac{x^{2m-2}}{a^{2m}}+\frac{y^{2m-2}}{b^{2m}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Soient T, T′ les segments de la tangente entre le point de contact et les axes OX, OY respectivement, P la distance de l'origine à la tangente. On a

$$(m-1)\,R=\frac{TT'}{P},$$

ce qui donne une construction facile.

5. Rayon de courbure R_1 de la développée de l'ellipse (**213**, III).

R. Cas particulier du problème précédent. Si l'on exprime R_1 en fonction de x, y, on trouve

$$R_1=3c^2xy\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right)^2=\frac{3\,c^2xy}{a^2b^2}\,R.$$

Soient T, N les segments compris entre les axes de l'ellipse, sur la tangente et la normale respectivement. On a

$$\frac{T}{N}=\frac{a^2b^2}{c^2xy},\quad \frac{R}{R_1}=\frac{T}{3N}.$$

6. Soient R le rayon de courbure de la courbe $y=f(x)$ au point M, R_1 celui de sa développée. Exprimer R_1 en fonction des dérivées de $f(x)$ et montrer que $R_1=3R\,\mathrm{tg}\,\psi$, ψ étant l'angle de la normale à la courbe en M avec la tangente, au point M, à la courbe (C), lieu des milieux des cordes perpendiculaires à cette normale. Construire R_1.

R. On démontre que $R_1=d.R^2:ds$, d'où

$$\frac{R_1}{3R}=f'(x)-[1+f'(x)^2]\,\frac{f'''(x)}{3f''(x)^2}.$$

Combinant avec la formule (ch. XIV, ex. **7**), on a

$$\frac{R_1}{3R}=\frac{1+\tau\tau'}{\tau'-\tau}.$$

7 Rayon de courbure de la podaire d'une courbe donnée par rapport au point O (ch. XIV, ex. **4** ch. XVII, ex. **3**). — *R.* Conservant les mêmes notations et affectant de l'indice 1 les quantités qui se rapportent à la podaire, on a

$$ds_1=rd\varphi,\quad \varphi_1=2\varphi-\theta-\frac{\pi}{2},\quad \frac{1}{R_1}=\frac{2}{r}-\frac{R\sin\mu}{r^2}=\frac{2}{r}-\frac{Rr_1}{r^3}.$$

8. Les équations

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}=1,\qquad \frac{x^2}{a^2+\mu}+\frac{y^2}{b^2+\mu}=1,$$

où a, b sont donnés et λ, μ sont des paramètres arbitraires satisfaisant à la condition $\lambda > -b^2 > \mu$, représentent respectivement une infinité d'ellipses et d'hyperboles ayant toutes les mêmes foyers.

Par un point $M(x, y)$ passent une ellipse λ et une hyperbole μ se coupant à angle droit. Exprimer les rayons de courbure R_λ, R_μ de ces deux courbes au point commun, en fonction des paramètres λ et μ. Prouver que le centre de courbure de l'une des deux courbes est le pôle de sa tangente en M, par rapport à l'autre.

R. On a

$$R_\lambda = \frac{(\lambda-\mu)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)}}, \quad R_\mu = \frac{(\lambda-\mu)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(a^2+\mu)(b^2+\mu)}}.$$

9. Rayon de courbure et développée de la courbe

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

R. On a d'abord

$$R = 3(axy)^{\frac{1}{3}}, \quad P = (axy)^{\frac{1}{3}}, \quad R = 3P.$$

Construction facile du centre de courbure. Ensuite

$$x - \alpha = -3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}, \quad y - \beta = -3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}},$$

d'où

$$\alpha + \beta = (x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}})^3, \quad \alpha - \beta = (x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}})^3;$$

d'où l'équation de la développée

$$(\alpha+\beta)^{\frac{2}{3}} + (\alpha-\beta)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}.$$

10. *Cissoïde :* $y^2(2a - x) - x^3 = 0.$

$$R = \frac{a\sqrt{x(8a-3x)^3}}{3(2a-x)^2}; \quad 4093\,a^3\alpha + 1152\,\alpha^2\beta^2 + 27\,\beta^4 = 0$$

11. *Lemniscate :* $r^2 = a^2 \cos 2\theta.$

R. N étant la normale polaire, on a

$$R = \frac{a^2}{3r} = \frac{N}{3}, \quad \alpha = \frac{2a\cos^3\theta}{3r}, \quad \beta = \frac{2a^2\sin^3\theta}{3r},$$

$$(\alpha^{\frac{4}{3}} - \beta_2)(\alpha^{\frac{2}{3}} + \beta^{\frac{2}{3}}) = \left(\frac{2a}{3}\right)^2.$$

12. Rayon de courbure de la podaire de la courbe $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ par rapport à l'origine.

R. L'équation de la podaire est, en coordonnées polaires,

$$r = \frac{a}{2}\sin 2\theta; \quad \text{d'où} \quad R = \frac{(a^2-3r^2)^{\frac{3}{2}}}{2a^2-3r^2}.$$

13. Rayon de courbure de la courbe $F(x, y) = 0$ en un point singulier A (ch. XVI, § 2),

R. Si le point (a, b) est un point ordinaire et θ_0 l'inclinaison de sa tangente sur l'axe des x, on trouve

$$R = \pm \lim \frac{\rho}{2(\theta - \theta_0)} = \pm \frac{\frac{\partial F}{\partial a} \sin \theta_0 - \frac{\partial F}{\partial b} \cos \theta_0}{\frac{\partial^2 F}{\partial a^2} \cos^2 \theta_0 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial a \partial b} \sin \theta_0 \cos \theta_0 + \frac{\partial^2 F}{\partial b^2} \sin^2 \theta_0}.$$

On peut remplacer $\sin \theta_0$, $\cos \theta_0$ par leurs valeurs tirées de l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial a} \cos \theta_0 + \frac{\partial F}{\partial b} \sin \theta_0 = 0.$$

St (a, b) est un point singulier, $F'_x(a, b)$, $F'_y(a, b)$ sont nuls et $f(\theta_0) = 0$; on trouve

$$R = \pm \frac{f'(\theta_0)}{2 f_1(\theta_0)}.$$

Si $f'(\theta_0)$ est nul sans que $f_1(\theta_0)$ le soit (rebroussement de première espèce), $R = 0$. — Si $f_1(\theta_0)$ est nul aussi (N^os **196** et **197**) ce qui comprend le cas des points de rebroussement de deuxième espèce, on a deux rayons de courbure, racines de l'équation

$$R^2 + \frac{f'_1(\theta_0)}{2 f_2(\theta_0)} R + \frac{f''(\theta_0)}{8 f_2(\theta_0)} = 0\text{[1]}.$$

CHAPITRE XIX.

DU CONTACT DES COURBES ET DES COURBES OSCULATRICES.

215. Soient (A), (B) (fig. 31) deux courbes planes, ayant respectivement pour équations, par rapport à un système d'axes rectangulaires ou obliques,

$$y = f(x), \quad \eta = \varphi(\xi).$$

M (x, y) étant un point de la courbe (A), si la courbe (B) passe par ce point, pour $\xi = x$ on aura $\eta = y$ ou $\varphi(x) = f(x)$. A partir du point M, donnons à l'abscisse x un accroissement infiniment petit h, positif ou négatif. La différence $f(x+h) - \varphi(x+h)$ des ordonnées des courbes (A) et (B) qui répondent à l'abscisse $x + h$ sera, en général, *un infiniment petit de même ordre que h*, comme on le verra plus loin. On dit alors que les courbes (A) et (B) se *coupent* au point M.

Mais cette différence $f(x+h) - \varphi(x+h)$ peut être du dexième

---

(1) On peut consulter sur cette question Painvin (*Annali di matematica*, série II, t. IV, p. 215).

ordre par rapport à h, et les courbes (A) et (B) ont alors un contact du premier ordre au point M. En général, *les deux courbes* (A) *et* (B) *sont dites avoir en un point commun* M *un contact de l'ordre* n *lorsque, pour un accroissement infiniment petit* h *de l'abscisse* x *de ce point, la différence des ordonnées correspondant à l'abscisse* $x + h$ *dans les deux courbes est un infiniment petit de l'ordre* $n + 1$ *par rapport à* h.

Cette définition exclut *essentiellement* le cas où la tangente en M à l'une des courbes (A) et (B) serait parallèle à l'axe des y, car l'ordre infinitésimal de l'accroissement de $f(x)$ ou de $\varphi(x)$ serait alors altéré.

Abstraction faite de cette hypothèse, on s'assure que l'ordre du contact ne dépend pas du choix des axes et que la définition exprime une propriété indépendante de leur direction. En effet du centre M, avec un rayon infiniment petit, décrivons l'arc de cercle M'M''. L'arc MM' de la courbe (A) et l'accroissement correspondant h sont de même ordre, car la limite de leur rapport $ds : dx$ (**200**) a une valeur finie, déterminée, puisque $dy : dx$ n'est pas infini dans le cas actuel. La différence M'μ' des ordonnées des deux courbes est de même ordre que la corde M'M'', car dans le triangle rectiligne M'μM'', la direction μ'M'' a pour limite celle de la tangente en M à la courbe (B) comme il est facile de s'en assurer (ch. III, ex. 6); la direction M'M'', à la limite, est également inclinée sur les tangentes à (A) et à (B) au point M; les angles en μ' et M'' tendent donc vers des limites déterminées différentes de zéro, et il en est de même du rapport de leurs sinus; il en est donc aussi de même du rapport des côtés M'μ', M'M''.

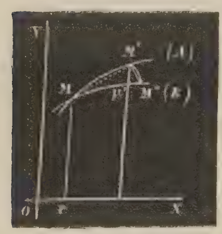


Fig. 31.

L'ordre infinitésimal de M'μ' par rapport à h est donc le même que celui de la corde M'M'' par rapport à l'arc MM', et est ainsi indépendant de la direction des x, sauf dans le cas que nous avons exclu.

Si les courbes (A) et (B) ont au point M un contact de l'ordre n, il est impossible qu'une troisième courbe (C), ayant avec l'une d'elles en ce même point un contact d'ordre inférieur à n, passe entre les deux premières. Autrement, l'ordonnée de cette courbe (C) différerait moins de l'ordonnée de la courbe (A) pour des valeurs infiniment petites de h, que l'ordonnée de la courbe (B); or cette seconde différence, étant d'un ordre plus élevé que la première, par hypothèse, finit par devenir toujours plus petite en valeur absolue (**58**).

216. Supposons que les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ soient continues ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre $n+1$ inclusivement, dans le voisinage de la valeur x qui appartient au point commun. Développons $f(x+h)-\varphi(x+h)$ par le théorème de Taylor, ce qui nous donnera

$$f(x+h)-\varphi(x+h)=f(x)-\varphi(x)+h\,[f'(x)-\varphi'(x)]$$
$$+\frac{h^2}{1.2}[f''(x)-\varphi''(x)]+\cdots+\frac{h^n}{1.2\ldots n}[f^n(x)-\varphi^n(x)]$$
$$+\frac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}[f^{n+1}(x+\theta h)-\varphi^{n+1}(x+\theta h)].$$

$f(x)-\varphi(x)$ étant nul, comme on l'a vu, il suit qu'en général $f(x+h)-\varphi(x+h)$ sera de l'ordre de h, ainsi qu'on l'avait annoncé. Si $f'(x)=\varphi'(x)$, $f(x+h)-\varphi(x+h)$ sera du second ordre et les deux courbes auront un contact du premier ordre. Pour que $f(x+h)-\varphi(x+h)$ soit de l'ordre $n+1$ par rapport à h, il est nécessaire et suffisant, d'après l'équation précédente, que les termes d'ordre inférieur à $n+1$ disparaissent tous du second membre, mais que le coefficient du h^{n+1} ne soit pas infiniment petit. De là résultent les équations

(1) $f(x)=\varphi(x)$, $f'(x)=\varphi'(x)$, ..., $f^n(x)=\varphi^n(x)$, $f^{n+1}(x)\gtrless\varphi^{n+1}(x)$.

Ces équations expriment les conditions analytiques du contact d'ordre n de deux courbes planes en un point M. Donc, *pour que deux courbes planes* (A) *et* (B) *aient, en un point* M, *un contact de l'ordre n, il faut et il suffit que les ordonnées de ces deux courbes et leurs dérivées de même ordre par rapport à l'abscisse, soient égales deux à deux jusqu'à l'ordre n inclusivement, pour la valeur de x qui correspond au point* M ; *tandis que les dérivées de l'ordre n + 1 auront des valeurs différentes.*

217. Si l'équation de la courbe (A) est donnée ainsi qu'un point M (x, y) sur cette courbe, tandis que l'équation de la courbe (B) est donnée *de forme*, mais renferme un certain nombre de *paramètres indéterminés*, on pourra se proposer de déterminer ceux-ci de manière que la courbe (B) passe par le point M et ait avec la courbe (A), en ce point, un contact de l'ordre le plus élevé possible. La courbe (B) est alors, parmi toutes celles dont l'équation a la même forme, celle qu'on nomme l'*osculatrice* de la courbe (A).

Supposons que l'équation de (B) renferme $n+1$ coefficients arbitraires. D'après la théorie exposée plus haut, on exprimera que l'ordonnée et ses dérivées successives jusqu'à l'ordre n, par rapport à x ont des

valeurs égales dans la courbe (A) et dans la courbe (B), pour la valeur de x qui répond au point M. On obtiendra ainsi $n+1$ équations qui, généralement, pourront être vérifiées par des valeurs convenables des paramètres, et suffiront à les déterminer complètement. La courbe osculatrice (B) sera ainsi déterminée. L'ordre du contact d'une osculatrice sera donc inférieur d'une unité, en général, au nombre des paramètres arbitraires renfermés dans l'équation des courbes de même espèce.

218. *Applications*. — I. *Droite osculatrice*. L'équation de la ligne droite

$$\eta = a\xi + b$$

renferme deux paramètres a, b : le contact sera généralement du premier ordre. On devra satisfaire aux équations (1), savoir

$$y = ax + b, \quad f'(x) = a,$$

et en éliminant a et b, on aura pour l'equation de la droite osculatrice

$$\eta - y = f'(x)(\xi - x).$$

On reconnaît l'équation de la tangente à la courbe (A) au point (x, y). La tangente n'est donc autre chose qu'une droite osculatrice. Le contact, généralement du premier ordre, peut s'élever au second en certains points particuliers. L'équation de la droite donne, en effet, $\varphi''(x) = 0$; donc, si $f''(x) = 0$, ce qui a lieu pour un point d'inflexion, le contact sera du second ordre.

II. *Cercle osculateur*. — L'équation du cercle en coordonnées rectangulaires

(2) $$(\xi - \alpha)^2 + (\eta - \beta)^2 = R^2,$$

renferme trois paramètres α, β, R, ce qui permet un contact du second ordre en général. Dérivons deux fois cette équation par rapport à ξ (α, β et R étant constants), et remplaçons, dans l'équation (2) et dans ses deux équations dérivées, les quantités ξ, η, $D\eta$, $D^2\eta$ respectivement par x, y, $f'(x)$, $f''(x)$, conformément à la théorie des contacts exposée plus haut : nous aurons les trois équations auxquelles doivent satisfaire α, β, R pour que le cercle (2) ait un contact du second ordre avec la courbe donnée (A) au point (x, y). Nous avons ainsi

$$\left\{\begin{array}{l} (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2, \\ x - \alpha + (y - \beta) f'(x) = 0, \\ 1 + f'(x)^2 + (y - \beta) f''(x) = 0. \end{array}\right.$$

Ces équations sont précisément (**208**) celles qui déterminent le centre de courbure (α, β) et le rayon de courbure R au point M : *le cercle de courbure est donc, parmi tous les cercles qui coupent une courbe en un point donné, celui qui a avec cette courbe le contact de l'ordre le plus élevé.*

Remarquons que, ce contact étant du second ordre, la différence $f(x+h) - \varphi(x+h)$ entre l'ordonnée de la courbe et celle du cercle osculateur est du troisième ordre par rapport à h; elle change donc de signe en même temps que h, et l'on retrouve cette propriété déjà démontrée (**211**), que le cercle de courbure traverse la courbe au point même où il la touche.

III. *Paraboles osculatrices.* — Nous désignons par le nom de *paraboles d'ordre n* les courbes comprises dans l'équation

$$\eta = a + b\xi + c\xi^2 + \cdots + p\xi^n,$$

qui renferme $n+1$ paramètres arbitraires $a, b, \ldots p$. Une telle courbe peut avoir un contact d'ordre n avec une courbe (A) en un point donné, et la détermination des paramètres peut ici se faire très simplement. Développons $\eta = \varphi(x+h)$ suivant les puissances ascendantes de h par la formule de Taylor, en remarquant qu'ici les dérivées d'ordre supérieur à n de $\varphi(\xi)$ sont nulles. On a donc

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + h\varphi'(x) + \frac{h^2}{1.2}\varphi''(x) + \cdots + \frac{h^n}{1\cdot 2\cdots n}\varphi^n(x);$$

mais les équations (1) nous donnent immédiatement $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, etc..., et en remplaçant h par $\xi - x$, nous aurons

$$\eta = f(x) + (\xi - x) f'(x) + \frac{(\xi - x)^2}{1.2} f''(x) + \cdots + \frac{(\xi - x)^n}{1.2\ldots n} f^n(x).$$

Telle est donc l'équation de la parabole osculatrice à la courbe (A), et la détermination des paramètres $a, b, \ldots p$ se trouve ainsi faite d'une manière indirecte.

Cette théorie du contact des courbes suppose, comme on l'a dit, certaines conditions relatives à la continuité des fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$ et de leurs dérivées : elle n'est donc pas applicable aux points où ces conditions cessent d'être vérifiées, et l'ordre du contact peut même alors devenir un nombre fractionnaire. Ainsi, pour la courbe qui a pour équation (ch. XVI, § 1, ex. 8)

$$y = a + x^{\frac{5}{3}},$$

on a, au point ($x = 0$, $y = a$), $f'(x) = 0$, $f''(x) = \pm\infty$. On s'assurera que la courbe a avec sa tangente en ce point un contact de l'ordre 2 : 3. Le rayon de courbure est nul.

Exercices.

1. Etant données une courbe et sa tangente en un point A, on déplace chaque point M de la courbe, parallèlement à cette tangente, de façon que la droite qui joint sa nouvelle position M' à la projection P du point M sur la tangente fasse avec MP un angle constant α. Montrer que la transformée a, avec la courbe primitive, un contact du second ordre au point A. Que faut-il pour que le contact soit du troisième ordre.

R. Soient, par rapport à la tangente et à la normale au point A, x et y les coordonnées du point M; x', y' celles du point M'. On a $y' = y$, $x' = x + y \operatorname{tg} \alpha$. Calculant $dy' : dx'$ et $d^2y' : dx'^2$, et appliquant au point A, on trouve le théorème. Le contact est du troisième ordre si $d^2y : dx^2 = 0$.

2. Si l'on détermine les $n+1$ paramètres arbitraires de l'équation d'une courbe (B) de manière que cette courbe ait, avec la courbe (A), $n+1$ points communs infiniment voisins, la courbe (B) a pour limite l'osculatrice de la courbe (A).

3. Si deux courbes ont, en un point, un contact de l'ordre n, leurs développées auront, au centre de courbure correspondant, un contact de l'ordre $n - 1$; les développées de ces développées un contact de l'ordre $n - 2$, et ainsi de suite.

4. On prend sur une courbe, à partir d'un point M, un arc infiniment petit $MM' = s$. Soient c la corde de cet arc, R le rayon de courbure de la courbe en M, R' celui de la développée; φ et α les angles formés avec la tangente en M par la tangente en M' et la corde MM' respectivement; T le point de concours des deux tangentes.

Démontrer que l'on a

$$s - c = \frac{s^3}{24R^2}, \quad \varphi - 2\alpha = -\frac{s^2}{6}\frac{R'}{R^3}, \quad MT + M'T - c = \frac{s^3}{8R^2}$$

en négligeant des infiniment petits d'ordre supérieur.

5. Lorsque deux courbes ont, en un point M, un contact du second ordre, si l'on prend, à partir de ce point, des arcs infiniment petits égaux sur les deux courbes, la distance entre leurs extrémités, projetée sur la normale en M, est un infiniment petit du 3e ordre

$$\frac{s^3}{6R^3}(R' - R_1),$$

et, projetée sur la tangente, un infiniment petit du quatrième ordre

$$\frac{s^4}{8R^4}(R' - R_1),$$

R' et R_1 désignant les rayons de courbure respectifs des développées des deux courbes au point M.

CHAPITRE XX.

ENVELOPPE D'UNE COURBE PLANE.

219. Une équation de la forme

(1) $$F(x, y, \alpha) = 0,$$

dans laquelle α désigne un paramètre arbitraire, représente un système de lignes, droites ou courbes, en nombre infini, que l'on obtient en attribuant au paramètre α des valeurs déterminées. A deux valeurs α, $\alpha + h$ du paramètre répondent deux lignes (C), (C′) qui, en général, se couperont en un ou en plusieurs points. Soit M_1 l'un de ces points d'intersection. Si l'on attribue à h des valeurs indéfiniment décroissantes, la ligne (C_1) tendra à se confondre avec la ligne (C), et le point M_1 tendra, sur cette dernière, vers une position limite M. Le lieu de ces points M sur toutes les lignes du système (1) est ce qu'on appelle l'*enveloppe* de ces lignes.

Pour trouver l'équation de l'enveloppe, appelons (x_1, y_1) les coordonnées du point M_1; elles vérifieront les équations des deux lignes (C) et (C′), donc

$$F(x_1, y_1, \alpha) = 0, \quad F(x_1, y_1, \alpha + h) = 0,$$

et par suite

$$F(x_1, y_1, \alpha + h) - F(x_1, y_1, \alpha) = 0.$$

Si la fonction $F(x_1, y_1, \alpha)$ est simple et admet une dérivée partielle par rapport à α, on aura (**91**), θ étant > 0 et < 1.

$$F(x_1, y_1, \alpha + h) - F(x_1, y_1, \alpha) = h\, F'_\alpha(x_1, y_1, \alpha + \theta h),$$

et par conséquent

$$F'_\alpha(x_1, y_1, \alpha + \theta h) = 0.$$

Mais, h ayant pour limite zéro et x_1, y_1 tendant respectivement vers les coordonnées x et y du point M, celles-ci satisferont à l'équation

(2) $$F'_\alpha(x, y, \alpha) = 0.$$

D'après cela, les points M qui, sur la courbe (C), appartiennent à l'enveloppe, sont déterminés par les équations (1) et (2) :

$$F(x, y, \alpha) = 0, \quad F'_\alpha(x, y, \alpha) = 0.$$

Si l'on élimine α entre ces deux équations, on aura entre x, y une

relation indépendante de la valeur du paramètre α; ce sera l'équation de l'enveloppe. Ainsi, *l'équation de l'enveloppe d'un système de courbes s'obtient en éliminant le paramètre α entre l'équation* $F(x, y, \alpha) = 0$ *des courbes du système et sa dérivée partielle* $F'_\alpha(x, y, \alpha) = 0$ *par rapport à ce paramètre.*

220. Si la fonction $F(x, y, \alpha)$ était à détermination multiple, le point M_1 pourrait répondre, sur la courbe (C), à l'une des formes de la fonction, sur la courbe (C′) à l'autre, et la formule de Bonnet (**91**) ne serait plus applicable. Ainsi, l'équation d'un cercle de rayon donné a dont le centre parcourt l'axe des y, peut s'écrire sous les deux formes

$$x^2 + (y - \alpha)^2 - a^2 = 0, \quad y = \alpha \pm \sqrt{a^2 - x^2};$$

sous la première, F est une fonction simple, l'application de la règle ci-dessus donne pour l'équation de l'enveloppe

$$x^2 - a^2 = 0, \quad \text{ou} \quad x = \pm a,$$

système de deux droites parallèles à l'axe des y, ce qui est exact. Mais, appliquée à la deuxième forme, la règle conduirait au résultat absurde $1 = 0$, parce que les points d'intersection de deux cercles infiniment voisins correspondent, sur l'un des cercles, au signe + du radical, sur l'autre, au signe —. En égalant les valeurs de y, on trouve

$$2\sqrt{a^2 - x_1^2} = h,$$

et à la limite $h = 0$ on retrouve l'équation des deux droites $a^2 - x^2 = 0$.

221. *L'enveloppe du système de lignes* (1), *en général, touche chaque enveloppée* (C) *au point d'intersection limite* M.

On peut considérer les équations

$$F(x, y, \alpha) = 0, \quad F'_\alpha(x, y, \alpha) = 0$$

comme exprimant les coordonnées x, y d'un point quelconque de l'enveloppe en fonction d'une variable auxiliaire α, et en les dérivant totalement par rapport à α, on en tirera les dérivées de x, y par rapport à α. La première donne ainsi

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{d\alpha} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{d\alpha} + \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0.$$

Mais, chaque point de l'enveloppe satisfaisant à l'équation (2), le dernier terme disparaît, et l'on a

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F}{dx} : \frac{\partial F}{dy}.$$

Cette expression du coefficient angulaire de la tangente est la même que fournirait l'équation (1) considérée comme équation de la courbe (C), c'est-à-dire, α étant constant. Donc au point M, où x, y, α ont la même valeur pour les deux courbes, la tangente est la même.

C'est ainsi que la développée d'une courbe, qui peut-être considérée comme l'enveloppe des normales d'après la remarque du n° **207**, est tangente à chacune de celle-ci au centre de courbure correspondant (**210**).

Mais ce théorème souffre des exceptions. Si, par exemple, l'équation (1) était de la forme

$$P \times Q = 0,$$

P et Q étant des fonctions de x, y, α, on aurait, pour trouver l'enveloppe, à éliminer α entre cette équation et l'équation

$$P\frac{\partial Q}{\partial \alpha} + Q\frac{\partial P}{\partial \alpha} = 0.$$

Ce système se ramène aux trois suivants :

$$P = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial \alpha} = 0; \quad Q = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial \alpha} = 0; \quad P = 0, \quad Q = 0.$$

Le premier donne l'enveloppe des courbes $P = 0$; le second celle des courbes $Q = 0$; le troisième, le lieu des points doubles des courbes $PQ = 0$, lieu qui, en général, ne sera pas tangent aux courbes $P = 0$ ni aux courbes $Q = 0$. Au reste, dans ce cas, la valeur ci-dessus de $dy : dx$ se présente sous la forme $0 : 0$ (**191**).

222. Le problème des courbes enveloppes se présente souvent sous une autre forme. L'équation du système de courbes

$$F(x, y, \alpha, \beta) = 0 \tag{3}$$

renferme deux paramètres variables α et β, liés entr'eux par une équation

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0. \tag{4}$$

On peut donc, dans l'équation (3), considérer β comme une fonction de α, définie par l'équation (4), et pour appliquer la règle du N° **219**, on devra poser

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial \beta}\frac{d\beta}{d\alpha} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}\frac{d\beta}{d\alpha} = 0,$$

ou par l'élimination de $d\beta : d\alpha$,

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha}\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}-\frac{\partial F}{\partial \beta}\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}=0. \tag{5}$$

Cette équation, qui remplace l'équation (2) pour le cas présent, jointe à (3) et à (4), permet d'éliminer α et β et d'arriver à l'équation de l'enveloppe. Soient, comme exemple,

$$\frac{x^m}{\alpha^m}+\frac{y^m}{\beta^m}=1, \qquad \frac{\alpha^p}{a^p}+\frac{\beta^p}{b^p}=1$$

les équations (3) et (4); a, b sont donnés, ainsi que les nombres m et p.

L'équation (5) sera ici

$$\frac{x^m}{\alpha^{m+1}}\frac{\beta^{p-1}}{b^p}-\frac{y^m}{\beta^{m+1}}\frac{\alpha^{p-1}}{a^p}=0,$$

d'où l'on tirera sans peine

$$\frac{x^m}{\alpha^m}:\frac{\alpha^p}{a^p}=\frac{y^m}{\beta^m}:\frac{\beta^p}{b^p}=1;$$

et par suite

$$\frac{\alpha^{m+p}}{a^{m+p}}=\frac{x^m}{a^m}, \quad \frac{\beta^{m+p}}{b^{m+p}}=\frac{y^m}{b^m},$$

d'où, éliminant α et β de l'équation entre α et β,

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{mp}{m+p}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{mp}{m+p}}=1,$$

ce qui sera l'équation de l'enveloppe.

Pour $m=1$, $p=2$, $b=a$, on trouve l'enveloppe d'une droite de longueur constante dont les extrémités s'appuient sur deux axes rectangulaires. C'est la courbe

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}},$$

épicycloïde engendrée par un point d'une circonférence du rayon $a:4$ roulant intérieurement sur un cercle de rayon a. Pour $m=2$, $p=0$, la courbe variable est une ellipse dont les sommets sont les projections des points d'une ellipse fixe sur ses axes. L'enveloppe est un système de quatre droites

$$\pm\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=1.$$

223. On doit observer que la règle du N° **219** subsiste intégralement si dans l'équation (1) x, y, au lieu de représenter des coordonnées rectilignes, représentaient des coordonnées polaires ou d'autre nature. On choisira donc, pour représenter la courbe variable, le système de coordonnées dans lequel l'équation de cette courbe sera de forme simple par rapport à α.

Exercices.

1. Enveloppe d'un cercle de rayon variable dont le centre parcourt l'axe des x :

$$(x - a\alpha)^2 + y^2 = a^2 \sin^2 \alpha.$$

R. L'équation de l'enveloppe résulte de l'élimination de α entre les deux équations

$$x = \frac{a}{2}(2\alpha - \sin 2\alpha), \quad y = \frac{a}{2}(1 - \cos 2\alpha).$$

C'est une cycloïde engendrée par un cercle de rayon $a : 2$.

2. Un angle constant A tourne autour de son sommet fixe A ; ses côtés coupent une droite fixe PQ en deux points B et C. Trouver l'enveloppe du cercle circonscrit au triangle ABC.

R. Soit a la perpendiculaire du point A sur PQ. Cette perpendiculaire est prise pour axe des x, l'origine en A, l'axe des y parallèle à PQ ; l'équation de l'enveloppe est

$$(x^2 + y^2)\left(x^2 + y^2 - \frac{4\,ax}{\sin^2 A} + \frac{4\,a^2}{\sin^2 A}\right) = 0;$$

elle se compose du point A et d'un cercle dont il est facile de trouver le centre et le rayon. (Ce problème se résout aussi géometriquement).

3. L'enveloppe (E) de la droite mobile

$$(\alpha) \qquad x \sin \alpha - y \cos \alpha - \varphi(\alpha) = 0$$

s'obtient par l'élimination de α entre cette équation et celle-ci :

$$(\beta) \qquad x \cos \alpha + y \sin \alpha - \varphi'(\alpha) = 0.$$

Montrer 1° que cette seconde équation est celle de la normale à l'enveloppe au point de contact; 2° que la développée (E_1) de la courbe (E) s'obtient en éliminant α entre l'équation (β) et

$$(\gamma) \qquad x \sin \alpha - y \cos \alpha + \varphi''(\alpha) = 0;$$

la développée de (E_1) en éliminant α entre (γ) et

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha + \varphi'''(\alpha) = 0,$$

et ainsi de suite ; 3° que les rayons de courbure R, R_1,... des courbes (E), (E_1),... sont donnés par les formules

$$R = \varphi(\alpha) + \varphi''(\alpha), \qquad R_1 = \varphi'(\alpha) + \varphi'''(\alpha), \ldots$$

4. De chaque point P d'une courbe on mène des parallèles aux axes coordonnés, et l'on joint par une droite les points où ces parallèles coupent les axes. Trouver l'enveloppe de cette droite.

R. Soient (α, β) les coordonnées du point P, $f(\alpha, \beta) = 0$ l'équation de la courbe. L'équation de l'enveloppe résulte de l'élimination de α, β entre les équations

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1, \quad \frac{x}{\alpha^2}\frac{\partial f}{\partial \beta} - \frac{y}{\beta^2}\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0, \quad f(\alpha, \beta) = 0.$$

Si l'on prend successivement pour la courbe $f(\alpha, \beta) = 0$ une droite $\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} = 1$, une parabole $\beta^2 = 2p\alpha$, une hyperbole $\alpha\beta = c^2 : 4$, on trouvera pour l'enveloppe

$$\frac{x^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} + \frac{y^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}} = 1, \quad y^2 = -8px, \quad xy = \frac{c^2}{16}.$$

5. On donne un cercle fixe (A) et une courbe (C), de chaque point P de celle-ci comme centre on décrit un cercle (B) qui coupe orthogonalement (A). Trouver l'enveloppe (E) de ce cercle. Cas particulier où (C) est une ellipse concentrique à (A).

R. L'origine des axes rectangulaires étant au centre O du cercle (A), soient (α, β) les coordonnées de P, $f(\alpha, \beta) = 0$ l'équation de (C), c le rayon de (A). L'équation de l'enveloppe résulte de l'élimination de α, β entre les équations

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + c^2 = 0, \quad x + y\frac{d\beta}{d\alpha} = 0, \quad f(\alpha, \beta) = 0.$$

Théorème : Si du point O on mène OT perpendiculaire sur la tangente à (C) en P, les deux points où OT coupe (B) appartiennent à l'enveloppe, et l'on a $r^2 - 2Pr + c^2 = 0$; r, P étant les distances de O à l'un de ces points et à la tangente. Pour l'ellipse, on a

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} = 1, \quad (x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4(a^2x^2 + b^2y^2) = 0.$$

6. Démontrer que, dans le problème du N° 222, les rayons de courbure R et R_1 d'une enveloppée et de l'enveloppe, au point de contact M, ont entr'eux la relation

$$(m-1)R = \left(\frac{mp}{m+p} - 1\right)R_1.$$

7. La *caustique par réflexion* d'une courbe (C) pour un point lumineux A (1) est la développée de la podaire, par rapport au même point, de la courbe (C') obtenue en prolongeant d'une longueur égale chaque rayon AP mené du point A à la courbe (C). Déduire de là la relation

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{r} = \frac{2}{R\cos i},$$

(1) On nomme ainsi l'enveloppe des rayons émanés de A et réfléchis sur la courbe (C).

r étant le rayon incident AP, l le rayon réfléchi terminé au point où il touche son enveloppe, R le rayon de courbure de (C), i l'angle d'incidence.

8. Caustique par réflexion d'un cercle de rayon a, le point A étant sur la circonférence.

R. Pour un choix convenable du pôle et de l'axe polaire, on trouve

$$r = \frac{2a}{3}(1 + \cos\theta) \text{ (Cardioïde).}$$

9. Trouver l'enveloppe de la perpendiculaire au rayon vecteur d'un point quelconque P d'une courbe, menée par ce point.

R. Soit $\beta = f(\alpha)$ l'équation en coordonnées polaires de la courbe donnée ; celle de l'enveloppe résultera de l'élimination de (α) entre les équations.

$$r\cos(\theta - \alpha) = f(\alpha); \quad r\sin(\theta - \alpha) = f'(\alpha).$$

CHAPITRE XXI.

TANGENTE ET PLAN NORMAL EN UN POINT D'UNE COURBE GAUCHE; PLAN OSCULATEUR, COURBURE ET TORSION.

224. On nomme *courbe gauche* ou *courbe à double courbure* toute courbe qui n'a pas tous ses points dans un même plan. Une telle courbe est représentée par deux équations entre les coordonnées x, y, z d'un quelconque de ses points, par rapport à trois axes rectangulaires OX, OY, OZ, en sorte que deux de ces variables sont fonctions de la troisième. Mais, pour plus de symétrie dans les formules, nous considérerons x, y, z comme des fonctions d'une même variable indépendante t, dont la différentielle dt sera toujours prise constante, et nous admettrons que ces fonctions aient des dérivées par rapport à t, que nous désignerons respectivement par x', y', z'. Nos formules comprendront le cas où l'on choisirait pour variable indépendante l'une des coordonnées, x par exemple; on ferait $t = x$, $x' = 1$, $dx =$ const.

225. Soient M, M' deux points sur une courbe dans l'espace; t, $t + \Delta t$ les valeurs correspondantes de t. La droite menée du point M au point M' a ses cosinus directeurs respectivement proportionnels à

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad \frac{\Delta y}{\Delta t}, \quad \frac{\Delta z}{\Delta t},$$

et lorsque le point M' se rapproche indéfiniment du point M, Δt tend vers

zéro, ces rapports ont pour limites respectives x', y', z'. La droite MM′ tend donc vers une droite limite ou tangente qui a pour équations, ξ, η, ζ désignant les coordonnées courantes de cette droite, qui passe par le point (x, y, z),

$$(1)\qquad \frac{\xi - x}{x'} = \frac{\eta - y}{y'} = \frac{\zeta - z}{z'},$$

ses cosinus directeurs α, β, γ sont donnés par les relations

$$(2)\qquad \frac{\alpha}{dx} = \frac{\beta}{dy} = \frac{\gamma}{dz} = \pm \frac{1}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}},$$

le double signe correspondant aux deux directions que l'on peut distinguer sur la droite à partir du point M.

L'équation de la projection de la tangente sur le plan XY,

$$\eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x),$$

comparée à l'équation (1) du n° **180**, montre que *la projection de la tangente à la courbe sur un plan arbitraire est tangente à la projection de la courbe, au point de contact projeté.*

226. La définition de la longueur d'un arc de courbe (**56**) s'applique aux courbes à double courbure, ainsi que le théorème du n° **200** : *La longueur d'un arc de courbe infiniment petit et celle de sa corde ont pour limite de leur rapport l'unité.*

D'après cela, désignons par s la longueur de l'arc de la courbe, depuis un point fixe A jusqu'au point M (x, y, z) que l'on considère ; s est une fonction de t, dont l'accroissement Δs pour un accroissement Δt de la variable, est égal à l'arc infiniment petit MM′ ; soit c la corde MM′. On a donc

$$\frac{ds}{dt} = \lim \frac{\Delta s}{\Delta t} = \pm \lim \frac{c}{\Delta t} = \pm \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2},$$

le radical étant pris positif si l'on compte l'arc dans le sens où la variable t est croissante. On aura donc

$$(3)\qquad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

pour la différentielle de l'arc. Il suit de là que les équations (1) peuvent s'écrire

$$(4)\qquad \alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \gamma = \frac{dz}{ds},$$

les cosinus directeurs se rapportant à la direction de la tangente prise dans le sens où l'arc s va croissant.

227. Le *plan normal*, en un point M d'une courbe à double courbure, est le plan mené par ce point perpendiculairement à la tangente en M.

La condition de passer par le point (x, y, z) et d'être perpendiculaire à la droite qui a pour cosinus directeurs α, β, γ, donne immédiatement

$$(\xi - x)\alpha + (\eta - y)\beta + (\zeta - z)\gamma = 0$$

pour l'équation de ce plan ; ou

$$(5) \qquad (\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz = 0.$$

Remplaçant dx, dy, dz par leurs valeurs tirées des équations de la courbe et supprimant le facteur commun dt, on aura l'équation du plan normal.

Tout plan passant par la tangente en M est dit *tangent* à la courbe ; toute droite menée dans le plan normal en M et par ce point est dite une *normale* à la courbe.

228. Le *plan osculateur* en un point M d'une courbe gauche dont les équations sont

$$x = f(t), \quad y = f_1(t), \quad z = f_2(t),$$

est la limite du plan mené par ce point et par deux autres points M′, M″ de la courbe, se rapprochant indéfiniment du premier. Soit

$$(a) \qquad X\xi + Y\eta + Z\zeta + P = 0$$

l'équation du plan MM′M″ ; X, Y, Z désignant les cosinus directeurs de la normale à ce plan. Posons

$$\varphi(t) = Xf(t) + Yf_1(t) + Zf_2(t) + P,$$

et soient t, t_1, t_2 les valeurs de t auxquelles répondent les points M, M′, M″. La condition pour le plan (a) de passer par les points M, M′, M″ entraîne les équations

$$\varphi(t) = 0, \quad \varphi(t_1) = 0, \quad \varphi(t_2) = 0,$$

d'où

$$\varphi(t_1) - \varphi(t) = 0, \quad \varphi(t_2) - \varphi(t_1) = 0,$$

et par suite du théorème de Rolle (**91**)

$$\varphi'(t') = 0, \quad \varphi'(t'_1) = 0,$$

t' étant compris entre t et t_1, t'_1 entre t_1 et t_2. De celles-ci, par le même théorème,

$$\varphi''(t'') = 0,$$

t'' étant compris entre t' et t'_1. Lorsque les points M′, M″ se rapprochent indéfiniment de M, t_1 et t_2 et par suite t' et t'' tendent vers t. Les valeurs limites de X, Y, Z, P satisfont donc aux équations

$$\varphi(t) = 0, \quad \varphi'(t) = 0, \quad \varphi''(t) = 0,$$

en sorte que X, Y, Z sont déterminés par les équations

$$(6)\quad X dx + Y dy + Z dz = 0, \quad X d^2x + Y d^2y + Z d^2z = 0, \quad X^2 + Y^2 + Z^2 = 1.$$

La résolution de ce système donne

$$(7)\qquad \frac{X}{dy d^2z - dz d^2y} = \frac{Y}{dz d^2x - dx d^2z} = \frac{Z}{dx d^2y - dy d^2x},$$

et l'équation du plan osculateur devient par cette substitution,

$$(8)\quad \begin{cases} (\xi - x)(dy d^2z - dz d^2y) + (\eta - y)(dz d^2x - dx d^2z) \\ \qquad + (\zeta - z)(dx d^2y - dy d^2x) = 0. \end{cases}$$

On remplacera dx, d^2x, dy,... par leurs valeurs fournies par les équations de la courbe, on supprimera le facteur dt^3 et l'on aura l'équation du plan osculateur. On observera que les termes de l'équation (8) se déduisent l'un de l'autre par *permutation circulaire*.

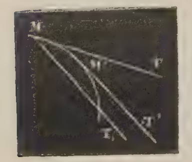


Fig. 32.

229. Soit MT (fig. 32) la tangente en M; *le plan mené par la tangente* MT *et par un point* M′ *infiniment voisin de* M *a encore pour limite le plan osculateur.*

Soit, en effet, (a) l'équation du plan TMM′. La condition de passer par le point M et par la tangente MT, dont les cosinus directeurs sont proportionnels à x', y', z', donne les deux équations

$$\varphi(t) = 0, \quad \varphi'(t) = 0,$$

et celle de passer par le point M′ donne $\varphi(t_1) = 0$, d'où

$$\varphi(t_1) - \varphi(t) = 0, \quad \varphi'(t') = 0, \quad \varphi'(t') - \varphi'(t) = 0, \quad \varphi''(t'') = 0.$$

On a donc, à la limite,

$$\varphi(t) = 0, \quad \varphi'(t) = 0, \quad \varphi''(t) = 0,$$

les coefficients du plan limite de TMM′ sont déterminés par les mêmes équations que ceux du plan osculateur.

Enfin, on trouvera encore le plan osculateur en M en cherchant *la limite du plan mené par la tangente* MT *et par une parallèle* MT_1 (fig. 32) *à la tangente* M'T' *en un point infiniment voisin* M'.

Soit encore (*a*) l'équation du plan TMT_1. La condition de passer par le point M et par la tangente MT donnera, comme ci-dessus, les équations

$$\varphi(t) = 0, \quad \varphi'(t) = 0,$$

et celle de passer par la droite MT_1, parallèle à la tangente M'T', donnera la relation $\varphi'(t_1) = 0$. De ces deux dernières on tire, par le théorème de Rolle,

$$\varphi'(t_1) - \varphi'(t) = 0, \quad \varphi''(t') = 0,$$

et quand le point M' tend vers le point M, on a, à la limite,

$$\varphi(t) = 0, \quad \varphi'(t) = 0, \quad \varphi''(t) = 0,$$

ce qui nous ramène aux équations (6) et montre l'identité du plan limite de TMT_1 avec le plan osculateur.

230. *La droite, intersection des plans osculateurs en deux points infiniment voisins* M *et* M', *a pour limite la tangente en* M.

L'équation du plan osculateur en M peut évidemment s'écrire

$$(b) \qquad X(\xi - x) + Y(\eta - y) + Z(\zeta - z) = 0,$$

et x, y, z, X, Y, Z varient avec t lorsque le point M se déplace sur la courbe. Au point M', l'équation du plan osculateur est

$$(X + \Delta X)(\xi - x - \Delta x) + (Y + \Delta Y)(\eta - y - \Delta y) + (Z + \Delta Z)(\zeta - z - \Delta z) = 0,$$

et l'intersection des deux plans vérifie ces deux équations et aussi celle qui résulte de leur soustraction

$$\Delta X(\xi - x) + \Delta Y(\eta - y) + \Delta Z(\zeta - z) - (X\Delta x + Y\Delta y + Z\Delta z) = 0,$$

dans laquelle on a négligé les termes du second ordre $\Delta X \Delta x$, etc... Divisant par Δt, faisant tendre Δt vers zéro et observant que $Xdx + Ydy + Zdz$ est nul (éq. 6), on verra que la droite d'intersection limite est déterminée par les deux équations (*b*) et

$$(c) \qquad (\xi - x)\,dX + (\eta - y)\,dY + (\zeta - z)\,dZ = 0.$$

Or, les valeurs de $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$ tirées des équations (*a*) de la tangente vérifient l'équation (*b*), ce qui était d'ailleurs évident, et donnent, dans l'équation (*c*),

$$dx\,dX + dy\,dY + dz\,dZ = 0,$$

ce qui est une identité, comme on le voit en différentiant la première équation (6) et ayant égard à la seconde. La tangente satisfait donc aux équations de la droite d'intersection limite et se confond avec elle.

231. Dans les courbes gauches comme dans les courbes planes, la *courbure* en un point M est la limite du rapport de l'angle des tangentes en deux points infiniment voisins M et M′, à l'arc compris MM′. Cette courbure se représente aussi par celle d'un cercle ayant une courbure égale à celle de la courbe en M, et dont le rayon R se nomme le *rayon de courbure* de la courbe au point M.

D'après cela, conservant les mêmes notations que ci-dessus, nous aurons

$$\frac{1}{R} = \lim \frac{TMT_1}{\text{arc } MM'}.$$

Décrivons, du centre M avec un rayon égal à l'unité, un arc de cercle TT_1 (fig. 33) qui mesurera l'angle infiniment petit TMT_1 des deux tangentes. Soient q sa corde TT_1; λ, μ, ν les cosinus directeurs de cette corde, prise de T vers T_1; Δs l'arc infiniment petit MM′. Les cosinus directeurs de la tangente MT étant α, β, γ, ceux de la tangente M′T′ ou de MT, seront $\alpha + \Delta\alpha$, $\beta + \Delta\beta$, $\gamma + \Delta\gamma$, et en projetant sur l'axe des x le contour triangulaire MTT_1M, on aura

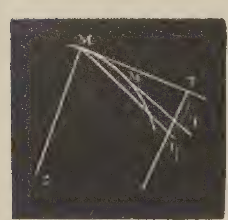


Fig. 33.

$$\alpha + q\lambda - (\alpha + \Delta\alpha) = 0, \quad \text{d'où} \quad \Delta\alpha = q\lambda,$$

et en divisent par Δs, faisant tendre Δt vers zéro et observant que

$$\lim_{\Delta t = 0} \frac{q}{\Delta s} = \lim \frac{\text{arc } TT_1}{\Delta s} = \frac{1}{R},$$

on trouvera, à la limite,

$$(9) \qquad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\lambda}{R}, \quad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\mu}{R}, \quad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\nu}{R},$$

les deux dernières équations s'obtenant, comme la première, par la projection du contour MTT_1M sur les axes des y et des z. Il est clair que les valeurs de λ, μ, ν se rapportent ici à la direction *limite* de TT_1.

On tire d'abord, des équations (9),

$$\frac{1}{R^2} = \frac{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}{ds^2},$$

d'où l'expression du rayon de courbure

$$\text{(10)} \qquad R = \frac{ds}{\sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}};$$

le signe du radical sera déterminé de manière à fournir pour R une valeur positive. L'expression $\sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}$, qui représente, comme on le voit sans peine, l'angle TMT_1 lorsqu'on regarde $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ comme les accroissements de α, β, γ et que l'on néglige des termes d'ordre supérieur, s'appelle *l'angle de contingence*.

232. Le direction (λ, μ, ν) définie par les équations (9) est la limite de la direction TT_1; celle-ci est dans le plan TMT_1 qui a pour limite le plan osculateur en M (**229**); de plus, les angles qu'elle fait avec MT et MT_1 étant égaux et l'angle TMT_1 étant infiniment petit, cette direction TT_1 à la limite devient normale à la tangente MT.

La parallèle MZ à cette direction limite de TT_1, menée par le point M, se nomme la *normale principale* au point M. Elle est, d'après ce qui précède, dirigée dans le plan osculateur, perpendiculairement à la tangente MT, et, d'après le sens dans lequel nous avons pris la direction TT_1, du côté où la projection de la courbe sur son plan osculateur tourne sa concavité. Ses cosinus directeurs sont donnés, sans ambiguité de signe, par les formules (9),

$$\text{(11)} \qquad \lambda = R\frac{d\alpha}{ds}, \quad \mu = R\frac{d\beta}{ds}, \quad \nu = R\frac{d\gamma}{ds}.$$

233. Transformons l'expression du rayon de courbure, au moyen des expressions (4) de α, β, γ. Nous aurons

$$d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2 = \frac{(ds\,d^2x - dx\,d^2s)^2 + (ds\,d^2y - dy\,d^2s)^2 + (ds\,d^2z - dz\,d^2s)^2}{ds^4}.$$

Mais on a $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, et en différentiant cette équation,

$$\text{(12)} \qquad ds\,d^2s = dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z,$$

ce qui donne

$$d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2 = \frac{ds^2\,(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2) + ds^2 d^2s^2 - 2ds^2 d^2s^2}{ds^4}$$

$$= \frac{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2}{ds^2},$$

et par conséquent

$$(13) \qquad R = \frac{ds^2}{\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2}}.$$

Remplaçant d^2s par sa valeur tirée de l'équation (12) et éliminant ds^2 sous le radical, on a encore

$$R = \frac{ds^3}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)(d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2)-(dxd^2x+dyd^2y+dzd^2z)^2}}$$

ou, d'après une formule du N° **1**,

$$R = \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(dyd^2z - dzd^2y)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2 + (dxd^2y - dyd^2x)^2}}.$$

Cette expression ne renferme plus que les différentielles premières et secondes de x, y, z; on l'écrit plus simplement, en désignant par A, B, C les coefficients de l'équation (8) du plan osculateur,

$$(14) \quad A = dyd^2z - dzd^2y, \quad B = dzd^2x - dxd^2z, \quad C = dxd^2y - dyd^2x,$$

sous la forme

$$(15) \qquad R = \frac{ds^3}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

234. Le *cercle de courbure* en un point donné M de la courbe, est le cercle de rayon R (ayant donc même courbure que la courbe), placé dans le plan osculateur en M, tangentiellement à la courbe, et tournant sa concavité du côté MZ. Son centre Z (x_1, y_1, z_1) est donc sur la normale principale, à une distance R du point M (x, y, z); il est déterminé par les équations

$$x_1 - x = R\lambda, \quad y_1 - y = R\mu, \quad z_1 - z = R\nu.$$

d'où

$$x_1 = x + R^2 \frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\right), \quad y_1 = y + R^2 \frac{d}{ds}\left(\frac{dy}{ds}\right), \quad z_1 = z + R^2 \frac{d}{ds}\left(\frac{dz}{ds}\right).$$

On peut aussi donner du rayon R une expression géométrique semblable à celle du N° **206** pour les courbes planes, au moyen du théorème suivant : *L'angle* TMM′ *que fait la corde d'un arc infiniment petit avec la tangente en* M *est la moitié de l'angle* TMT_1 *des tangentes aux extrémités de cet arc, abstraction faite de quantités d'un ordre supérieur à cet angle.*

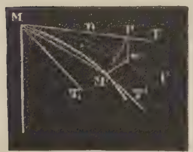


Fig. 34.

Projetons sur le plan osculateur en M l'arc MM′, sa corde MM′, la

tangente M'T' dont la projection *nm't'* (fig. 34) touchera en *m'* la projection M*m'* de la courbe, comme on le sait. La courbe plane M*m'* jouit (**203**) de la propriété

$$\text{angle } \mathrm{TM}m' = \tfrac{1}{2}\, \mathrm{T}nt',$$

car MT touche aussi cette courbe en M.

D'autre part le plan TMM' mené par la tangente MT et la corde MM' fait un angle infiniment petit avec le plan osculateur (**228**) ; donc d'après un principe établi au N° **60**, l'angle TMM' et sa projection TM*m'* sur le plan osculateur sont égaux, en négligeant une quantité infiniment petite par rapport à eux-mêmes; il en est de même de l'angle des tangentes MT, M'T' (l'angle TMT_1) et de sa projection T*nt'*, car l'angle TMT_1 fait un angle infiniment petit avec le plan osculateur (**229**). L'égalité ci-dessus subsistera donc aux quantités du même ordre près, lorsqu'on remplacera TM*m'* par TMM' et T*nt'* par TMT_1, ce qui démontre la proposition.

Cela posé, abaissons M'P perpendiculaire sur MT, et nous démontrerons par le même raisonnement qu'au N° **206**, que l'on a l'égalité

$$\mathrm{R} = \lim \frac{\overline{\mathrm{MP}}^2}{2\mathrm{M'P}} \cdot$$

Les considérations qui précèdent font voir aussi que le rayon et le centre de courbure en un point M de la courbe, coïncident respectivement avec le rayon et le centre de courbure de la courbe plane, projection de la courbe donnée sur son plan osculateur en M.

235. La courbure considérée jusqu'ici, dans une courbe gauche, est la seule que possède une courbe plane. Mais dans une courbe gauche il en existe une seconde, qui résulte du déplacement du plan osculateur quand on passe d'un point à un autre, et à laquelle on donne le nom de *seconde courbure* ou de *torsion*.

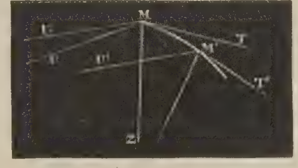


Fig. 35.

La *torsion*, en un point M d'une courbe gauche, est la limite du rapport de l'angle des plans osculateurs en deux points infiniment voisins M et M', à l'arc de courbe MM' entre ces deux points. Nous procéderons comme pour la première courbure. Élevant au point M la normale MU (fig. 35) au plan osculateur en ce point, et une parallèle

MU_1 à la normale $M'U'$ au plan osculateur en M', l'angle UMU_1, compris entre ces normales et qui est égal à l'angle des plans osculateurs infiniment voisins, a pour mesure l'arc de cercle UU_1 décrit du point M comme centre avec le rayon 1. Projetant le contour triangulaire MUU_1M sur les axes rectangulaires successivement, et désignant par $1 : T$ la torsion, par X, Y, Z les cosinus directeurs de la normale au plan osculateur, on aura comme au N° **231**,

$$\frac{1}{T} = \frac{\sqrt{dX^2 + dY^2 + dZ^2}}{ds}.$$

Mais les équations (6), différentiées en tenant compte de la seconde donnent

$$\begin{aligned} X\,dX + Y\,dY + Z\,dZ &= 0, \\ dx\,dX + dy\,dY + dz\,dZ &= 0, \\ d^2x\,dX + d^2y\,dY + d^2z\,dZ &= -(X\,d^3x + Y\,d^3y + Z\,d^3z), \end{aligned}$$

et si l'on résout ces équations par rapport à dX, dY, dZ par la méthode ordinaire, on aura, en observant que le dénominateur commun $X(dy\,d^2z - dz\,d^2y) + \cdots$ n'est autre chose que $AX + BY + CZ$,

$$\frac{dX}{Y\,dz - Z\,dy} = \frac{dY}{Z\,dx - X\,dz} = \frac{dZ}{X\,dy - Y\,dx} = -\frac{X\,d^3x + Y\,d^3y + Z\,d^3z}{AX + BY + CZ}.$$

Mais ces rapports égaux sont encore, comme on sait, égaux au rapport

$$\pm \frac{\sqrt{dX^2 + dY^2 + dZ^2}}{\sqrt{(Y\,dz - Z\,dy)^2 + (Z\,dx - X\,dz)^2 + (X\,dy - Y\,dx)^2}},$$

et comme la quantité sous le radical au dénominateur se réduit à

$$(X^2 + Y^2 + Z^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2) - (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)^2 = ds^2,$$

cette dernière fraction n'est autre chose que $\pm 1 : T$; on a donc

$$\frac{1}{T} = \pm \frac{X\,d^3x + Y\,d^3y + Z\,d^3z}{AX + BY + CZ},$$

ou, X, Y, Z étant respectivement proportionnels à A, B, C,

$$(16) \qquad \frac{1}{T} = \pm \frac{A\,d^3x + B\,d^3y + C\,d^3z}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Cette expression de la torsion, où l'on remplacera A, B, C par leurs valeurs (14), ne renfermera plus que les différentielles premières,

seconde s et troisièmes des coordonnées x, y, z. On doit prendre le signe qui donne pour T une valeur positive. T s'appelle le *rayon de torsion*, et $ds : T$ l'*angle de torsion.*

Remarque. Lorsqu'une courbe est plane, le plan osculateur en un point quelconque se confond avec le plan de la courbe, et la torsion est nulle en tous les points. On a donc, pour tout point de la courbe,

$$A d^3x + B d^3y + C d^3z = 0.$$

On voit d'ailleurs que toute courbe plane doit vérifier cette équation, car si ses coordonnées vérifient une équation de la forme

$$ax + by + cz + d = 0,$$

a, b, c, d étant des constantes, et si l'on différentie trois fois cette équation, on en tire

$$adx + bdy + cdz = 0, \quad ad^2x + bd^2y + cd^2z = 0, \quad ad^3x + bd^3y + cd^2z = 0.$$

L'élimination des constantes a, b, c conduit à la condition unique

$$(dyd^2z - dzd^2y)\, d^3x + (dzd^2x - dxd^2z)\, d^3y + (dxd^2y - dyd^2x)\, d^3z = 0,$$

qui n'est autre que l'équation ci-dessus.

236. Le plan UMU_1. mené par les perpendiculaires MU, MU_1 aux deux plans osculateurs infiniment voisins, est normal à l'intersection de ces deux plans, qui a pour limite la tangente en M. Le plan UMU_1, à la limite, se confond donc avec le plan normal. *La droite* UU_1, située dans ce plan et faisant avec MU un angle qui tend vers 90°, *est parallèle*, à la limite, *à la normale principale* MZ. Elle est de même sens ou de sens contraire selon que l'on a élevé la normale MU d'un côté ou de l'autre du plan osculateur, et nous verrons plus loin comment on choisit la direction MU de manière que UU_1 et MZ soient de sens contraires. Ses cosinus directeurs seront donc $-\lambda, -\mu, -\nu$.

D'après cela, si l'on projette le contour MUU_1M sur les axes comme on l'a dit plus haut et si l'on raisonne comme au N° **231**, on trouvera facilement les équations

$$(17) \qquad \frac{dX}{ds} = -\frac{\lambda}{T}, \quad \frac{dY}{ds} = -\frac{\mu}{T}, \quad = \frac{dZ}{ds} - \frac{\nu}{T}.$$

Exercices.

1. *Hélice.* — Cette courbe est tracée sur un cylindre circulaire droit par un point M dont la distance z au plan d'une section droite du cylindre varie proportionnellement à

l'angle t, que fait le plan passant par l'axe et par la génératrice au point M avec sa position initiale.

D'après cela, prenant l'axe du cylindre pour axe des z et menant l'axe des y par un point de la courbe, on a pour les équations de l'hélice

$$x = a\sin t, \quad y = a\cos t, \quad z = bt,$$

a étant le rayon du cylindre, b constant.

Équations de la tangente :

$$\frac{\xi - x}{y} = -\frac{\eta - y}{x} = \frac{\zeta - z}{b}.$$

$ds = dt\sqrt{a^2 + b^2}$; l'arc est proportionnel à l'ordonnée z. Cosinus directeurs de la tangente :

$$\alpha = \frac{y}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \beta = -\frac{x}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \gamma = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

γ est constant. *La courbe coupe les génératrices du cylindre sous un angle constant.*

Si l'on désigne par δ l'angle d'intersection,

$$\cos\delta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\delta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \text{tg} = \frac{a}{b}.$$

Coefficients de l'équation du plan osculateur :

$$A = by\,dt^3, \quad B = -bx\,dt^3, \quad C = -a^2dt^3;$$

d'où, pour l'équation du plan osculateur,

$$y\xi - x\eta - \frac{a^2}{b}(\zeta - z) = 0.$$

Cosinus directeurs de la normale à ce plan :

$$X = -\frac{by}{a\sqrt{a^2+b^2}}, \quad Y = \frac{bx}{a\sqrt{a^2+b^2}}, \quad Z = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

inclinaison constante du plan osculateur sur le plan XY.

Rayon de courbure constant :

$$R = \frac{a^2+b^2}{a}.$$

Cosinus directeurs de la normale principale :

$$\lambda = -\frac{x}{a}, \quad \mu = -\frac{y}{a}, \quad \nu = 0$$

Elle est normale à l'axe du cylindre et va rencontrer cet axe. — Coordonnées du centre de courbure :

$$x_1 = -\frac{b^2}{a^2}x = -\frac{b^2}{a}\sin t, \quad y_1 = -\frac{b^2}{a^2}y = -\frac{b^2}{a}\cos t, \quad z_1 = bt.$$

Le lieu du centre de courbure est une hélice.

Rayon de torsion constant :

$$T = \frac{a^2 + b^2}{b}.$$

2. Courbe représentée par les équations

$$y = \frac{x^2}{2a}, \quad z = \frac{x^3}{6a^2},$$

intersection de deux cylindres paraboliques.

Cosinus directeurs de la tangente :

$$\alpha = \frac{a}{a+y}, \quad \beta = \frac{x}{a+y}, \quad \gamma = \frac{y}{a+y}.$$

$$ds = \frac{a+y}{a}\,dx.$$

Plan osculateur :

$$\frac{\xi y}{a} - \frac{\eta x}{a} + \zeta = \frac{x^3}{6a^2}.$$

Normale au plan osculateur :

$$X = \frac{y}{a+y} = \gamma, \quad Y = -\frac{x}{a+y} = -\beta, \quad Z = \frac{a}{a+y} = \alpha.$$

Rayons de courbure et de torsion :

$$R = T = \frac{(a+y)^2}{a} = \frac{a}{\alpha^2}.$$

Normale principale : $\lambda = -\beta$, $\mu = \alpha - \gamma$, $\nu = \beta$.

Centre de courbure :

$$x_1 = -3z, \quad y_1 = y + \frac{a^2 - y^2}{a}, \quad z_1 = x + 4z.$$

3. *L'ellipse sphérique* est le lieu des points M tels que les arcs de grand cercle menés de ces points à deux points fixes F et F′ donnent une somme constante.

Trouver la tangente et le plan normal.

R. Soient O le centre, a le rayon de la sphère, 2ε l'angle FOF′, 2σ la somme des arcs MF + MF′. Prenant OZ normal au plan FOF′, OY passant par le milieu de l'arc FF′, on a pour équations de l'ellipse sphérique

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad \frac{\sin^2\varepsilon}{\sin^2\sigma}x^2 + \frac{\cos^2\varepsilon}{\cos^2\sigma}y^2 = a^2.$$

Tangente : $$\frac{(\xi - x)x}{-\operatorname{tg}^2\sigma} = \frac{(\eta - y)y}{\operatorname{tg}^2\varepsilon} = \frac{(\zeta - z)z}{\operatorname{tg}^2\sigma - \operatorname{tg}^2\varepsilon};$$

Plan normal : $$\left(\frac{\xi}{x} - \frac{\zeta}{z}\right)\operatorname{tg}^2\sigma - \left(\frac{\eta}{y} - \frac{\zeta}{z}\right)\operatorname{tg}^2\varepsilon = 0.$$

4. La courbe, intersection des deux surfaces

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a^2(b^2 - c^2)\,\mathrm{l}.x + b^2(c^2 - a^2)\,\mathrm{l}.y + c^2(a^2 - b^2)\,\mathrm{l}.z = k.$$

R. Posant $\frac{1}{P^2} = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}$, on a pour les équations de la tangente et du plan normal

$$\frac{\xi - x}{x\left(\frac{1}{P^2} - \frac{1}{a^2}\right)} = \frac{\eta - y}{y\left(\frac{1}{P^2} - \frac{1}{b^2}\right)} = \frac{\zeta - z}{z\left(\frac{1}{P^2} - \frac{1}{c^2}\right)},$$

$$(\xi - x)\,x\left(\frac{1}{P^2} - \frac{1}{a^2}\right) + (\eta - y)\,y\left(\frac{1}{P^2} - \frac{1}{b^2}\right) + (\zeta - z)\,z\left(\frac{1}{P^2} - \frac{1}{c^2}\right) = 0.$$

Différentielle de l'arc :

$$ds = \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2 - P^2}}; \quad (r^2 = x^2 + y^2 + z^2).$$

On projette une courbe sur un plan passant par la tangente en un point M et incliné de l'angle θ sur le plan osculateur en M. Les rayons de courbure R et R_1 de la courbe et de sa projection sont liés par l'équation

$$R = R_1 \cos\theta.$$

6. Démontrer les formules

$$\frac{d\lambda}{ds} = -\frac{\alpha}{R} + \frac{X}{T}, \quad \frac{d\mu}{ds} = -\frac{\beta}{R} + \frac{Y}{T}, \quad \frac{d\nu}{ds} = -\frac{\gamma}{R} + \frac{Z}{T}.$$

7. Les équations d'une courbe étant données sous la forme $x = \varphi(s)$, $y = \chi(s)$, $z = \psi(s)$, démontrer les relations

$$\varphi'\varphi'' + \chi'\chi'' + \psi'\psi'' = 0, \quad \varphi''^2 + \chi''^2 + \psi''^2 = \frac{1}{R^2},$$

$$\varphi''\varphi''' + \chi''\chi''' + \psi''\psi''' = -\frac{R'}{R^3}, \quad \Delta = \frac{1}{R^2T}, \quad \varphi'''^2 + \chi'''^2 + \psi'''^2 = \frac{1}{R^2T^2} + \frac{1 + R'^2}{R^4},$$

ou $\quad R' = \frac{dR}{ds} \quad$ et $\quad \Delta = (\chi'\psi'' - \psi'\chi'')\varphi''' + (\psi'\varphi'' - \varphi'\psi'')\chi''' + (\varphi'\chi'' - \chi'\varphi'')\psi'''$.

8. Soit $s = MM'$ un arc infiniment petit d'une courbe gauche. Démontrer que la distance δ du point M' au plan osculateur en M, la plus courte distance δ' des tangentes en M et en M', la différence ε entre l'arc s et sa corde, ont respectivement pour expressions, aux infiniment petits près du 4e ordre,

$$\delta = \frac{s^3}{6RT}, \quad \delta' = \frac{s^3}{12RT}, \quad \varepsilon = \frac{s^3}{24RT}.$$

9. Dans une courbe sphérique, le cercle de courbure au point M a pour *pôle*, sur la surface, le point de rencontre des arcs de grand cercle normaux à la courbe aux points infiniment voisins M et M'. Ce cercle est l'intersection de la sphère et du plan osculateur en M.

10. θ étant l'inclinaison du plan osculateur en M sur le plan tangent à la sphère, ε l'angle des grands cercles tangents à la courbe en M et en M', on a

$$\varepsilon = \frac{ds}{R}\cos\theta, \quad R = \sin\theta, \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{ds}{\varepsilon}, \quad T = \frac{ds}{d\theta}, \quad R^2 + T^2\left(\frac{dR}{ds}\right)^2 = 1.$$

11. Une courbe est définie sur une sphère de rayon 1, par une équation entre l'arc de grand cercle ρ mené d'un *pôle* A, et l'angle ω que fait cet arc avec un grand cercle fixe. V étant l'angle entre la tangente à la courbe et le rayon ρ, prouver que l'on a

$$\operatorname{tg} V = \sin\rho \frac{d\rho}{d\omega}, \quad ds^2 = d\rho^2 + \sin^2\rho d\omega^2, \quad \sin V = \sin\rho \frac{d\omega}{ds}.$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{ds}{dV + \cos\rho d\omega}, \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{(d\rho^2 + \sin^2\rho d\omega^2)^{\frac{3}{2}}}{(2\,d\rho^2 + \sin^2\rho d\omega^2)\cos\rho - \sin\rho d^2\rho}.$$

θ ayant la même signification que ci-dessus.

CHAPITRE XXII.

PLAN TANGENT A UNE SURFACE COURBE. SURFACES ENVELOPPES.

237. Lorsqu'on rapporte une surface à un système d'axes coordonnés OX, OY, OZ, l'ordonnée z de la surface est une fonction

(1) $$z = f(x, y)$$

des coordonnées horizontales x, y. Soit M (x, y, z) un point pris sur la surface; par ce point, faisons passer une courbe quelconque (C) tracée sur la surface. Sa tangente en M aura pour équations (**225**)

$$\frac{\xi - x}{dx} = \frac{\eta - y}{dy} = \frac{\zeta - z}{dz},$$

dx, dy, dz étant les différentielles des coordonnées de la courbe (C). Celle-ci étant tracée sur la surface, ses coordonnées doivent vérifier l'équation $z = f(x, y)$ de la surface, et leurs différentielles dx, dy, dz doivent satisfaire à l'équation

$$dz = p dx + q dy,$$

p, q désignant les dérivées partielles de f par rapport à x et à y. Si, dans cette équation, on remplace dx, dy, dz par les facteurs $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$ qui leur sont proportionnels dans les équations de la tangente, on obtient l'équation

(2) $$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y)$$

entre les coordonnées ξ, η, ζ, d'un point quelconque de la tangente en M

à une courbe quelconque (C) sur la surface. C'est donc l'équation du lieu de ces tangentes, et comme elle est du premier degré en ξ, η, ζ, le *lieu des tangentes menées en un point* M *d'une surface, à toutes les courbes que l'on peut tracer sur celle-ci par ce point, est un plan*, qu'on appelle le *plan tangent à la surface en ce point*. Il est représenté par l'équation (2).

Si l'équation de la surface est donnée sous la forme

$$F(x, y, z) = 0, \tag{3}$$

les dx, dy, dz d'une courbe tracée sur la surface vérifieront l'égalité

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0,$$

et en opérant comme plus haut on trouvera

$$(\xi - x)\frac{\partial F}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial F}{\partial y} + (\zeta - z)\frac{\partial F}{\partial z} = 0 \tag{4}$$

pour l'équation du plan tangent au point (x, y, z).

Cette théorie repose sur la propriété qu'ont les différentielles dx, dy, dz d'une courbe quelconque (C) tracée sur la surface, de satisfaire à une relation homogène du premier degré, dont les coefficients $(p, q, -1)$ dans le premier cas, ou (D_xF, D_yF, D_zF) dans le second, sont déterminés et indépendants de la détermination particulière de la courbe. Cette propriété suppose l'existence des dérivées partielles p et q, et cessera d'être vraie en certains points de la surface si p et q cessent d'être déterminés; par exemple, lorsque D_xF, D_yF, D_zF s'évanouissent simultanément en ces points. Dans ce cas, si l'on différentie une seconde fois l'équation (3), en observant que les coefficients de d^2x, d^2y, d^2z sont nuls au point considéré, et si l'on remplace encore dx, dy, dz par les facteurs proportionnels $\xi - x$, etc.., tirés des équations de la tangente à la courbe (C), on aura pour le lieu des tangentes à la surface au point considéré

$$\begin{aligned}(\xi - x)^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + (\eta - y)^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + (\zeta - z)^2\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + 2(\eta - y)(\zeta - z)\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \\ + 2(\zeta - z)(\xi - x)\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} + 2(\xi - x)(\eta - y)\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0.\end{aligned}$$

Cette équation représente un cône du second degré qui a son sommet au point (x, y, z).

238. La *normale* à une surface au point M est la perpendiculaire au plan tangent en M, élevée par ce point. Les axes OX, OY, OZ étant supposés rectangulaires, et λ, μ, ν désignant les angles directeurs de la normale par rapport à ces axes, on sait que les équations de la normale sont

$$\frac{\xi - x}{\cos\lambda} = \frac{\eta - y}{\cos\mu} = \frac{\zeta - z}{\cos\nu}.$$

D'autre part, l'équation du plan tangent étant sous la forme (2), les cosinus directeurs de la perpendiculaire à ce plan satisfont aux relations connues

$$(5) \qquad \frac{\cos\lambda}{p} = \frac{\cos\mu}{q} = \frac{\cos\nu}{-1} = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

donc, les équations de la normale seront

$$(6) \qquad \frac{\xi - x}{p} = \frac{\eta - y}{q} = \frac{\zeta - z}{-1},$$

et ses cosinus directeurs seront donnés par les équations (5). Si l'équation de la surface est sous la forme (3), on aura de même, par l'équation (4) du plan tangent,

$$(7) \qquad \frac{\cos\lambda}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{\cos\mu}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{\cos\nu}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \pm\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}$$

et les équations de la normale prendront la forme

$$\frac{\xi - x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{\eta - y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{\zeta - z}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Le double signe dont sont affectées les cosinus directeurs de la normale se rapporte aux deux directions opposées que l'on peut considérer sur cette droite à partir du point M. Généralement, la surface sépare dans l'espace deux régions, l'une *extérieure* dans laquelle $F(x, y, z)$ est positif, l'autre *intérieure* dans laquelle $F(x, y, z)$ est négatif. Le signe supérieur, dans les formules (5) et (7), se rapporte à la normale menée vers la région extérieure.

239. Si la surface est de révolution, par chaque point M passent un *méridien* AMB (fig. 36) et un *parallèle* CMD qui a son centre O sur l'axe de révolution AN. Le plan tangent en M est déterminé par la tangente au méridien et par la tangente MT au parallèle; celle-ci étant perpendiculaire au rayon OM et à l'axe AN, l'est au plan du méridien AMB. Le plan tangent en M est donc perpendiculaire au plan du méridien; *la normale en* M *se trouve dans le plan méridien et va couper l'axe de révolution en un point* N. Cette normale MN se confond évidemment avec la normale à la courbe méridienne AMB.

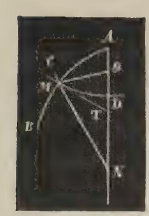


Fig. 36.

Faisons tourner autour de l'axe AN le méridien AMB qui va engendrer la surface, et sa normale MN. Le point M décrira le parallèle CMD. Dans une quelconque des positions de la figure mobile, la droite MN ne cessera pas d'être normale au méridien mobile, et par suite, normale à la surface. Le point N restant fixe dans cette rotation, on en conclut que *les normales à la surface de révolution, menées aux différents points d'un même parallèle, coupent l'axe de révolution en un même point et sont également inclinées sur cet axe.*

240. *Surfaces réglées.* — On appelle ainsi toute surface engendrée par une droite ou *génératrice* D, qui s'appuie constamment sur une courbe ou *directrice* fixe, la direction de la génératrice étant déterminée par le point P où elle rencontre cette courbe. Les cônes, les cylindres, l'hyperboloïde à une nappe sont des surfaces réglées.

Si (a, b, c) sont les coordonnées du point P; X, Y, Z les cosinus directeurs de la génératrice correspondante D, u la distance du point P à un point quelconque M (x, y, z) de cette génératrice, comptée positivement dans le sens (x, y, z), négativement en sens contraire les équations

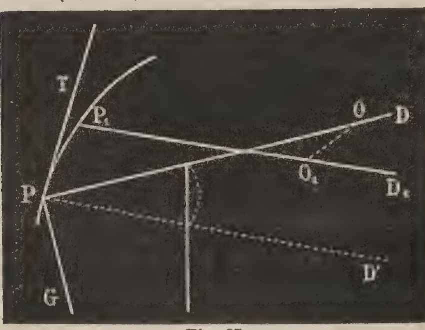


Fig. 37.

$$(8)\quad x = a + \mathrm{X}u, \quad y = b + \mathrm{Y}u, \quad z = c + \mathrm{Z}u$$

pourront être considérées comme représentant la surface : a, b, c, X, Y, Z seront des fonctions données d'une même variable, par exemple, l'arc s de la directrice, et x, y, z seront donnés en fonction de deux variables indépendantes s et u.

Soient D, D_1 (fig. 57) deux génératrices correspondant aux points infiniment voisins P (a, b, c) et P_1 $(a+da,\ b+db,\ c+dc)$. En leur appliquant les formules du N° **159**, on aura

$$X_1 = X + dX,\quad Y_1 = Y + dY,\quad Z_1 = Z + dZ,$$

(9) $$A = YdZ - ZdY,\quad B = ZdX - XdZ,\quad C = XdY - YdX,$$

d'où

(10) $$AX + BY + CZ = 0,\quad AdX + BdY + CdZ = 0,$$

(11) $$BZ - CY = dX,\quad CX - AZ = dY,\quad AY - BX = dZ,$$

à cause des relations

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1,\quad XdX + YdY + ZdZ = 0.$$

Ensuite, on a

(α) $$A^2 + B^2 + C^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2,$$

d'où, φ désignant l'angle infiniment petit des génératrices D et D_1,

(12) $$\sin\varphi = \varphi = \sqrt{dX^2 + dY^2 + dZ^2},\quad \cos\varphi = XX_1 + YY_1 + ZZ_1 = 1.$$

On a ensuite

$$H = Ada + Bdb + Cdc,\quad \varpi = \pm\frac{H}{\varphi},$$

et pour les cosinus directeurs de la perpendiculaire commune OO_1, d'après les formules (11) du N° **159** rappelé ci dessus,

(13) $$\cos\overline{\varpi X} = \frac{AH}{\varpi\varphi^2},\quad \cos\overline{\varpi Y} = \frac{BH}{\varpi\varphi^2},\quad \cos\overline{\varpi Z} = \frac{CH}{\varpi\varphi^2}.$$

Enfin, on trouvera

$$p = Xda + Ydb + Zdc,\quad p_1 = p + dadX + dbdY + dcdZ,$$

d'où, pour la distance u' du point P au point O, appelé *point central* de la génératrice D,

(14) $$u' = -\frac{dadX + dbdY + dcdZ}{\varphi^2}.$$

241. Ces résultats posés, déterminons le plan tangent en un point quelconque M de la génératrice D. Les équations (8) donnent

(β) $$dx = da + udX + Xdu,\quad dy = db + udY + Ydu,$$
$$dz = dc + udZ + Zdu,$$

en sorte que si λ, μ, ν désignent les angles directeurs de la normale en M, l'équation

$$\cos\lambda dx + \cos\mu dy + \cos\nu dz = 0$$

devra être vérifiée pour des valeurs arbitraires de ds et du, et se partagera en deux autres

$$(15)\quad \left\{ \begin{aligned} & X\cos\lambda + Y\cos\mu + Z\cos\nu = 0, \\ & (da + udX)\cos\lambda + (db + udY)\cos\mu + (dc + udZ)\cos\nu = 0. \end{aligned} \right.$$

La première montre que la normale MN est perpendiculaire à la droite D; donc, *dans toute surface réglée, le plan tangent en un point contient la génératrice qui passe par ce point.* On a ensuite, en résolvant ces équations et ayant égard aux formules (9), (11), (12), (10),

$$(16)\quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\cos\lambda}{Ydc - Zdb + Au} = \frac{\cos\mu}{Zda - Xdc + Bu} = \frac{\cos\nu}{Xdb - Yda + Cu} \\ & = \frac{A\cos\lambda + B\cos\mu + C\cos\nu}{dadX + dbdY + dcdZ + u\varphi^2} = \frac{\cos\lambda dX + \cos\mu dY + \cos\nu dZ}{-(Ada + Bdb + Cdc)}. \end{aligned} \right.$$

D'après ces équations, *en général*, $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ sont fonctions de u, *le plan tangent varie donc d'un point à l'autre d'une même génératrice.* La surface est alors une ***surface gauche.*** Pour trouver la loi de cette variation, il suffit d'interpréter géométriquement la dernière équation. Pour cela, menons par le point P une parallèle D′ à D_1 ; le plan DD′ a pour limite le *plan asymptotique.* Si, dans ce plan, on mène une perpendiculaire G à la génératrice D, on a, par un raisonnement semblable à celui du N° **233**, pour déterminer la direction PG,

$$(7)\qquad dX = \varphi\cos\overline{GX}, \quad dY = \varphi\cos\overline{GY}, \quad dZ = \varphi\cos\overline{GZ}\cdot$$

La dernière équation (16) devient, eu égard aux relations (13), (14), (17), et en désignant par $\overline{N\varpi}$, $\overline{NG}$ les angles que fait la normale à la surface avec les directions OO′ et G,

$$\frac{\varpi\varphi^2}{H}\,\frac{\cos\overline{NG}}{(u-u')\varphi^2} = -\frac{\varphi\cos\overline{NG}}{H},$$

ou

$$(18)\qquad \frac{\cos\overline{N\varpi}}{\cos\overline{NG}} = \frac{u'-u}{\varpi}\varphi,$$

En général, le rapport

$$\frac{\varpi}{\varphi} = \pm\frac{Ada + Bdb + Cdc}{dX^2 + dY^1 + dZ^2}$$

aura une valeur finie et déterminée k pour chacune des génératrices D, et l'équation (**18**) pourra s'écrire

$$\frac{\cos \overline{N\varpi}}{\cos \overline{NG}} = \frac{u' - u}{k}.$$

Au point central O, $u' - u = 0$, $\cos \overline{N\varpi} = 0$, et comme évidemment la direction limite de OO' est perpendiculaire au plan asymptotique, la normale à la surface sera dans ce plan. Donc, *au point central, le plan tangent est perpendiculaire au plan asymptotique*. On a donc $\cos \overline{NG} = \sin \overline{N\varpi}$, et l'équation précédente se réduira à

$$\cot \overline{N\varpi} = \frac{u' - u}{k}.$$

C'est le théorème de Chasles : *La cotangente de l'inclinaison du point tangent en un point quelconque, sur le plan asymptotique, varie proportionnellement à la distance du point de contact au point central.* Cette inclinaison est de 90° au point central, elle devient nulle à l'infini sur la génératrice. Le signe de $\cos \overline{Nu}$ change avec celui de $u' - u$, ce qui montre que le plan tangent s'incline en sens contraire suivant que le point de contact s'éloigne du point central dans un sens ou dans l'autre.

242. Cherchons sous quelles conditions le plan tangent sera le même tout le long d'une même génératrice. Au point P, où $u = 0$, les équations (16) donnent

$$\frac{\cos \lambda}{\mathrm{Y}dc - \mathrm{Z}db} = \frac{\cos \mu}{\mathrm{Z}da - \mathrm{X}dc} = \frac{\cos \nu}{\mathrm{X}db - \mathrm{Y}da}.$$

Pour que ces valeurs conviennent à un point quelconque de la génératrice, d'après (16), il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{Y}dc - \mathrm{Z}db} = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{Z}da - \mathrm{X}dc} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{X}db - \mathrm{Y}da},$$

équations qui se réduisent, en vertu des relations (10), à

$$\mathrm{A}da + \mathrm{B}db + \mathrm{C}dc = 0 \quad \text{ou} \quad \mathrm{H} = 0.$$

Or, on peut satisfaire à cette équation 1° en posant

$$\mathrm{A} = 0, \quad \mathrm{B} = 0, \quad \mathrm{C} = 0,$$

d'où l'on tire, d'après l'égalité (α),

$$d\mathrm{X} = 0, \quad d\mathrm{Y} = 0, \quad d\mathrm{Z} = 0,$$

c'est-à-dire que la génératrice a une direction constante, *la surface est une surface cylindrique*. On sait qu'en effet une telle surface jouit de la propriété énoncée.

2° En général, l'équation $H = 0$ donne

$$k = \frac{\varpi}{\varphi} = \frac{H}{\varphi^2} = 0,$$

la plus courte distance de deux génératrices infiniment voisines sera donc infiniment petite par rapport à l'angle qu'elles forment entr'elles. La surface est appelée *développable*. Les équations (16) donnent, dans ce cas,

$$\frac{\cos\lambda}{A} = \frac{\cos\mu}{B} = \frac{\cos\nu}{C} = \pm\frac{1}{\varphi},$$

la direction de la normale en un point quelconque de la génératrice D est parallèle à la direction limite OO'; donc, *dans une surface développable, le plan tangent est le même tout le long d'une génératrice et se confond avec le plan asymptotique.*

243. Les surfaces développables jouissent de propriétés remarquables. Le lieu du point central O des génératrices D est, en général, sur la surface, une courbe appelée *ligne de striction*. Si x', y', z' désignent les coordonnées d'un point de cette ligne, on a, en vertu des équations (β),

$$dx' = da + u'dX + Xdu', \quad dy' = db + u'dY + Ydu', \text{ etc.}$$

et en multipliant par A, B, C, ajoutant et ayant égard à l'équation $H = 0$ et aux équations (10),

$$(\gamma) \qquad Adx' + Bdy' + Cdz' = 0.$$

D'autre part, si l'on multiplie ces équations par dX, dY, dZ, et qu'on les ajoute en ayant égard aux équations (10) et (12), on trouvera

$$dXdx' + dXdy' + dZdz' = dXda + dYdb + dZdc + u'\varphi^2,$$

ou, d'après la relation (14),

$$(\delta) \qquad dXdx' + dYdy' + dZdz' = 0.$$

Des équations (γ) et (δ) on tire

$$\frac{dx'}{BdZ - CdY} = \frac{dy'}{CdX - AdZ} = \frac{dz'}{AdY - BdX}.$$

Or, il résulte des équations

$$AX + BY + CZ = 0, \quad XdX + YdY + ZdZ = 0,$$

que X, Y, Z sont respectivement proportionnels à ces mêmes binômes. Donc on a

$$\frac{dx'}{X} = \frac{dy'}{Y} = \frac{dz'}{Z},$$

équations qui montrent que la tangente à la ligne de striction, dont les cosinus directeurs sont proportionnels à dx', dy', dz', se confond avec la génératrice D.

Ainsi, *dans toute surface développable, les génératrices sont tangentes à une même courbe à double courbure, qui est le lieu du point central de ces génératrices, et qu'on nomme l'arête de rebroussement de la surface.*

Une développable peut être considérée comme le lieu des tangentes à une courbe gauche, et le plan tangent à la surface le long d'une génératrice, ou le plan asymptotique, se confond avec le plan osculateur de l'arête de rebroussement (**229**).

244. Cherchons l'expression de la différentielle $d\sigma$ de l'arc d'une courbe tracée sur la surface développable. Nous avons

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

et en vertu des équations (β), si l'on observe que

$$da^2 + db^2 + dc^2 = ds^2, \quad XdX + YdY + ZdZ = 0,$$

on a

$$d\sigma^2 = ds^2 + u^2\varphi^2 + du^2 + 2u\,(da\,dX + db\,dY + dc\,dZ)$$
$$+ 2\,(X\,da + Y\,db + Z\,dc)\,du.$$

D'après l'équation (14), si $\overline{DT}$ désigne l'angle de la génératrice D avec la tangente PT à la directrice, les deux derniers termes se réduisent à $-2uu'\varphi^2 + 2\,du\,ds \cos\overline{DT}$; on a donc

$$\frac{d\sigma^2}{ds^2} = 1 + (u^2 - 2uu')\frac{\varphi^2}{ds^2} + \frac{du^2}{ds^2} + 2\frac{du}{ds}\cos\overline{DT}.$$

Cette équation a lieu pour une surface réglée quelconque, mais dans les surfaces développables, on peut prendre pour directrice l'arête de rebroussement; on a $u' = 0$, $\cos\overline{DT} = 1$, d'après le théorème ci-dessus; de plus, $\varphi : ds$ est précisément la courbure $1 : R$ de l'arête de rebroussement; il vient donc

$$(\varepsilon) \qquad \frac{d\sigma^2}{ds^2} = \left(1 + \frac{du}{ds}\right)^2 + \frac{u^2}{R^2}.$$

Or, cette expression ne dépend que de la relation $u = \varphi(s)$ qui définit la courbe tracée sur la surface, et du rayon de courbure R de l'arête; nullement de la torsion de celle-ci.

On dit qu'une surface Σ est *applicable* sur une autre surface Σ', lorsqu'on peut faire correspondre point par point ces deux surfaces, de telle manière que la longueur de l'arc entre deux points d'une courbe quelconque, tracée sur la surface Σ, soit égale à celle de l'arc de la courbe correspondante entre les points correspondants sur la surface Σ'. On conclut facilement de là que deux courbes données se coupent, sur Σ, sous le même angle que leurs correspondantes sur Σ'.

Cela posé, étant donnée une surface développable, le rayon de courbure R de l'arête de rebroussement de cette surface sera une fonction déterminée de l'arc s de cette arête. Concevons que l'on trace sur un plan une courbe (C) pour laquelle la relation entre le rayon de courbure R et l'arc s soit la même, ce qui est possible, comme on le démontrera plus tard. Traçons une seconde courbe en prenant sur la tangente à la première (C), à partir du point de contact, une longueur $u = \varphi(s)$. En vertu de l'équation (ε), la différentielle de la fonction σ de s qui mesure la longueur de l'arc de cette dernière courbe aura la même expression que la différentielle de l'arc de la courbe tracée sur la développable; les arcs correspondants seront donc égaux sur les deux courbes.

Toute surface développable est donc applicable sur un plan; c'est de là que le nom de *développables* a été donné à ces surfaces.

245. *Surfaces enveloppes.* — La théorie des surfaces enveloppes est analogue à celle des courbes enveloppes (**219**). Une équation renfermant un paramètre variable α,

$$\text{(A)} \qquad F(x, y, z, \alpha) = 0,$$

représente un système de surfaces. Deux surfaces (S), (S'), correspondant à deux valeurs $\alpha, \alpha + h$ du paramètre, se coupent généralement suivant une courbe qui a pour limite une courbe déterminée, dite *caractéristique*, lorsque h tend vers zéro. Le lieu de ces caractéristiques est l'*enveloppe* des surfaces du système (A).

On obtient l'équation de l'enveloppe en éliminant α entre les équations

$$\text{(A)} \qquad F(x, y, z, \alpha) = 0, \quad \text{(B)}\ F'_\alpha(x, y, z, \alpha) = 0;$$

cela suppose que F désigne une fonction simple des variables x, y, z, α.

L'enveloppe est tangente à une enveloppée quelconque (S) *tout le long de la caractéristique correspondante.* En effet, nous pouvons considérer les équations (A) et (B) comme deux équations qui ont lieu entre les coordonnées x, y, z d'un point quelconque de l'enveloppe et une variable auxiliaire α. Nous tirons de l'équation (A), entre les différentielles totales de ces variables, la relation

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz + \frac{\partial F}{\partial \alpha}d\alpha = 0.$$

Mais comme, en chaque point de l'enveloppe, les variables x, y, z, α satisfont à l'équation (B), le dernier terme est nul identiquement, et la relation devient

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0.$$

Il en résulte, pour la différentielle totale dz, la même expression que l'on tirerait de l'équation de la surface (S), où α est une constante. Donc, les dérivées partielles p et q de z par rapport à x et à y auront respectivement les mêmes valeurs sur la surface enveloppe et sur l'enveloppée, en tout point de la caractéristique qui répond à cette enveloppée. Le plan tangent sera donc le même pour les deux surfaces.

Quand la surface (S) est un plan, la caractéristique est une droite, l'enveloppe est donc une surface réglée dont la caractéristique est la génératrice. Elle est, de plus, *développable*, puisque, d'après le théorème précédent, le plan tangent à l'enveloppe est le même tout le long d'une génératrice. Réciproquement, *toute développable peut être considérée comme l'enveloppe d'un plan variable*, savoir, le plan osculateur de l'arête de rebroussement de la développable. En effet, deux plans osculateurs infiniment voisins ont pour limite de leur intersection la tangente à l'arête (**230**), et l'on sait que la surface développable n'est autre chose que le lieu des tangentes à son arête de rebroussement.

246. Trois enveloppées

$$F(x, y, z, \alpha) = 0, \quad F(x, y, z, \alpha_1) = 0, \quad F(x, y, x, \alpha_2) = 0$$

qui répondent à des valeurs infiniment voisines α, α_1, α_2, du paramètre, se coupent généralement en un ou plusieurs points qui vérifient ces trois équations, et qui, à la limite, comme on le voit en suivant le même raisonnement que pour le plan osculateur, satisferont aux équations

$$F(x, y, z, \alpha) = 0, \quad F'_\alpha(x, y, z, \alpha) = 0, \quad F''_\alpha(x, y, z, \alpha) = 0.$$

Le lieu de ces points est une courbe, dont on obtient l'équation en éliminant α entre ces trois équations. On l'appelle l'*arête de rebroussement* de la surface enveloppe; elle est tangente à chacune des caractéristiques du système (A); cela se démontre par un raisonnement tout semblable à celui du nº **221**.

247. Si l'équation des surfaces (S) renfermait deux paramètres variables α et β, liés entr'eux par une équation

$$F(x, y, z, \alpha, \beta) = 0, \quad \varphi(\alpha, \beta) = 0,$$

on verrait que la caractéristique est définie par ces équations et par l'équation

$$\text{(C)} \qquad \frac{\partial F}{\partial \alpha}\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} - \frac{\partial F}{\partial \beta}\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 0,$$

en sorte que l'élimination de α, β entre ces trois équations conduira à l'équation de l'enveloppe. On opérerait de même si l'on avait trois paramètres liés entr'eux par deux équations.

On considère une autre espèce de surfaces enveloppes. Soit

$$\text{(D)} \qquad F(x, y, z, \alpha, \beta) = 0,$$

l'équation d'une surface variable renfermant *deux* paramètres *arbitraires* α, β. Si l'on suppose une relation arbitraire entre α et β, on reconnait en vertu des égalités (A) et (B), que l'intersection de la surface (D) par une surface infiniment voisine, prise à la limite, doit satisfaire à l'équation (D) et à celle-ci :

$$F'_\alpha(x, y, z, \alpha, \beta) + F'_\beta(x, y, z, \alpha, \beta)\frac{d\beta}{d\alpha} = 0.$$

Elle dépendra donc, par le rapport $d\beta : d\alpha$, de la relation arbitraire que l'on a établie entre β et α. Mais il y a un point (ou plusieurs) qui appartient à cette intersection limite indépendamment de la relation entre α et β; c'est celui qui vérifie l'équation (D) et les équations

$$F'_\alpha(x, y, z, \alpha, \beta) = 0, \quad F'_\beta(x, y, z, \alpha, \beta) = 0.$$

Le lieu de ces points où une surface du système (D) est coupée par toutes les surfaces infiniment voisines, se nomme encore l'*enveloppe* des surfaces renfermées dans l'équation (D). L'équation de cette enveloppe résulte donc de l'élimination de α et β entre les équations

$$F(x, y, z, \alpha, \beta) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \beta} = 0.$$

On démontrerait, par une méthode calquée sur celle du N° **221**, que chaque enveloppée, correspondant à des valeurs déterminées de α, β, est touchée par la surface enveloppe au point d'intersection limite déterminé par ces trois équations.

Exercices.

1. Surface qui a pour équation $xyz = a^3$. Équations du plan tangent et de la normale :

$$\frac{\xi}{x} = \frac{\eta}{y} = \frac{\zeta}{z} = 3, \quad x(\xi - x) = y(\eta - y) = z(\zeta - z).$$

2. Trouver, en coordonnées rectangulaires, 1° la distance P de l'origine O au plan tangent à une surface $z = f(x, y)$; 2° le lieu du pied (x_1, y_1, z_1) de cette perpendiculaire (*podaire* de la surface par rapport au point O).

R. On a

$$P = \pm \frac{z - px - qy}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}};$$

l'équation de la podaire résulte de l'élimination de x, y, z entre l'équation de la surface et les suivantes :

$$z_1 - z = p(x_1 - x) + q(y_1 - y), \quad \frac{x_1}{p} = \frac{y_1}{q} = \frac{z_1}{-1}.$$

On en déduit

$$(x_1 - x)x_1 + (y_1 - y)y_1 + (z_1 - z)z_1 = 0,$$

et en différentiant

$$x_1 dx + y_1 dy + z_1 dz = (2x_1 - x)dx_1 + (2y_1 - y)dy_1 + (2z_1 - z)dz_1,$$

d'où ce théorème : La normale à la podaire passe par le milieu du rayon vecteur mené de l'origine au point (x, y, z).

3. Plan tangent et podaire de la surface

$$\frac{x^m}{a^m} + \frac{y^m}{b^m} + \frac{z^m}{c^m} = 1.$$

R.

$$\frac{x^{m-1}\xi}{a^m} + \frac{y^{m-1}\eta}{b^m} + \frac{z^{m-1}\zeta}{c^m} = 1;$$

$$(ax_1)^{\frac{m}{m-1}} + (by_1)^{\frac{m}{m-1}} + (cz_1)^{\frac{m}{m-1}} = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)^{\frac{m}{m-1}}.$$

Pour l'ellipsoïde, $m = 2$, la podaire est la surface d'élasticité de Fresnel.

4. Un point (x_1, y_1, z_1) étant pris pour *pôle*, le plan $\xi x_1 + \eta y_1 + \zeta z_1 = k^2$ est son *plan polaire* par rapport à l'origine O (k constant). La *polaire réciproque* (S′) d'une surface (S) est le lieu du pôle du plan tangent à (S). Prouver que le plan tangent à (S′) en un point a pour pôle le point de contact du plan tangent correspondant à (S).

5. L'équation de la *surface des ondes* est

$$RS - T + q = 0,$$

où l'on a posé $x^2+y^2+z^2=R,\quad a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=S,$

$$a^2(b^2+c^2)x^2+b^2(c^2+a^2)y^2+c^2(a^2+b^2)z^2=T,\quad a^2b^2c^2=q,\quad a>b>c.$$

Plan tangent :

$$x[a^2(R-b^2-c^2)+S](\xi-x)+y[b^2(R-c^2-a^2)+S](\eta-y)+z[c^2(R^2-a^2-b^2)+S](\zeta-z)=c.$$

Soient $a'=\pm\sqrt{b^2-c^2}$, $b'=\sqrt{a^2-c^2}$, $c'=\pm\sqrt{a^2-b^2}$. Les quatre points

$$x=\frac{cc'}{b'},\quad y=0,\quad z=\frac{aa'}{b'}$$

sont des *points singuliers* où il n'y a pas de plan tangent. Le cône, lieu des tangentes, a pour équation

$$\frac{(\xi-x)^2}{a'^2}+\frac{(\zeta-z)^2}{c'^2}-\frac{b'^2}{a^2c^2}\eta^2+\frac{a^2+c^2}{aa'\,cc'}(\xi-x)(\zeta-z)=0,$$

x et z ayant les valeurs ci-dessus.

6. Enveloppe du plan qui coupe les axes rectangulaires OX, OY, OZ aux distances respectives

$$\frac{\alpha^2}{a+\alpha},\quad \frac{\alpha^2}{b+\alpha},\quad \frac{\alpha^2}{c+\alpha},$$

a, b, c étant donnés.

R. $$(x+y+z)^2+4(ax+by+cz)=0.$$

7. Enveloppe des sphères ayant leurs centres sur une ellipse et passant par le centre de celle-ci.

R. Les équations de l'ellipse étant

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad z=0,$$

celle de l'enveloppe sera

$$(x^2+y^2+z^2)^2-4(a^2x^2+b^2y^2)=0.$$

8. Enveloppe des plans tangents à l'ellipsoïde aux différents points d'une section plane.

R. Soient

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad lx+my+nz=p$$

les équations de l'ellipsoïde et du plan de la section; celle de l'enveloppe sera

$$(a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2=p^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)-(lx+my+nz-p)^2=0.$$

Surface conique à discuter.

9. Enveloppe du plan qui détache d'un trièdre tri-rectangle un tétraèdre à volume constant k^3. — *R.* $xyz=27k^3$.

10. Enveloppe du plan passant par les projections d'un point quelconque de l'ellipsoïde sur ses trois axes.

11. Enveloppe du plan $lx + my + nz = V$, l, m, n, V étant des paramètres arbitraires qui vérifient les équations

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1, \quad \frac{l^2}{V^2 - a^2} + \frac{m^2}{V^2 - b^2} + \frac{n^2}{V^2 - c^2} = 0,$$

a, b, c donnés.

R. Posant $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, on trouve

$$\frac{x^2}{r^2 - a^2} + \frac{y^2}{r^2 - b^2} + \frac{z^2}{r^2 - c^2} = 1 \text{ (Surface des ondes).}$$

CHAPITRE XXIII.

THÉORIE DES COURBES A DOUBLE COURBURE (*suite*). — SURFACE POLAIRE, SPHÈRE OSCULATRICE, DÉVELOPPÉES.

248. La *droite polaire*, en un point $M(x, y, z)$ d'une courbe gauche, est la limite de l'intersection du plan normal en ce point avec le plan normal en un point infiniment voisin M'. Soient t, $t + \Delta t$ les valeurs de t qui répondent aux points M, M'; les équations des plans normaux seront $N = 0$, $N + \Delta N = 0$, et leur intersection vérifiera les équations $N = 0$, $\Delta N = 0$; sa limite, les équations

$$N = 0, \quad dN = 0,$$

ou, en développant les calculs

(1) $$(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz = 0,$$

(2) $$(\xi - x)\,d^2x + (\eta - y)\,d^2y + (\zeta - z)\,d^2z - ds^2 = 0,$$

à cause de la relation $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$. La droite polaire est normale au plan osculateur en M, car l'intersection des deux plans normaux infiniment voisins est perpendiculaire à la fois aux tangentes MT, M'T', ou au plan TMT_1 (**229**), qui a pour limite le plan osculateur en M. Elle passe par le centre de courbure Z qui a pour coordonnées

$$x_1 = x + \lambda R, \quad y_1 = y + \mu R, \quad z_1 = z + \nu R \text{ (\textbf{234})}.$$

En effet, si l'on remplace ξ, η, ζ par ces valeurs dans l'équation (1), on a l'équation identique

$$\lambda dx + \mu dy + \nu dz = 0.$$

Dans l'équation (2), si l'on prend $t = s$ pour variable indépendante, on peut écrire l'équation

$$(\xi - x)\, d\alpha + (\eta - y)\, d\beta + (\zeta - z)\, d\gamma - ds = 0,$$

et la substitution $\xi = x_1$, etc... donne

$$R\,(\lambda d\alpha + \mu d\beta + \nu d\gamma) - ds = 0$$

ou, en ayant égard aux relations (9) du N° **231**,

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - 1 = 0$$

ce qui est encore une identité.

La droite polaire coïncide donc avec la normale au plan osculateur élevée par le centre de courbure. D'après cela, ses équations peuvent s'écrire

$$\frac{\xi - x_1}{X} = \frac{\eta - y_1}{Y} = \frac{\zeta - z_1}{Z},$$

X, Y, Z désignant toujours les cosinus directeurs de la normale au plan osculateur.

249. On appelle *surface polaire* de la courbe le lieu de la droite polaire relative à chacun des points de cette courbe. Son équation s'obtiendra en éliminant x, y, z entre les deux équations de la courbe et les équations (1) et (2). Cette surface peut être considérée, d'après cela, comme l'enveloppe des plans normaux à la courbe, et la droite polaire est sa caractéristique (**245**).

Mais la surface polaire est donc une surface réglée, et même développable puisqu'elle est l'enveloppe d'un plan mobile. *Son plan tangent le long d'une génératrice* D *n'est autre que le plan normal à la courbe donnée, au point pour lequel* D *est la droite polaire.*

L'arête de rebroussement de cette surface polaire est le lieu du point central $O(x', y', z')$ d'une génératrice quelconque D (**243**). Si on la considère comme l'enveloppe des caractéristiques D, comme au N° **246**, on obtiendra ses équations en éliminant le paramètre t entre l'équation du plan normal et les deux équations qu'on obtient en la différentiant par rapport à t. On aura ainsi

$$(4)\quad \begin{cases} (x' - x)\, dx + (y' - y)\, dy + (z' - z)\, dz = 0, \\ (x' - x)\, d^2x + (y' - y)\, d^2y + (z' - z)\, d^2z - ds^2 = 0, \\ (x' - x)\, d^3x + (y' - y)\, d^3y + (z' - z)\, d^3z - 3ds\,d^2s = 0, \end{cases}$$

en ayant égard, dans la dernière, à la relation

$$dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z = dsd^2s.$$

Éliminant x, y, z, t entre ces trois équations et les équations de la courbe, on aura, entre x', y', z', deux équations qui seront celles de l'arête cherchée.

On a vu aussi que le plan tangent à la développable, c'est-à-dire le plan normal en M à la courbe donnée, se confond avec le plan osculateur de son arête de rebroussement au point O. L'angle de deux plans normaux infiniment voisins, en M et en M′, ou l'angle de deux tangentes infiniment voisines MT, M′T′ (fig. 38), est donc égal à l'angle des deux plans osculateurs de la courbe OO′; et de même, les tangentes OZ, O′Z′ à l'arête de rebroussement étant respectivement normales aux plans osculateurs en M et en M′, l'angle qu'elles comprennent est égal à celui de ces deux plans. De là ces propriétés :

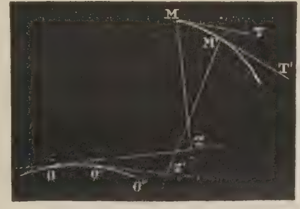


Fig. 38.

1° *L'angle de contingence d'une courbe gauche, en un point* M, *est égal à l'angle de torsion de l'arête de rebroussement de la surface polaire de cette courbe au point correspondant* O; 2° *l'angle de contingence de l'arête est égal à l'angle de torsion de la courbe.*

On voit aussi que les normales principales à la courbe et à l'arête sont parallèles entr'elles.

On peut mettre sous une autre forme l'équation de la surface polaire, en employant le mode de représentation adopté au N° **240**, pour les surfaces réglées. D'après les propriétés de la droite polaire, signalées au N° précédent, les équations de cette droite peuvent évidemment s'écrire

$$x = x_1 + Xu, \quad y = y_1 + Yu, \quad z = z_1 + Zu,$$

u désignant la distance du point (x, y, z) au centre de courbure. Au point O, on aura

$$x = x', \quad y = y', \quad z = z', \quad u = u',$$

et u' sera donné, d'après la formule (14) du N° **240**, par l'équation

$$u' = -\frac{dx_1 dX + dy_1 dY + dz_1 dZ}{\varphi^2} = -\left(\frac{dx_1}{ds}\frac{dX}{ds} + \frac{dy_1}{ds}\frac{dY}{ds} + \frac{dz_1}{ds}\frac{dZ}{ds}\right)T^2,$$

T étant le rayon de torsion de la courbe donnée, car l'angle φ de deux génératrices consécutives de la surface polaire est égal, d'après la remarque ci-dessus, à l'angle de torsion ds : T de la courbe donnée. Mais les formules (17) du N° **236** permettent d'écrire encore

$$u' = \left(\lambda \frac{dx_1}{ds} + \mu \frac{dy_1}{ds} + \nu \frac{dz_1}{ds} \right) \mathrm{T}.$$

D'autre part, les équations

$$x_1 = x + \lambda \mathrm{R}, \quad y_1 = y + \mu \mathrm{R}, \quad z_1 = z + \nu \mathrm{R}$$

différentiées, multipliées respectivement par λ, μ, ν et ajoutées, donnent, à cause des équations

$$\lambda dx + \mu dy + \nu dz = 0, \quad \lambda d\lambda + \mu d\mu + \nu d\nu = 0,$$

celle-ci

$$\lambda dx_1 + \mu dy_1 + \nu dz_1 = d\mathrm{R},$$

donc

$$u' = \mathrm{T} \frac{d\mathrm{R}}{ds}, \tag{5}$$

et ainsi, pour déterminer le point O, on a

$$x' = x + \lambda \mathrm{R} + \mathrm{XT} \frac{d\mathrm{R}}{ds}, \quad y' = y + \mu \mathrm{R} + \mathrm{YT} \frac{d\mathrm{R}}{ds}, \quad z' = z + \nu \mathrm{R} + \mathrm{ZT} \frac{d\mathrm{R}}{ds}. \tag{6}$$

Si l'on élimine x, y, z, t entre ces trois équations et les équations de la courbe donnée, on a entre x', y', z' deux équations qui sont celles de l'arête de rebroussement de la surface polaire.

250. Par le point M, et par trois autres points M′, M″, M‴ de la courbe, qui se rapprochent indéfiniment du point M, on peut faire passer une sphère : la limite de cette sphère se nomme *la sphère osculatrice* en M.

Par démontrer que cette sphère limite existe et calculer son rayon r et les coordonnées x', y', z' de son centre, soient t, t_1, t_2, t_3 les valeurs de l'auxiliaire t qui déterminent les points M, M′, M″, M‴. L'équation de la sphère passant par ces quatre points étant mise sous la forme

$$(\xi - x')^2 + (\eta - y')^2 + (\zeta - z')^2 - r^2 = 0,$$

désignons par $\varphi(t)$ ce que devient le premier membre de cette équation lorsqu'on y remplace ξ, η, ζ respectivement par $f(t)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$. Il est clair que les équations exprimant que la sphère passe par les points M, M′, M″, M‴, seront

$$\varphi(t) = 0, \quad \varphi(t_1) = 0, \quad \varphi(t_2) = 0, \quad \varphi(t_3) = 0,$$

et l'on en déduit pour la sphère limite, par le raisonnement souvent employé (**229**), les relations

$$\varphi(t) = 0, \quad \varphi'(t) = 0, \quad \varphi''(t) = 0, \quad \varphi'''(t) = 0,$$

c'est-à-dire, à cause des équations

$$x = f(t), \quad f'(t) = \frac{dx}{dt}, \quad \text{etc...},$$

$$(7) \quad \begin{cases} (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 - r^2 = 0, \\ (x - x')\,dx + (y - y')\,dy + (z - z')\,dz = 0, \\ (x - x')\,d^2x + (y - y')\,d^2y + (z - z')\,d^2z + ds^2 = 0, \\ (x - x')\,d^3x + (y - y')\,d^3y + (z - z')\,d^3z + 3ds d^2s = 0. \end{cases}$$

Les trois dernières sont évidemment les mêmes que les équations (4), donc *le centre de la sphère osculatrice, pour un point* M, *est au point* O *où la droite polaire correspondante touche l'arête de rebroussement de la surface polaire.*

Le rayon r de la sphère osculatrice est l'hypoténuse OM d'un triangle rectangle dont les côtés sont le rayon de courbure MZ $=$ R et la distance ZO $= u'$ du centre de courbure au point central O de la droite polaire.

On a donc, d'après la formule (5),

$$(8) \qquad r^2 = R^2 + T^2 \frac{dR^2}{ds^2}.$$

Le *cercle osculateur* d'une courbe gauche en un point M est la limite du cercle passant par ce point et par deux autres M′, M″, infiniment voisins de M. Il suit évidemment de là qu'il est dans le plan osculateur en M (**228**), et sur la sphère osculatrice : il coïncide donc avec la section de cette sphère par ce plan. Son centre est donc au point Z, projection du centre O de la sphère osculatrice sur le plan osculateur, et son rayon est MZ. *Le cercle osculateur ne diffère pas du cercle de courbure.*

252. Le lieu de la normale principale à une courbe gauche est une surface réglée, mais non développable. En effet, si les normales MZ, M′Z′. ... étaient tangentes à une même courbe SS′...., le plan osculateur de cette courbe au point S où elle est touchée par MZ serait le plan tangent à la développable le long de cette génératrice MZ ; il contiendrait les droites MZ, MT et se confondrait avec le plan osculateur de la courbe donnée en M. Celle-ci et la courbe SS′...., ayant mêmes plans osculateurs

aux points correspondants, auraient aussi même tangente (**230**), MT se confondrait avec MZ, ce qui est absurde.

Il n'y a d'exception que pour le cas où la courbe étant plane, le plan osculateur en un point quelconque se confond avec le plan de la courbe, et la tangente n'est plus déterminée par la limite de l'intersection des plans osculateurs infiniment voisins.

Toutefois, les courbes gauches admettent aussi des développées, jouissant de propriétés analogues à celles des courbes planes. On nomme *développée* d'une courbe gauche toute courbe dont les tangentes vont rencontrer normalement la courbe donnée.

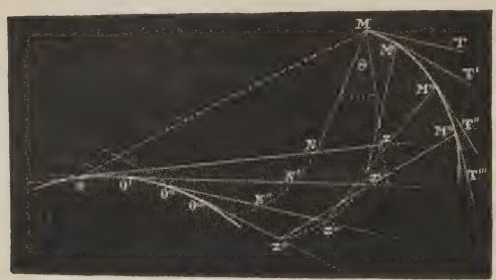


Fig. 39.

D'après cela, soient toujours (x, y, z) les coordonnées d'un point M de la courbe; (ξ, η, ζ) celles du point correspondant N (fig. 39) de la développée, σ l'arc de cette courbe compté positivement dans le sens MN, ρ cette distance MN. Les conditions du problème sont exprimées par les équations

$$(9)\qquad \frac{d\xi}{d\sigma}=\frac{\xi-x}{\rho},\quad \frac{d\eta}{d\sigma}=\frac{\eta-y}{\rho},\quad \frac{d\zeta}{d\sigma}=\frac{\zeta-z}{\rho},$$

$$(10)\qquad (\xi-x)\,dx+(\eta-y)\,dy+(\zeta-z)\,dz=0.$$

Mais en différentiant l'équation

$$(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2=\rho^2$$

et ayant égard à l'équation (10), on a

$$(\xi-x)\,d\xi+(\eta-y)\,d\eta+(\zeta-z)\,d\zeta=\rho d\rho,$$

d'où, remplaçant $d\xi$, ... par leurs valeurs (9),

$$[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2]\frac{d\sigma}{\rho}=\rho d\rho,$$

ou

$$d\sigma=d\rho.$$

On conclut de là, comme nous l'avons fait pour les courbes planes (**210**), que *la longueur d'un arc quelconque de la développée est égale à la différence des longueurs des normales à la courbe, tangentes aux extré-*

mités de cet arc. Si donc on plie un fil flexible sur la développée et qu'on le détache tangentiellement pour le terminer en M à la courbe, cette extrémité M décrira la courbe lorsqu'on développera le fil en le tenant constamment tendu.

Remarquons encore que l'équation (10), différentiée, donne

$$(11)\qquad (\xi - x)\,d^2x + (\eta - y)\,d^2y + (\zeta - z)\,d^2z - ds^2 = 0,$$

car $d\xi\,dx + d\eta\,dy + d\zeta\,dz$ est nul, la tangente MT à la courbe et la tangente MN à sa développée se coupant à angle droit. Mais les équations (10) et (11) sont celles de la droite polaire au point M (**248**), donc *le point* N *où la normale* MN *à la courbe touche une développée de celle-ci est sur la droite polaire correspondant au point* M. *Toutes les développées d'une courbe gauche sont donc tracées sur sa surface polaire.*

Enfin, le plan osculateur de la développée NN'... au point N n'est autre que le plan tangent à la développable, lieu des tangentes à cette courbe ou des normales MN, M'N', ... à la courbe donnée. Ce plan tangent contient la tangente MT à la courbe, TMN est donc le plan osculateur cherché. *Le plan osculateur en un point* N *d'une développée est donc perpendiculaire au plan normal à la courbe donnée, ou au plan tangent à la surface polaire en* N. Il s'ensuit que la normale principale de la développée en N est parallèle à la tangente MT.

252. Toute développée de la courbe MM'M'' ... jouit d'une propriété qui achève d'établir l'existence de ces courbes. Appelons θ l'angle NMZ (fig. 39) entre la normale principale MZ et la tangente MN à la développée. Cet angle étant le complément de celui que fait la direction MN avec la droite polaire ZO, on a

$$(12)\qquad \rho \sin\theta = (\xi - x)\,X + (\eta - y)\,Y + (\zeta - z)\,Z,$$

d'où, différentiant et observant que $X dx + Y dy + Z dz = 0$, on a

$$\sin\theta\, d\rho + \rho\cos\theta\, d\theta = (\xi - x)\,dX + (\eta - y)\,dY + (\zeta - z)\,dZ + X d\xi + Y d\eta + Z d\zeta.$$

Mais on tire des équations (9), (12) et de l'équation $d\sigma = d\rho$,

$$X d\xi + Y d\eta + Z d\zeta = \sin\theta\, d\rho,$$

d'où

$$\rho\cos\theta\, d\theta = (\xi - x)\,dX + (\eta - y)\,dY + (\zeta - z)\,dZ.$$

Remplaçons dX, dY, dZ par leurs valeurs (**236**), et observons que

$$(\xi - x)\,\lambda + (\eta - y)\,\mu + (\zeta - z)\,\nu = \rho\cos\theta,$$

nous trouverons enfin

$$(13) \qquad d\theta = -\frac{ds}{T}.$$

L'angle que fait la tangente à la développée avec la normale principale varie, d'un point de la courbe au point infiniment voisin d'une quantité égale à l'angle de torsion de la courbe.

Concevons donc que, du centre d'une sphère de rayon égal à l'unité, on mène des rayons parallèles aux droites polaires successives ZO, Z'O',... Leurs extrémités traceront sur la sphère une courbe dont l'arc infiniment petit $d\tau$ mesurera l'angle de deux droites polaires consécutives et sera, par suite, égal à l'angle de torsion de la courbe donnée. On aura donc

$$d\tau = \frac{ds}{T} = -d\theta,$$

et par suite $\tau = C - \theta$, C désignant une constante arbitrairement choisie (**91**).

D'autre part, la portion NZ de la droite polaire entre la développée et le centre de courbure, est égale à R tg θ, donc

$$\xi - x_1 = \text{RX tg}\,\theta, \quad \eta - y_1 = \text{RY tg}\,\theta, \quad \zeta - z_1 = \text{RZ tg}\,\theta,$$

et l'on a pour les coordonnées d'un point quelconque de la développée

$$(14)\left\{\begin{aligned} \xi &= x + \text{R}\,[\lambda + \text{X tg}\,(\text{C} - \tau)],\\ \eta &= y + \text{R}\,[\mu + \text{Y tg}\,(\text{C} - \tau)],\\ \zeta &= z + \text{R}\,[\nu + \text{Z tg}\,(\text{C} - \tau)].\end{aligned}\right.$$

Si l'on a exprimé, en fonction de la variable indépendante t, les quantités x, y, z, R, λ, μ, ν, X, Y, Z, τ qui entrent dans ces équations, on aura aussi ξ, η, ζ en fonction de cette variable t, et ces équations seront celles d'une développée quelconque. A chaque valeur de la constante C répond une développée particulière. Il y en a donc une infinité.

253. L'équation (13) peut se mettre sous une autre forme. L'angle μ de la tangente MN à la développée avec la droite polaire ZO, est le complément de θ. On a donc

$$d\mu = -d\theta = \frac{ds}{T} = \frac{ds'}{R'},$$

ds' : R' désignant l'angle de contingence de l'arête de rebroussement (**249**). Supposons que l'on développe la surface polaire sur un plan : l'arête de rebroussement se transforme en une courbe plane AB dans laquelle la longueur de l'arc s' et le rayon de courbure R' ne subissent

aucun changement; les angles μ restent aussi les mêmes, d'après une propriété remarquée au N° **244**. Si donc nous désignons par φ' l'inclinaison de la tangente à la transformée plane de l'arête de rebroussement sur une tangente déterminée OZ (fig. 40), l'angle de contingence $d\varphi' = ds' : R'$ de cette transformée restera égal à $d\mu$, et l'on aura

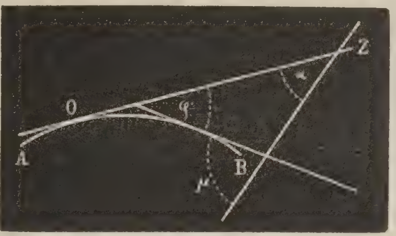


Fig. 40.

$$d\mu = d\varphi', \quad \mu = \varphi' + A,$$

A désignant une quantité constante. Mais $\mu - \varphi'$ représente l'angle α que fait la tangente à la transformée plane de la développée NN′N″ ... avec la même droite fixe ZO. On a donc $\alpha = A$, c'est-à-dire que les tangentes à la transformée de la développée sont toutes également inclinées sur une droite OZ, propriété qui n'appartient qu'à une ligne droite. *Les développées d'une courbe gauche jouissent donc de la propriété de se transformer toutes en lignes droites, lorsqu'on développe la surface polaire sur un plan.* On voit facilement que toutes ces droites vont passer par un même point du plan.

De plus, comme le développement n'altère pas la longueur des courbes tracées sur la surface, *les développées sont les lignes les plus courtes qu'on puisse tracer entre deux quelconques de leurs points sur la surface polaire,* car cette propriété appartient aux droites qui sont leurs transformées planes.

Dans une courbe plane, le plan osculateur se confond partout avec le plan de la courbe; la surface polaire est une surface cylindrique dont les génératrices sont normales au plan de la courbe; sa trace sur ce plan coïncide avec le lieu des centres de courbure de la courbe. L'angle de torsion est nul, $d\theta$ est donc nul aussi, et l'angle θ que fait la tangente à une développée donnée avec le rayon de courbure est constant. Les développées coupent les génératrices du cylindre sous un angle constant, ce sont des *hélices*.

Parmi ces développées, une seule est plane, elle correspond à $\theta = 0$. C'est le lieu des centres de courbure ou la développée ordinaire des courbes planes.

Dans une courbe sphérique, tous les plans normaux passent par le centre de la sphère; la surface polaire est une surface conique dont le sommet est au centre de la sphère.

254. *Contact des courbes gauches.* — Deux courbes (A) et (B) ayant un point commun M, si l'on mène à une distance infiniment petite du point M un plan qui coupe ces courbes respectivement en M' et μ', et si la distance M' μ' est de l'ordre $n + 1$ par rapport à l'arc MM', ont dit que les deux courbes ont, au point M, un contact de l'ordre n. Cet ordre sera d'ailleurs indépendant de la direction du plan sécant, pourvu qu'il ne soit pas parallèle à la tangente en M à l'une des courbes (A), (B).

On le prouverait en décrivant de M comme centre une sphère de rayon MM' et raisonnant comme au N° **215**.

Supposons le plan sécant parallèle à XY. L'arc MM' étant de même ordre que l'accroissement de z quand on passe du point M au point M', et la distance M' μ' étant, en général, de même ordre que ses projections sur les plans XZ, YZ, on conclut de ce qui précède que si les courbes (A) et (B) ont un contact de l'ordre n au point M, leurs projections respectives sur les plans XZ, YZ auront un contact de même ordre. Les dérivées

$$\frac{dx}{dz}, \frac{d^2x}{dz^2}, \ldots, \frac{d^nx}{dz^n}; \frac{dy}{dz}, \frac{d^2y}{dz^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dz^n}$$

auront respectivement les mêmes valeurs dans les deux courbes, au point considéré.

Si les équations de la courbe (B) renferment un certain nombre de paramètres arbitraires, on les déterminera par la condition que la courbe (B) ait avec la courbe donnée (A), au point M, un contact de l'ordre le plus élevé possible : on aura la *courbe osculatrice* de l'espèce (B).

En cherchant la *droite osculatrice* et le *cercle osculateur* en un point donné d'une courbe donnée (A), on retrouvera la tangente et le cercle de courbure.

255. *Contact des courbes et des surfaces.* — Une courbe (A) et une surface (S) qui ont un point commun M ont en ce point un *contact de l'ordre* n si, prenant sur la courbe un arc infiniment petit MM' et abaissant du point M' une normale M'M'' à la surface (S), on trouve cette distance M'M'' de l'ordre $n + 1$ par rapport à MM'. On conclut de là que la différence des ordonnées z de la courbe et de la surface, qui répondent à un même accroissement Δt de la variable indépendante à partir du point M, sera aussi de l'ordre $n + 1$ par rapport à Δt, pourvu que la direction de ces ordonnées ne soit parallèle, ni à la tangente à la courbe

(A), ni au plan tangent à la surface (S), au point M. On développera cette différence des ordonnées par la formule de Taylor suivant les puissances ascendantes de Δt, et l'on obtiendra les conditions analytiques du contact de l'ordre n. Ces conditions pourront servir à déterminer les paramètres arbitraires de l'équation d'une surface (S) de manière que celle-ci ait, avec une courbe donnée en un point donné, un contact d'ordre aussi élevé que possible.

Si la surface (S) est un plan, on retrouve le plan osculateur; si c'est une sphère, on retrouve la sphère osculatrice.

256. *Contact de deux surfaces.* — Deux surfaces (S) et (Σ) qui ont un point commun M ont, en ce point, un contact de l'ordre n, si, à une distance infiniment petite MM′ du point M sur la surface (S), la distance M′M″ des deux surfaces, mesurée normalement à l'une d'elles, est de l'ordre $n+1$ par rapport à MM′. Si l'axe des z n'est pas parallèle au plan tangent à l'une des surfaces en M, la différence des ordonnées de (S) et de (Σ) parallèles à cet axe, dans le voisinage du point M, sera aussi de l'ordre $n+1$ par rapport aux accroissements infiniment petits h et k de x et de y, considérés comme du premier ordre.

D'après cela, si l'on développe par la série de Taylor (**155**) la différence des ordonnées parallèles à l'axe des z, des surfaces (S) et (Σ), suivant les puissances de h et de k, on voit immédiatement que la condition ci-dessus revient à celle-ci : il faut et il suffit que les dérivées partielles de z par rapport à x et à y jusqu'à l'ordre n inclusivement,

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \ldots, \frac{\partial^n z}{\partial x^n}, \ldots, \frac{\partial^n z}{\partial y^n},$$

conservent la même valeur, au point M, quand on passe de la surface (S) à la surface (Σ).

Si l'équation de la surface (Σ) renferme des paramètres indéterminés, et que l'on détermine ces paramètres en assujettissant la surface (Σ) à avoir, au point M, un contact d'ordre aussi élevé que possible avec (S), on trouvera la surface (Σ) osculatrice de (S).

Ainsi, l'équation du plan renfermant trois paramètres distincts, la condition d'un contact du premier ordre avec une surface (S) suffira pour les déterminer. On retrouve le plan tangent à la surface (S).

L'équation d'une surface du second ordre renferme neuf paramètres;

on peut lui donner un contact du second ordre, et il restera trois arbitraires dont on pourra disposer de manière à satisfaire à d'autres conditions.

(Voir, pour de plus amples développements, HERMITE, *Cours d'analyse*, pp. 116 et suiv. — JORDAN, *Cours d'analyse*, t. I, pp. 216 et suiv.)

Exercices.

1. *Hélice* (Ch. XXI, ex. 1). — Les équations de la droite polaire pour le point (x, y, z) sont

$$\begin{cases} \xi y - \eta x + b(\zeta - z) = 0, \\ \xi x + \eta y + b^2 = 0. \end{cases}$$

Le point où cette droite touche l'arête de rebroussement de la surface polaire satisfait à ces équations et à

$$\xi y - \eta x = 0,$$

d'où $\zeta - z = 0$. Ce point coïncide avec le centre de courbure; l'arête de rebroussement de la surface polaire coïncide donc avec l'hélice, lieu des centres de courbure, et la surface polaire est l'hélicoïde développable, lieu des tangentes à cette hélice. Le rayon de la sphère osculatrice est égal au rayon de courbure. Pour trouver les équations d'une développée, on observe que l'on a

$$ds = dt\sqrt{a^2+b^2}, \quad T = \frac{a^2+b^2}{b}, \quad \frac{ds}{T} = \frac{b\,dt}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

d'où

$$\tau = \frac{bt}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

D'ailleurs on a

$$R = \frac{a^2+b^2}{a}, \quad \lambda = -\frac{x}{a}, \quad \mu = -\frac{y}{a}, \quad \nu = 0,$$

$$X = -\frac{by}{a\sqrt{a^2+b^2}}, \quad Y = \frac{bx}{a\sqrt{a^2+b^2}}, \quad Z = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

et en substituant ces valeurs dans les équations (14) et remplaçant x, y, z par leurs valeurs, on a pour les équations d'une développée

$$\xi = -\frac{b^2}{a}\sin t + \frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{a}\cos t \operatorname{tg}\frac{bt+C}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$\eta = -\frac{b^2}{a}\cos t - \frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{a}\sin t \operatorname{tg}\frac{bt+C}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$\zeta = bt + \sqrt{a^2+b^2}\operatorname{tg}\frac{bt+C}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

2. Sur un rayon d'une sphère comme diamètre, on décrit un cercle que l'on prend pour base d'un cylindre droit. Trouver la courbe d'intersection du cylindre et de la sphère et lui appliquer les formules générales.

R. Le rayon de la sphère étant pris pour unité et son centre pour origine, l'axe des z parallèle à la génératrice du cylindre, l'axe des x passant par le centre de sa base, soit ω l'angle du plan passant par un point (x, y, z) de la courbe et par l'axe des z avec le plan YZ. On a

$$x = \sin^2\omega, \quad y = \sin\omega\cos\omega, \quad z = \cos\omega.$$

Tangente et plan normal :

$$\frac{\xi - x}{\sin 2\omega} = \frac{\eta - y}{\cos 2\omega} = \frac{\zeta - z}{-\sin\omega}, \quad \xi\sin 2\omega + \eta\cos 2\omega = \zeta\sin\omega.$$

Différentielle de l'arc : $ds = d\omega\sqrt{1 + \sin^2\omega}.$

Plan osculateur :

$$\xi\cos\omega(1 + 2\sin^2\omega) - 2\eta\sin^3\omega + 2\zeta = \cos\omega(2 + \sin^2\omega).$$

Rayons de courbure et de torsion :

$$R = \frac{(1 + \sin^2\omega)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{5 + 3\sin^2\omega}}, \quad T = \frac{5 + 3\sin^2\omega}{6\sin\omega}.$$

Équations de la droite polaire :

$$\xi\sin 2\omega + \eta\cos 2\omega = \zeta\sin\omega, \quad \xi\cos 2\omega - \eta\sin 2\omega = \tfrac{1}{2}\zeta\cos\omega.$$

Équation de la surface polaire :

$$4(\xi^2 + \eta^2) - \zeta^2 - 3\zeta^{\frac{4}{3}}\eta^{\frac{2}{3}} = 0.$$

3. Démontrer la relation (ch. XXI, ex. 7)

$$\varphi'''^2 + \chi'''^2 + \psi'''^2 = \frac{r^2 + T^2}{R^4T^2}.$$

4. Trouver, pour une courbe quelconque, l'angle ε de deux normales principales infiniment voisines, leur plus courte distance η, l'inclinaison θ de cette plus courte distance sur la tangente, l'élément ds_1 du lieu des centres de courbure, l'angle φ sous lequel ce lieu coupe la droite polaire.

R. $$\varepsilon = ds\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{T^2}}, \quad \eta = \frac{T\,ds}{\sqrt{R^2 + T^2}}, \quad \text{tg}\,\theta = \frac{T}{R}, \quad \frac{\eta}{\varepsilon} \quad \frac{R^2T^2}{R^2 + T^2},$$

$$ds_1 = \frac{r\,ds}{T}, \quad \text{tg}\,\varphi = \frac{R}{u}.$$

5. Une courbe dont le rayon de courbure R est constant et le lieu de ses centres de courbure ont même normale principale en chaque point ; chacun d'elles est le lieu des centres de courbure et l'arête de rebroussement de la surface polaire par rapport à l'autre ; leurs rayons de courbure sont égaux ; le produit de leurs rayons de torsion est constant et égal au carré du rayon de courbure commun.

CHAPITRE XXIV.

COURBURE DES SECTIONS PLANES DANS UNE SURFACE; SECTIONS PRINCIPALES, OMBILICS, TANGENTES CONJUGUÉES.

257. L'un des moyens les plus simples d'étudier la courbure d'une surface autour d'un de ses points M consiste à couper la surface par différents plans menés par ce point M, et à déterminer la courbure des sections ainsi obtenues, surtout des ***sections normales***, dont le plan passe par la normale à la surface en M.

Fig. 41.

Supposons d'abord que l'on trace sur la surface une courbe quelconque (C) (fig. 41) passant par M, et soient α, β, γ les angles directeurs de sa tangente MT; x, y, z les coordonnées du point M;

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

les dérivées partielles de z en ce point. Nous supposons qu'elles aient des valeurs finies et déterminées. Les cosinus directeurs X, Y, Z de la normale à la surface en M sont donnés (**238**) par les formules

$$(1) \qquad \frac{X}{p} = \frac{Y}{q} = \frac{Z}{-1} = -\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = -\frac{1}{k},$$

en déterminant le signe du radical de manière que ces cosinus se rapportent à la portion MN de la normale qui fait un angle aigu avec l'axe des z positifs; k représente le radical.

La courbe (C) appartenant à la surface, les différentielles dx, dy, dz de ses coordonnées satisfont à la relation

$$(2) \qquad dz = p\,dx + q\,dy,$$

et comme dx, dy, dz sont proportionnels à $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$, on a aussi

$$(3) \qquad \cos\gamma = p\cos\alpha + q\cos\beta.$$

Substituant cette valeur de $\cos\gamma$ dans l'équation

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

on obtient celle-ci :

(4) $$(1 + p^2)\cos^2\alpha + 2pq\cos\alpha\cos\beta + (1 + q^2)\cos^2\beta = 1,$$

à laquelle satisferont les cosinus directeurs d'une tangente quelconque à la surface au point (x, y, z).

Menons la normale principale MZ de la courbe (C) au point M : elle sera dans le plan osculateur de la courbe et dans le plan normal en M à la tangente MT, et fera un angle θ avec la normale MN. Ses cosinus directeurs (λ, μ, ν), qui sont donnés par les formules (9) du N° **231**, satisfont à la relation

$$\cos\theta = X\lambda + Y\mu + Z\nu,$$

qui devient, par la substitution des valeurs de X, Y, Z, et des valeurs de λ, μ, ν,

$$\frac{\cos\theta}{R}ds = \frac{d\cos\gamma - pd\cos\alpha - qd\cos\beta}{k}.$$

L'équation (3), différentiée, donne

$$d\cos\gamma - pd\cos\alpha - qd\cos\beta = \cos\alpha\, dp + \cos\beta\, dq,$$

et comme on a d'autre part

(5) $$dp = rdx + sdy, \quad dq = sdx + tdy,$$

si l'on substitue et qu'on remplace dx et dy par $\cos\alpha\, ds$, $\cos\beta ds$, on trouvera

(α) $$\frac{\cos\theta}{R} = \frac{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta}{k}.$$

Cette formule conduit à deux conséquences importantes : 1° Le second membre ne dépend que des quantités p, q, r, s, t, qui ont des valeurs déterminées au point M, et des angles directeurs α, β de la tangente à la courbe (C); le premier membre a donc la même valeur pour deux courbes (C) qui ont le même plan osculateur en M, et comme $\cos\theta$ est évidemment le même pour ces deux courbes, R aura aussi la même valeur et le centre de courbure Z sera le même. Donc *le centre de courbure d'une courbe tracée sur la surface, en un point* M, *coïncide avec celui de la section que son plan osculateur en* M *détermine dans la surface,* théorème qui ramène la courbure des courbes quelconques tracées sur la surface à celle des sections planes.

2° Si l'on mène par la tangente MT une section normale, son rayon de courbure sera dirigé suivant la normale à la surface, on aura $\cos\theta = \pm 1$, le premier membre de l'équation (α) se reduira à $1 : R$ ou $- 1 : R$, selon que le rayon de courbure sera dirigé vers MN ou en sens contraire, ou simplement à $1 : R$, si nous convenons de regarder R comme positif dans le premier cas et comme négatif dans le second. L'équation (α) donne alors, pour l'expression du rayon de courbure d'une section normale définie par les angles (α, β),

$$(6) \qquad R = \frac{k}{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta},$$

et le signe dont R est affecté détermine la sens dans lequel la section normale tourne sa concavité par rapport à la direction MN. L'équation (α) donne alors, pour le rayon R′ d'une section oblique, dont le plan fait un un angle θ avec celui de la section normale,

$$\frac{\cos\theta}{R'} = \frac{1}{R} \quad \text{ou} \quad R' = R\cos\theta,$$

équation qui renferme le théorème de Meusnier : *Le rayon de courbure d'une section oblique, en un point* M *d'une surface, est la projection sur le plan de cette section du rayon de courbure de la section normale qui a la même tangente en* M.

Ce théorème ramenant l'étude de la courbure de toutes les sections planes à celle des sections normales, il nous reste à nous occuper de ces dernières.

258. Nous avons pris jusqu'ici des axes rectangulaires quelconques; concevons maintenant que l'on place l'origine au point M, qu'on prenne la normale MN (fig. 42) pour axe des z positifs, et le plan tangent en M pour plan XY. Il faudra évidemment faire dans les formules précédentes

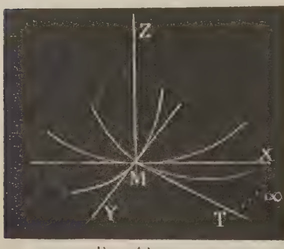


Fig. 42.

$$x = y = z = 0, \quad p = q = 0,$$
$$\cos\beta = \sin\alpha, \quad k = 1,$$

et l'expression (6) du rayon de courbure d'une section normale donnera

$$\frac{1}{R} = r\cos^2\alpha + 2s\sin\alpha\cos\alpha + t\sin^2\alpha = \frac{r+t}{2} + \frac{r-t}{2}\cos 2\alpha + s\sin 2\alpha.$$

D'après cette expression, la courbure est une fonction continue de l'angle α; nous chercherons si elle admet un maximum ou un minimum, en égalant à zéro sa dérivée par rapport à α, ce qui donnera

$$2s \cos 2\alpha - (r - t) \sin 2\alpha = 0,$$

ou

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2s}{r - t}.$$

Cette équation donne pour α deux valeurs réelles entre zéro et 180°, différant l'une de l'autre de 90°, car $\operatorname{tg} 2\alpha$ et $\operatorname{tg}(2\alpha + \pi)$ ont la même valeur. Comme la dérivée de $1 : R$ change de signe lorsque $\operatorname{tg} 2\alpha$ passe par une de ces deux valeurs, elles correspondent bien, l'une à un maximum, l'autre à un minimum, ce que le signe de la dérivée seconde établirait d'ailleurs. Les tangentes aux sections normales déterminées par ces deux valeurs de α étant perpendiculaires l'une à l'autre, on en conclut ce théorème important : *En un point d'une surface il existe en général deux positions du plan sécant normal auxquelles répondent les sections de plus grande et de plus petite courbure : leurs plans se coupent à angle droit.*

On les nomme les *sections principales* au point M. Leur existence établie, nous pouvons encore prendre pour l'axe des x, indéterminé jusqu'ici, la tangente à l'une des sections principales. L'une des valeurs de $\operatorname{tg} 2\alpha$ devant être nulle, il faudra que l'on ait $s = 0$, et l'expression générale de $1 : R$ si réduira à

$$\frac{1}{R} = r \cos^2\alpha + t \sin^2\alpha.$$

Soient R′, R″ les rayons de courbure des sections principales tangentes respectivement à MX, MY, répondant, par suite, aux valeurs $\alpha = 0$, $\alpha = 90°$; l'équation donnera

$$\frac{1}{R'} = r, \quad \frac{1}{R''} = t,$$

d'où, pour une section normale quelconque,

(7) $$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\alpha}{R'} + \frac{\sin^2\alpha}{R''},$$

équation due à Euler, et qui, ne dépendant plus en rien du choix des axes coordonnés, exprime une propriété générale. Ainsi, il suffit de

connaître les rayons de courbure des sections principales en un point d'une surface, pour obtenir celui d'une section normale quelconque en fonction de l'angle que fait le plan de cette section avec le plan d'une des sections principales.

L'équation d'Euler conduit à plusieurs conséquences — I. Si R, R_1 sont les rayons de courbure de deux sections normales rectangulaires, α et $\alpha + 90°$ leurs inclinaisons sur le plan XMZ, on a, d'après l'équation (7),

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\alpha}{R'} + \frac{\sin^2\alpha}{R''}, \quad \frac{1}{R_1} = \frac{\sin^2\alpha}{R'} + \frac{\cos^2\alpha}{R''},$$

d'où

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} = \frac{1}{R'} + \frac{1}{R''}.$$

La somme des courbures de deux sections normales rectangulaires, en un point d'une surface, est constante et égale à la somme des courbures des sections principales.

II. Si, en un point d'une surface, on a $R'' = R'$, l'équation (7) donne pour une section normale quelconque

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{R'} = \frac{1}{R'};$$

c'est-à-dire que *si les rayons de courbure principaux sont égaux en un point d'une surface, toutes les sections normales ont la même courbure.* Un tel point s'appelle un *ombilic* de la surface.

III. On doit remarquer que R, R', R'' peuvent être positifs ou négatifs, suivant que les sections correspondantes tournent leur concavité vers la portion positive de l'axe des z ou de la normale, ou en sens contraire. On peut toujours supposer R' positif, il suffit de choisir l'axe des z positifs dans le sens de ce rayon. L'équation (7) fournit alors le moyen le plus simple d'étudier le sens de la courbure autour d'un point M et conduit aux conséquences remarquables que voici :

1° Si R', R'' sont de même signe, c'est-à-dire si les sections principales tournent leur concavité dans le même sens, on a

$$R' > 0, \quad R'' > 0,$$

et par suite R est positif quelque soit α. Toutes les sections normales ont

donc leurs rayons de courbure dirigés dans le même sens (fig. 42), la surface est dite *concavo-concave* (Gauss) autour du point M. Dans le voisinage de ce point, elle est partout du même côté du plan tangent en M, comme cela a lieu en tout point de l'ellipsoïde.

2° Si $R' > 0$, $R'' < 0$, en faisant croître α à partir de zéro, dans l'équation (7), R sera d'abord positif, jusqu'à ce que l'on ait

$$\frac{1}{R'}\cos^2\alpha + \frac{1}{R''}\sin^2\alpha = 0 \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg}^2\alpha = -\frac{R''}{R'},$$

valeur de α qui donne une courbure nulle. Au delà de cette valeur de α, R devient négatif, le sens de la courbure change donc, jusqu'à ce que α continuant à croître, dépasse 90° et atteigne la valeur donnée par l'équation

$$\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{\frac{R''}{R'}},$$

qui donne de nouveau une courbure nulle.

Au delà, la courbure redevient positive jusqu'à $\alpha = 180°$. Les valeurs entre 180° et 360° ramènent évidemment les mêmes valeurs de R. Dans ce cas, les plans des sections à courbure nulle partagent donc la surface autour du point M en quatre régions, deux comprenant les sections normales qui tournent leur concavité dans un sens, deux autres où elles tournent leur concavité en sens inverse (fig. 43). La surface est *concavo-convexe* en M, comme l'hyperboloïde à une nappe. Il n'y a plus, en valeur absolue, de rayon de courbure maximum; R' est un minimum parmi les rayons positifs; R'', étant un minimum parmi les rayons négatifs, est algébriquement un maximum.

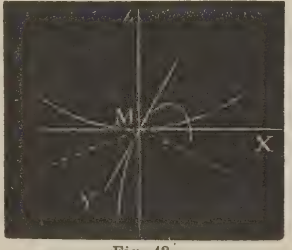


Fig. 43.

3° Enfin, il peut se faire que $R'' = 0$. Dans ce cas, l'équation (7) devenant

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\alpha}{R'}$$

montre que tous les rayons de courbure sont encore positifs; toutes les sections normales ont leur concavité du même côté. Le rayon de courbure

minimum correspond à $\alpha = 0$, le maximum à $\alpha = 90°$, d'où $R = \infty$. L'une des sections principales a donc ici une courbure nulle.

IV. On peut représenter géométriquement les résultats précédents. Construisons une section conique ayant son centre au point M ; ses demi-axes, dirigés suivant MX, MY, égaux respectivement à $\sqrt{R'}$, $\sqrt{R''}$.

Elle aura pour équation

$$\frac{x^2}{R'} + \frac{y^2}{R''} = 1.$$

Il suit évidemment de l'équation (7) que le rayon vecteur de cette courbe, suivant la tangente à une section normale quelconque, sera égal à $\sqrt{R}$, et pourra ainsi figurer géométriquement la variation du rayon de courbure. Cette courbe se nomme *l'indicatrice* de la surface ; c'est une ellipse quand la surface est concavo-concave, une hyperbole quand elle est concave-convexe, un système de deux droites parallèles quand l'une des sections principales a une courbure nulle.

259. L'existence des sections principales étant établie, revenons à leur détermination pour un système d'axes rectangulaires quelconque. En égalant à zéro la différentielle de l'expression (6) de $1 : R$, considérée comme fonction de α, β, et ayant égard à l'équation (4), on a les deux équations

$$(r \cos\alpha + s\cos\beta)\sin\alpha d\alpha + (s\cos\alpha + t\cos\beta)\sin\beta d\beta = 0,$$

$$[(1+p^2)\cos\alpha + pq\cos\beta]\sin\alpha d\alpha + [pq\cos\alpha + (1+q^2)\cos\beta]\sin\beta d\beta = 0.$$

L'élimination de $d\alpha$, $d\beta$ entre ces égalités conduit à celle-ci :

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{r\cos\alpha + s\cos\beta}{(1+p^2)\cos\alpha + pq\cos\beta} = \frac{s\cos\alpha + t\cos\beta}{pq\cos\alpha + (1+q^2)\cos\beta} \\ &= \frac{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta}{(1+p^2)\cos^2\alpha + 2pq\cos\alpha\cos\beta + (1+q^2)\cos^2\beta} = \frac{k}{R}. \end{aligned} \right.$$

Elles déterminent à la fois les valeurs de α, β qui répondent aux sections principales et les valeurs correspondantes de R, savoir, R′ et R″. Pour obtenir d'abord l'équation qui a pour racines ces rayons de courbure principaux, nous tirons des relations (8) celles-ci :

$$[Rr - k(1+p^2)]\cos\alpha = (kpq - Rs)\cos\beta,$$

$$(kpq - Rs)\cos\alpha = [Rt - k(1+q^2)]\cos\beta,$$

qui, divisées membre à membre, donnent

$$(9)\qquad [Rr - k(1+p^2)][Rt - k(1+q^2)] - (Rs - kpq)^2 = 0,$$

ou, en développant et observant que

$$k^2(1+p^2)(1+q^2) - k^2p^2q^2 = k^2(1+p^2+q^2) = (1+p^2+q^2)^2,$$

$$(10)\quad (rt-s^2)R^2 - \sqrt{1+p^2+q^2}\,[(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t]R + (1+p^2+q^2)^2 = 0.$$

Cette équation du second degré en R a deux racines réelles, R′ et R″, comme nous le savons déjà. Il est facile de s'en assurer en observant que les substitutions

$$R = 0,\ R = \frac{k(1+p^2)}{r}$$

dans le premier membre de l'équation (9), donnent des résultats de signes contraires.

On tire de l'équation (10) les valeurs

$$\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} = \frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},\quad \frac{1}{R'R''} = \frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}.$$

La première est celle de la *courbure moyenne* de la surface au point M. La seconde montre que le produit R′R″ est de même signe que le binôme $rt - s^2$. Donc, les surfaces concavo-concaves sont caractérisées par $rt - s^2 > 0$, les surfaces concavo-convexes par $rt - s^2 < 0$. Si $rt - s^2 = 0$, l'un des rayons principaux est infini. Cette condition étant vérifiée en chaque point d'une surface développable, comme il est facile de s'en assurer, il s'ensuit que, dans une telle surface, les tangentes aux sections principales se confondent avec la génératrice rectiligne et sa perpendiculaire dans le plan tangent.

260. En exprimant que l'équation (10) a ses racines égales, on obtient une équation qui se décompose en deux autres, pour déterminer les points de la surface où R′ = R″, c'est-à-dire les ombilics. Mais on arrive plus vite à ces relations en observant que, toutes les sections normales ayant même courbure, la valeur (6) de 1 : R doit être indépendante de cos α. Posant

$$\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \mu,$$

on a donc

$$(r + 2s\mu + t\mu^2)\cos^2\alpha = \text{const.} = h.$$
$$[(1 + p^2) + 2pq\mu + (1 + q^2)\mu^2]\cos^2\alpha = 1,$$

et en éliminant $\cos^2\alpha$, exprimant que l'égalité a lieu indépendamment de toute valeur de μ, on trouve les conditions

$$\text{(11)} \qquad \frac{r}{1 + p^2} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{1 + q^2}$$

pour caractériser un ombilic. Si l'on remplace $p, q, r, \ldots$ par leurs valeurs tirées de l'équation de la surface, on a, avec celle-ci, trois équations en x, y, z, ce qui montre que, en général, une surface n'admet qu'un nombre limité d'ombilics. Toutefois, il existe des surfaces sur lesquelles tous les points d'une certaine ligne sont des ombilics, et même, les équations (11) étant vérifiées identiquement en tout point d'une surface sphérique, la sphère jouit de cette propriété, que tous ses points sont des ombilics.

261. *Application des résultats précédents à l'ellipsoïde.* — Soit

$$\text{(A)} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

l'équation de cette surface; elle donne par différentiation (**166**)

$$\frac{x}{a^2}dx + \frac{y}{b^2}dy + \frac{z}{c^2}dz = 0,$$

$$\frac{dx^2}{a^2} + \frac{dy^2}{b^2} + \frac{dz^2}{c^2} + \frac{z}{c^2}d^2z = 0,$$

d'où

$$p = -\frac{x}{a^2} : \frac{z}{c^2}, \quad q = -\frac{y}{b^2} : \frac{z}{c^2}, \quad k^2 = \frac{c^4}{z^2}\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right);$$

$$d^2z = rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2 = -\frac{c^2}{z}\left(\frac{dx^2}{a^2} + \frac{dy^2}{b^2} + \frac{dz^2}{c^2}\right),$$

d'où

$$r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta = -\frac{c^2}{z}\left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\cos^2\beta}{b^2} + \frac{\cos^2\gamma}{z^2}\right),$$

à cause des relations $dx : ds = \cos\alpha$, etc... On a donc, par la formule (6), si z est positif,

$$R = -\sqrt{\frac{x^2}{-} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}} : \left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\cos^2\beta}{b^2} + \frac{\cos^2\gamma}{c^2}\right).$$

Le signe de R indique que le rayon de courbure est dirigé vers l'intérieur. De plus, si l'on désigne par P la distance du centre au plan tangent en $M(x, y, z)$, par ρ le rayon vecteur de l'ellipsoïde mené parallèlement à la tangente en M à la section normale, on aura par l'équation (A)

$$\frac{1}{P}=\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}, \quad \frac{1}{\rho^2}=\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos^2\beta}{b^2}+\frac{\cos^2\gamma}{c^2},$$

et par suite, abstraction faite du signe,

$$\text{(B)} \qquad R=\frac{\rho^2}{P},$$

c'est-à-dire que *le rayon de courbure d'une section normale en un point* M *de l'ellipsoïde, est une troisième proportionnelle à la distance du centre au plan tangent en* M *et au demi diamètre parallèle à la tangente à cette section.* On en conclut sans calculs ultérieurs 1° que pour les différentes sections autour d'un même point, P étant constant, R varie comme le carré de ρ; 2° que, par suite, le maximum et le minimum de R répondent au maximum et au minimum de ρ, en sorte que, *si l'on mène une section diamétrale de l'ellipsoïde parallèle au plan tangent en* M, *les axes* $2a'$ *et* $2b'$ *de cette section seront respectivement parallèles aux tangentes aux sections principales en* M, ce qui détermine simplement ces dernières; 3° On aura donc

$$R'=\frac{a'^2}{P}, \quad R''=\frac{b'^2}{P}, \quad R'R''=\frac{a'^2b'^2}{P^2},$$

et comme on a, par une propriété connue de l'ellipsoïde,

$$a'^2b'^2P^2=a^2b^2c^2,$$

il viendra

$$R'R''=\frac{a^2b^2c^2}{P^4}.$$

4° Enfin, l'équation (B) montre encore que le point M ne peut être un ombilic de l'éllipsoïde, à moins que l'on n'ait $\rho^2 = const.$ pour la section diamétrale indiquée ci-dessus; celle-ci sera donc une section circulaire. Donc *l'ellipsoïde* (A) *n'admet que quatre ombilics réels ; ce sont les points où la surface est coupée par les diamètres conjugués des plans des sections circulaires.* Leurs coordonnées sont donc

$$x=\pm a\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}, \quad y=0, \quad z=\pm c\frac{\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}.$$

262. Revenons au problème général de la détermination des tangentes aux sections principales en un point M d'une surface donnée. La première équation (8) nous donne, entre α et β, la relation

$$[(1+q^2)s - pqt]\cos^2\beta + [(1+q^2)r - (1+p^2)t]\cos\alpha\cos\beta + [pqr - (1+p^2)s]\cos^2\alpha = 0,$$

à laquelle il faut toujours joindre la relation (4). On peut, en observant que dx, dy sont respectivement proportionnels à $\cos\alpha$, $\cos\beta$, lui donner la forme

(12) $$[(1+q^2)s - pqt]\frac{dy^2}{dx^2} + [(1+q^2)s - (1+p^2)t]\frac{dy}{dx} + [pqr - (1+p^2)s] = 0,$$

sur laquelle nous reviendrons. On peut encore écrire les équations (8) sous d'autres formes, telles que

$$\frac{rdx + sdy}{(1+p^2)dx + pqdy} = \frac{sdx + tdy}{pqdx + (1+q^2)dy} = \frac{k}{R}$$

ou, eu égard aux équations

$$dz = pdx + qdy, \quad dp = rdx + sdy, \quad dq = sdx + tdy,$$

(13) $$\frac{dp}{dx + pdz} = \frac{dq}{dy + qdz} = \frac{k}{R}$$

les différentielles étant toujours prises suivant une des sections principales. Désignons par la caractéristique δ une différentielle prise suivant l'autre section. Nous aurons, d'après (13),

$$\frac{dp}{dx + pdz} = \frac{dq}{dy + qdz} = \frac{dp\delta x + dq\delta y}{dx\delta x + dy\delta y + dz(p\delta x + q\delta y)},$$

et comme $p\delta x + q\delta y = \delta z$, que $dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z$ est nul par la condition de perpendicularité des tangentes aux sections principales, on doit avoir la relation

(14) $$dp\delta x + dq\delta y = 0.$$

On tire aussi, des équations

$$\frac{X}{p} = \frac{Y}{q} = \frac{Z}{-1} = -\frac{1}{k}, \quad k^2 = 1 + p^2 + q^2,$$

les suivantes :

$$kdk = pdp + qdq, \quad dX = -\frac{kdp - pdk}{k^2} = -\frac{(1+q^2)dp - pqdq}{k^3}.$$

Si les différentielles se rapportent aux directions des sections principales, les équations (13) auront lieu, d'où l'on déduira

$$dX = -\frac{(1+q^2)(dx+pdz) - pq(dy+qdz)}{k^2R}$$

$$= -\frac{(1+q^2)\,dx - pqdy + p(pdx+qdy)}{k^2R} = -\frac{dx}{R}.$$

On aura évidemment de même, par raison de symétrie,

(15) $$\frac{dX}{dx} = \frac{dY}{dy} = \frac{dZ}{dz} = -\frac{1}{R},$$

relations qui caractérisent les sections principales en un point d'une surface.

263. *Tangentes conjuguées.* — Supposons que l'on mène deux plans tangents à la surface, en deux points infiniment voisins M et M' : l'intersection de ces deux plans, considérée à la limite, se nomme la *tangente conjuguée* de MT. Le plan tangent en M ayant pour équation

$$p(\xi - x) + q(\eta - y) - (\zeta - z) = 0,$$

et les coordonnées de M' étant $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$, la droite d'intersection est représentée par l'équation précédente et par celle-ci :

$$\Delta p(\xi - x) + \Delta q(\eta - y) - p\Delta x - q\Delta y + \Delta z = 0,$$

ou, puisqu'on néglige les termes du second ordre, ce qui donne $\Delta z = p\Delta x + q\Delta y$,

$$(\xi - x)\Delta p + (\eta - y)\Delta q = 0.$$

La tangente conjuguée a donc pour équations

(16) $$\left\{\begin{aligned} \zeta - z &= p(\xi - x) + q(\eta - y), \\ 0 &= dp(\xi - x) + dq(\eta - y). \end{aligned}\right.$$

C'est une droite passant par le point M, et située dans le plan tangent en M.

Remplaçons dans la seconde dp et dq par leurs valeurs (5), et revenons au système de coordonnées du N° **258** ; nous devons poser

$$x = y = z = 0, \quad s = 0, \quad r = \frac{1}{R'}, \quad t = \frac{1}{R''};$$

l'équation (16) deviendra ainsi

$$\frac{\xi dx}{R'} + \frac{\eta dy}{R''} = 0,$$

ou

$$\frac{\eta}{\xi}\frac{dy}{dx} = -\frac{R''}{R'}.$$

Si α, α' désignent les angles respectifs des droites MT, MT' avec la section principale de rayon R', cette dernière équation peut s'écrire

$$(17) \qquad \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\alpha' = -\frac{R''}{R'},$$

relation qui, rapprochée de l'équation de l'indicatrice, établit cette propriété : *En un point* M *d'une surface, les directions* MT, MT' *de deux tangentes conjuguées sont celles de deux diamètres conjugués de l'indicatrice en ce point.*

Il en résulte, vu la loi de réciprocité des diamètres conjugués d'une conique, que si le point de contact du plan tangent se déplace suivant la direction de MT', la direction de la droite d'intersection limite sera suivant MT.

On sait qu'une conique à centre n'admet qu'un seul système de diamètres conjugués rectangulaires, celui des deux axes; donc, *en un point d'une surface, il existe un seul système de tangentes conjuguées se coupant à angle droit, c'est celui des tangentes aux sections principales.*

Si l'on trace sur la surface donnée une courbe arbitraire (C), et si l'on veut déterminer la surface développable, circonscrite à la surface et admettant (C) pour courbe de contact, la génératrice de cette développable passant par le point M de la courbe (C) sera la tangente conjuguée de la tangente à (C) au point M, car cette développable n'est autre chose que l'enveloppe du plan tangent à la surface le long de la courbe (C).

264. Par le point M' (fig. 44) infiniment voisin du point M sur la courbe (C) dont MT est la tangente, menons la normale M'N' à la surface.

Soient MN_2 parallèle à M'N', MP la projection de MN_2 sur le plan de la section normale TMM; MT' perpendiculaire au plan NMN_2. MT' est, à la

limite, la tangente conjuguée de MT, car MT′ est perpendiculaire aux normales MN, M′N′. L'angle NMN_2 est l'angle des normales infiniment voisines; l'angle PMN_2 mesure l'inclinaison de la normale en M′ sur le plan de la section normale TMN. Enfin, MP est parallèle à la normale à la courbe (C) en M′, dans le plan de la section normale, donc l'angle NMP est l'angle de contingence de cette section normale. Nous poserons donc

$$NMN_2 = \frac{ds}{f}, \quad PMN_2 = \frac{ds}{\gamma}, \quad NMP = \frac{ds}{R},$$

Fig. 44.

ds étant l'élément MM′, R le rayon de courbure de la section normale, $1 : f$ ce qu'on appellera la *flexion* de la surface suivant MT, $1 : \gamma$ la *torsion géodésique* de la courbe MM′. Décrivant les arcs NN_2, PN_2, PN d'un rayon égal à l'unité, le triangle infinitésimal NPN_2 rectangle en P donnera les relations

$$NP = NN_2 \cos \overline{PNN_2}, \quad N_2P = NN_2 \sin PNN_2,$$

et comme $\overline{PNN_2}$ est le complément de l'angle φ des tangentes conjuguées MT, MT′, on a à la limite

$$\frac{1}{R} = \frac{\sin\varphi}{f}, \quad \frac{1}{\gamma} = \frac{\cos\varphi}{f},$$

d'où

$$(18) \qquad \frac{1}{f^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{\gamma^2}, \quad \frac{\gamma}{R} = \operatorname{tg}\varphi.$$

Mais, d'après la remarque du N° **263**, l'angle φ des tangentes conjuguées est l'angle que fait le rayon vecteur ρ de l'indicatrice suivant MT avec la tangente à celle-ci à l'extrémité de ce rayon ρ; il est donné (**185**) la formule

$$\operatorname{tg}\varphi = \rho\frac{d\alpha}{d\rho}, \quad \text{ou} \quad \cot\varphi = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{d\alpha} = \frac{1}{\rho^2}\frac{\rho d\rho}{d\alpha} = \frac{1}{2R}\frac{dR}{d\alpha}.$$

La seconde équation (18) donne

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{\cot\varphi}{R} = \frac{1}{2R^2}\frac{dR}{d\alpha} = -\frac{1}{2}\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{R}\right),$$

donc, d'après l'équation (7) d'Euler,

$$\text{(19)} \qquad \frac{1}{\gamma} = \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R''}\right) \sin\alpha \cos\alpha,$$

ce qui donne l'expression de la torsion géodésique en fonction de α. On a ensuite

$$\frac{1}{f^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{\gamma^2} = \left(\frac{\cos^2\alpha}{R'} + \frac{\sin^2\alpha}{R''}\right)^2 + \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R''}\right)^2 \sin^2\alpha \cos^2\alpha,$$

d'où

$$\text{(20)} \qquad \frac{1}{f^2} = \frac{\cos^2\alpha}{R'^2} + \frac{\sin^2\alpha}{R''^2},$$

ce qui fait connaître la flexion suivant MT.

Il importe, pour la généralité de la formule (19), d'observer que φ est l'angle formé avec MT par la tangente conjuguée MT′ menée du côté où la rotation de MN vers MN_2 paraît se faire de gauche à droite, et que la torsion géodésique $1 : \gamma$ est *positive* quand du point T on voit la rotation de MP vers MN_2 se faire de gauche à droite, *négative* dans le cas contraire. L'équation (19) est vraie alors dans tous les cas.

265. *Conséquences :* 1° D'après l'équation (19), la torsion géodésique ne peut s'annuler que si l'on a $\alpha = 0$ ou $\alpha = 90°$; donc, *en un point d'une surface, il n'y a que deux directions suivant lesquelles la torsion géodésique soit nulle, ce sont les tangentes aux sections principales.*

2° Si l'on remplace, dans l'équation (19), α par $\alpha + 90°$, γ ne fait que changer de signe : *Quand deux lignes se coupent à angle droit sur la surface, leurs torsions géodésiques sont égales et de signes contraires.*

3° Soit α' l'angle de MT′ avec la section principale NMX ; $1 : f'$ la flexion suivant MT′. La formule (20) donne

$$\frac{1}{f'^2} = \frac{\cos^2\alpha'}{R'^2} + \frac{\sin^2\alpha'}{R''^2}.$$

Mais, de l'équation (17) mise sous la forme

$$\frac{\sin^2\alpha \sin^2\alpha'}{\cos^2\alpha \cos^2\alpha'} = \frac{R''^2}{R'^2}$$

on tire

$$\frac{\cos^2\alpha'}{R'^2 \sin^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha'}{R''^2 \cos^2\alpha} = \frac{1}{R'^2 \sin^2\alpha + R''^2 \cos^2\alpha},$$

d'où, substituant,

$$\frac{1}{f'^2} = \frac{1}{R'^2 \sin^2\alpha + R''^2 \cos^2\alpha} = \frac{1}{R'^2 R''^2} : \left(\frac{\cos^2\alpha}{R'^2} + \frac{\sin^2\alpha}{R''^2} \right),$$

et au moyen de l'équation (20),

$$\frac{1}{f^2 f'^2} = \frac{1}{R'^2 R''^2}.$$

On a donc ce théorème remarquable : *Le produit des flexions de la surface suivant deux directions conjuguées, en un même point, est constant et égal au produit des courbures principales.*

Exercices.

1. L'équation de la surface étant mise sous la forme

$$F(x, y, z) = 0,$$

trouver l'expression du rayon de courbure d'une section normale dont la tangente a pour angles directeurs α, β, γ.

R. On trouve, soit par le calcul des dérivées p, q, r, .., soit directement, et en posant

$$F_1 = \frac{\partial F}{\partial x}, \ldots \quad F_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad F_{12} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \ldots$$

$$R = \pm \frac{\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2}}{F_{11} \cos^2\alpha + F_{22} \cos^2\beta + F_{33} \cos^2\gamma + 2F_{23} \cos\beta \cos\gamma + 2F_{31} \cos\alpha \cos\gamma + 2F_{12} \cos\alpha \cos\beta}.$$

2. Soient, autour d'un point, n sections normales équidistantes, dont les extrêmes sont également inclinées en sens contraire sur les plans des sections principales; la moyenne des courbures de ces n sections aura pour valeur

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''}\right).$$

3. Dans une surface développable, l'une des sections principales en un point M est tangente à la génératrice rectiligne, l'autre lui est normale. Le rayon de courbure de celle-ci a pour expression

$$R' = \frac{uT}{\rho},$$

ρ et T étant les rayons de courbure et de torsion de l'arète de rebroussement au point μ où la génératrice touche l'arète, u la distance μM.

4. Soient X, Y, Z les cosinus directeurs de la normale à une surface. Exprimer en fonction de X, Y, Z et de leurs dérivées partielles 1° la somme et le produit des courbures principales; 2° l'équation qui détermine les sections principales; 3° les conditions qui caractérisent un ombilic.

R. Exprimant p, q en fonction de X, Y, Z et ayant égard à la relation $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$, on en déduira les valeurs de r, s, t, et de simples substitutions donneront

1°
$$\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} = -\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right), \quad \frac{1}{R'R''} = \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x}.$$

2°
$$\frac{\partial X}{\partial y}\cos^2\beta + \left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}\right)\cos\alpha\cos\beta - \frac{\partial Y}{\partial x}\cos^2\alpha = 0.$$

3°
$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y}, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial y} = 0.$$

5. Démontrer que la somme des rayons de courbure suivant deux directions conjuguées est constante autour d'un même point, et égale à la somme des rayons de courbure principaux.

CHAPITRE XXV.

LIGNES DE COURBURE; SURFACE DES CENTRES; THÉORÈME DE CH. DUPIN.

266. Si l'on trace sur une surface une courbe quelconque (C) et que par les points de cette courbe on élève des normales à la surface, le lieu de ces normales sera une surface réglée, une ***normalie***, qui, généralement, sera une surface gauche comme le calcul va le prouver. Mais si l'on se propose de déterminer la courbe (C) de manière que la normalie soit une surface développable, on obtient un double système de lignes remarquables qu'on appelle les *lignes de courbure* de la surface proposée.

Soient M (x, y, z), M' $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ deux points infiniment voisins sur la courbe (C); les équations des normales correspondantes seront

(1)
$$\xi - x = -p(\zeta - z), \quad \eta - y = -q(\zeta - z),$$

(2)
$$\xi - x - \Delta x = -(p + \Delta p)(\zeta - z - \Delta z),$$
$$\eta - y - \Delta y = -(q + \Delta q)(\zeta - z - \Delta z).$$

La plus courte distance de ces deux droites sera, en général, un infiniment petit de même ordre que $\Delta x, \ldots$; pour qu'elle soit d'un ordre supérieur, il faut et il suffit qu'en ne conservant que les termes du premier ordre, les quatre équations soient vérifiées par un même système

de valeurs de ξ, η, ζ, comme si les droites se rencontraient rigoureusement. Or, les équations (2) se réduisent, par les équations (1), à

$$\Delta x + p\Delta z = \Delta p\,(\zeta - z), \quad \Delta y + q\Delta z = \Delta q\,(\zeta - z),$$

et en égalant les valeurs de $\zeta - z$ fournies par ces deux équations, on trouve la condition

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{\Delta p}{\Delta x + p\Delta z} = \frac{\Delta q}{\Delta y + q\Delta z},$$

qui devient, à la limite,

$$(3) \qquad \frac{dp}{dx + pdz} = \frac{dq}{dy + qdz} = \frac{1}{\zeta - z}.$$

Cette équation comparée à l'équation (13) du chapitre précédent, suffit pour montrer que la courbe cherchée (C) doit être tangente en M à l'une des sections principales qui passent par ce point. En remplaçant dans cette équation dz, dp, dq par leurs valeurs respectives

$$pdx + qdy, \quad rdx + sdy, \quad sdx + tdy,$$

chassant les dénominateurs et divisant par dx^2, on trouvera, comme au N° **202**, l'équation

$$(4) \qquad [(1 + q^2)s - pqt]\frac{dy^2}{dx^2} - [(1 + p^2)t - (1 + q^2)r]\frac{dy}{dx}$$
$$+ [pqr - (1 + p^2)s] = 0,$$

qui est ce qu'on appelle l'*équation différentielle des lignes de courbure*. Elle détermine, en un point quelconque de la surface les deux valeurs de $dy : dx$ appartenant aux deux lignes de courbure passant par ce point. On y substituera les valeurs de p, q, r, s, t en fonction de x, y, tirées de l'équation de la surface, on aura une *équation différentielle* entre y et x. Le calcul intégral, comme on le verra plus loin, permettra de remonter de cette équation à l'équation entre x, y de la projection de la courbe cherchée sur le plan XY, et fournira deux équations

$$f(x, y, C) = 0, \quad f_1(x, y, C) = 0,$$

dans lesquelles C sera une constante arbitraire. Chacune représentera un système de lignes de courbure projetées sur le plan XY, et comme on peut généralement déterminer C de manière à faire passer une courbe de chaque système par un point donné de la surface, il passera par chaque

point deux lignes de courbure qui, étant tangentes aux sections principales, se couperont à angle droit. On conclut donc de là que

Une surface admet généralement deux systèmes de lignes de courbure qui se coupent partout sous un angle droit. En chacun de ses points, une ligne de courbure est tangente à l'une des sections principales de la surface en ce point.

Par exemple, dans une surface de révolution, les normales à la surface aux différents points d'un même méridien sont dans le plan de ce méridien, qui est donc une ligne de courbure; les normales menées aux différents points d'un même parallèle vont se couper sur l'axe de révolution, le parallèle est aussi une ligne de courbure. *Les deux systèmes de lignes de courbure sont ici les méridiens et les parallèles*, et l'on sait qu'ils se coupent rectangulairement. On remarquera que, dans ce cas très simple les lignes de courbure des deux systèmes sont planes.

267. L'équation (4) est vérifiée indentiquement quel que soit $dy : dx$, lorsque le point M est un ombilic; car les équations (11) du N° **260** rendent nuls les coefficients de l'équation. On pourrait donc croire que, par un ombilic, passent une infinité de lignes de courbure.

Pour éclaircir cette difficulté, observons d'abord que, d'après l'équation (19) du chapitre précédent, la torsion géodésique est nulle, en un tel point, quelle que soit la direction suivant laquelle on se déplace sur la surface, puisque l'on a $R' = R''$. Toutes les normales infiniment voisines de la normale en M tombent dans le plan de la section normale et coupent la normale en M; la condition qui caractérise les lignes de courbure doit donc être vérifiée, au point M, quelle que soit la courbe (C). Mais ce n'est là, en quelque sorte, qu'un *élément* de ligne de courbure; pour reconnaître véritablement les lignes de courbure de longueur finie qui viennent passer par l'ombilic, concevons que l'on parcoure une telle ligne en se rapprochant indéfiniment du point M, et qu'on détermine l'équation que vérifient les valeurs limites de $dy : dx$. Nous aurons ainsi le nombre et la direction des lignes de courbure passant en M.

Or, l'équation (4), mise sous la forme

$$(5) \qquad P\frac{dy^2}{dx^2} + Q\frac{dy}{dx} + R = 0,$$

est vérifiée en chaque point d'une ligne de courbure; il en est donc de

même de celle qu'on obtiendra en la différentiant totalement par rapport à x; et comme on a

$$\frac{dp}{dx}=r+s\frac{dy}{dx},\quad \frac{dq}{dx}=s+t\frac{dy}{dx},\quad \text{etc...}$$

le résultat sera évidemment de la forme

$$\left(2P\frac{dy}{dx}+Q\right)\frac{d^2y}{dx^2}+P_1\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+Q_1\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+R_1\frac{dy}{dx}+S_1=0,$$

$P_1, Q_1, \ldots$ étant des fonctions de x, y. Mais puisque P, Q tendent vers zéro lorsque le point (x, y, z) s'approche indéfiniment de M, on a, à la limite, la relation

$$(6)\qquad P_1\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+Q_1\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+R_1\frac{dy}{dx}+S_1=0$$

à laquelle doit satisfaire la direction des lignes de courbure en M. Comme cette équation est du 3me degré en $dy:dx$, elle admettra trois racines pour cette dérivée; toutes trois seront réelles, ou il y en aura une réelle et deux imaginaires. On en conclut donc que *généralement il passe par un ombilic trois lignes de courbure ou une seule.*

Il se pourrait cependant que l'équation (6) elle-même, à l'ombilic, devint indentique, $P_1, Q_1, \ldots$ se réduisant à zéro; on continuerait à procéder de même, et l'on aurait quatre, ou deux lignes de courbure passant par l'ombilic. Il peut même se faire qu'il passe une infinité de lignes de courbure par l'ombilic, comme cela a lieu, par exemple, au sommet d'une surface de révolution.

Appliquons ce qui précède à l'ellipsoïde,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad a>b>c.$$

On a, par différentiation (**186**),

$$p=-\frac{x}{a^2}:\frac{z}{c^2},\quad q=-\frac{y}{b^2}:\frac{z}{c^2},\quad r=-\frac{c^4}{a^2z^3}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)$$

$$s=-\frac{c^4xy}{a^2b^2z^3},\quad t=-\frac{c^4}{b^2z^3}\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right).$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (4), supprimant le facteur

— $c^4 : z^3$, multipliant toute l'équation par $z^2 : c^4$ et faisant les réductions, on obtient d'abord l'équation des lignes de courbure sous la forme

$$\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)\frac{xy}{a^2b^2}\frac{dy^2}{dx^2}-\left[\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\frac{x^2}{a^4}+\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\frac{y^2}{b^4}+\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)\frac{z^2}{c^4}\right]\frac{dy}{dx}$$
$$+\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)\frac{xy}{a^2b^2}=0.$$

Au moyen de l'équation de l'ellipsoïde, on élimine z^2 dans le coefficient de $dy : dx$, et l'on a enfin, pour les lignes de courbure de l'ellipsoïde, l'équation

$$\frac{b^2-c^2}{b^2}xy\frac{dy^2}{dx^2}-\left[(a^2-b^2)+(c^2-a^2)\frac{x^2}{a^2}+(b^2-c^2)\frac{y^2}{b^2}\right]\frac{dy}{dx}$$
$$+\frac{c^2-a^2}{a^2}xy=0.$$

Nous verrons plus tard comment on intègre cette équation. Actuellement, observons qu'elle devient identique pour

$$y=0, \quad x=\pm a\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}, \quad z=\pm c\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}},$$

valeurs qui appartiennent à l'un des quatre ombilics de l'ellipsoïde : mais si l'on applique la méthode ci-dessus, on trouve d'abord pour l'équation (6)

$$\frac{b^2-c^2}{b^2}x\frac{dy^3}{dx^3}-\frac{b^2-c^2}{b^2}y\frac{dy^2}{dx^2}-\frac{c^2-a^2}{a^2}x\frac{dy}{dx}+\frac{c^2-a^2}{a^2}y=0.$$

Elle se réduit, pour l'un quelconque des ombilics, à

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{b^2-c^2}{b^2}\frac{dy^2}{dx^2}-\frac{c^2-a^2}{a^2}\right)=0,$$

équation qui admet une seule racine réelle

$$\frac{dy}{dx}=0.$$

Par les ombilics de l'ellipsoïde il ne passe donc qu'une seule ligne de courbure, qui est la section principale comprenant ces quatre points.

268. Reprenons l'étude générale des lignes de courbure. Par une normale quelconque MN (fig. 45) passent deux normalies développables

correspondant aux deux lignes de courbure se croissant en M. La normale MN touche donc les arètes de rebroussement de ces deux normalies en deux points C′ et C″, qui sont les points centraux de la normale MN, considérée successivement comme génératrice des deux normalies. Ces points sont donnés, pour chacune des normalies, par les équations (1) et (3), en sorte que l'on a

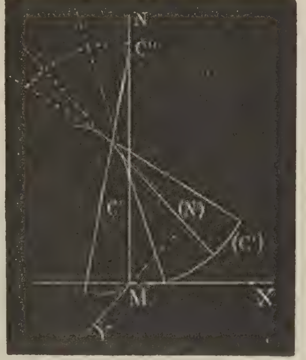


Fig. 45.

$$\frac{\xi - x}{p} = \frac{\eta - y}{q} = \frac{\zeta - z}{-1} = -\frac{dx + pdz}{dp}$$
$$= -\frac{dy + qdz}{dq}.$$

On voit immédiatement que les coordonnées ξ, η, ζ sont celles du centre de courbure de la section principale à laquelle est tangente la ligne de courbure que l'on considère. On a donc ce théorème : *Le point où une normale à la surface touche l'arête de rebroussement de la normalie développable dont cette normale est une des génératrices, coïncide avec le centre de courbure de la section principale à laquelle cette normalie est tangente.*

Les arêtes de rebroussement des normalies correspondant à un premier système de lignes de courbure sont sur une même surface, tangente à toutes les normales à la surface donnée. Il en est de même des arêtes des normalies qui répondent au deuxième système Ces deux surfaces sont deux nappes d'une même surface Σ, *qui est le lieu des centres de courbure principaux de la surface donnée* S, *et qu'on appelle, pour cette raison, la surface des centres de celle-ci.*

Soit (N′) la normalie correspondant à la ligne de courbure (C′) qui passe par un point M; chacune de ses génératrices étant tangente à la surface Σ en deux points, le lieu de ces points de contact se compose de deux courbes, dont l'une est l'arête de rebroussement de (N′). Il ne s'ensuit pas que la normalie touche la surface Σ le long de cette arête, car la ligne qui joint deux points de contact infiniment voisins a pour limite la génératrice même ; mais la seconde courbe est une courbe de contact, parce que la ligne qui joint les points de contact de deux génératrices voisines étant distincte de la génératrice, les plans tangents à la surface Σ et à la surface (N′) sont nécessairement identiques. Chacune

des normalies développables a donc son arête sur une nappe de la surface Σ et est circonscrite à l'autre nappe. Il suit de là que, les plans tangents aux deux normalies qui se coupent suivant une normale MN étant évidemment rectangulaires, *il en est de même des plans tangents à la surface Σ aux deux points* C' *et* C'' *où elle est touchée par la normale* MN.

Et l'on voit par là que toute normalie a le plan osculateur de son arête de rebroussement normal à la surface Σ sur laquelle elle se trouve.

269. Concevons deux surfaces S et S_1 se coupant suivant une courbe (C), dont MT est la tangente en M (fig. 46), et soient MN, MN_1 les normales respectives à S et S_1 au point M, en sorte que NMN_1 est le plan normal à (C). Si par le point M on mène des parallèles aux normales M'N', $M'N'_1$ aux surfaces S et S_1 en un point infiniment voisin M'; que l'on projette ces parallèles sur le plan MNN_1 suivant Mn, Mn_1 respectivement, on voit immédiatement 1° que l'angle NMn peut être considéré comme celui dont la normale à la surface s'écarte du plan de la section normale NMT quand on passe du point M au point M'; son rapport à MM' est donc égal à la torsion géodésique (**264**) de la courbe (C), mesurée sur la surface S; de même N_1Mn_1 : MM' sera égal à la torsion géodésique de la courbe (C), par rapport à la surface S_1 ; 2° que les plans normaux infiniment voisins NMN_1, $N'M'N'_1$, comprenant entr'eux un angle infiniment petit, l'angle $N'M'N'_1$ et sa projection nMn_1 sur le plan NMN_1 peuvent être regardés comme égaux aux infiniment petits près d'ordre supérieur, d'après un lemme connu (**60**).

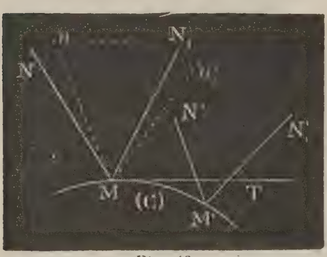


Fig. 46.

Il suit de là que, si les surfaces S et S_1 se coupent sous un angle constant, les angles NMN_1 et $N'M'N'_1$ étant égaux, il en sera de même des angles NMN_1 et nMn_1 et par suite aussi, des angles NMn, N_1Mn_1, en négligeant des quantités d'ordre supérieur au premier ; d'où ce théorème : *Si deux surfaces* S *et* S_1 *se coupent sous un angle constant, la torsion géodésique de leur courbe d'intersection a la même valeur et le même signe, quelle que soit celle des deux surfaces sur laquelle on la mesure.*

D'où résulte cette autre propriété : *si la courbe d'intersection est une ligne de courbure de l'une des surfaces, elle est aussi une ligne de cour-*

bure de l'autre, car sa torsion géodésique est nulle par rapport à la première (**265**).

Ainsi, toute courbe plane pouvant être regardée comme une ligne de courbure du plan sur lequel elle est tracée, lorsqu'un plan coupe une surface sous un angle constant, la section est une ligne de courbure de la surface, ce qui se vérifie sur les méridiens et les parallèles d'une surface de révolution.

270. *Théorème de Charles Dupin.* — Supposons que trois surfaces S, S_1, S_2 se coupent deux-à-deux orthogonalement, suivant les courbes MA, MB, MC (fig. 47), en sorte qu'au point M la tangente à l'intersection de deux surfaces coïncide avec la normale à la troisième. La torsion géodésique de chacune des courbes MA, MB, MC ayant même valeur et même signe sur les deux surfaces auxquelles elle appartient (**269**), nous pouvons désigner simplement ces torsions par



Fig. 47.

$$\frac{1}{\gamma}, \quad \frac{1}{\gamma_1}, \quad \frac{1}{\gamma_2}.$$

Mais, d'après le théorème du n° **265**, 2°, les lignes orthogonales MA, MB, situées sur une même surface S_2, ont au point M des torsions géodésiques égales et de signes contraires, on a donc la relation

$$\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma_1}=0,$$

et par un raisonnement semblable sur les deux surfaces S et S_1,

$$\frac{1}{\gamma_1}+\frac{1}{\gamma_2}=0, \quad \frac{1}{\gamma_2}+\frac{1}{\gamma}=0,$$

équations qui ne peuvent coexister, évidemment, que si l'on a

$$\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\gamma_1}=\frac{1}{\gamma_2}=0.$$

Donc *les courbes d'intersection* MA, MB, MC, *des surfaces* S, S_1, S_2 *deux à deux sont tangentes, au point* M, *aux sections principales de chacune des surfaces auxquelles elles appartiennent.*

Concevons donc trois systèmes de surfaces (I), (II), (III) se succédant

dans l'espace d'une manière continue, et telles que toutes les surfaces d'un même système soient coupées partout à angle droit par les surfaces appartenant aux deux autres. [Ex. : sphères concentriques, cônes de révolution autour d'un diamètre, plans passant par ce diamètre]. La courbe d'intersection d'une surface S du système (I) par une surface du système (II) jouira, en chacun de ses points, de la propriété ci-dessus, puisque en ce point les tangentes aux trois courbes d'intersection des surfaces (I), (II) et (III) forment un trièdre rectangulaire. Elle sera donc constamment tangente aux sections principales de la surface S, et sera une de ses lignes de courbure. Le même raisonnement s'applique à toutes les courbes d'intersection, d'où le théorème de Ch. Dupin:

Lorsque trois familles de surfaces se coupent partout orthogonalement, elles se coupent suivant leurs lignes de courbure.

En sorte que les lignes de courbure d'une surface S du système (I) ne sont autre chose que ses intersections par toutes les surfaces des systèmes (II) et (III).

Exercices.

1. Trouver les rayons de courbure principaux et les lignes de courbure de l'héli-coïde gauche qui a pour équation

$$z = a \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}.$$

R. Introduisons deux variables auxiliaires u et θ, et mettons l'équation de la surface sous la forme

$$(\alpha) \qquad x = u \cos\theta, \quad y = u \sin\theta, \quad z = a\theta.$$

Différentiant et appliquant la méthode du changement de variables, on trouve facilement

$$p = -\frac{a \sin\theta}{u}, \quad q = \frac{a\cos\theta}{u}, \quad r = \frac{2a \sin\theta\cos\theta}{u^2} = -t, \quad s = \frac{a(\sin^2\theta - \cos^2\theta)}{u^2}.$$

Il en résulte

$$1 + p^2 + q^2 = \frac{a^2 + u^2}{u^2}, \quad rt - s^2 = -\frac{a^2}{u^4}, \quad (1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 0,$$

et l'équation des rayons principaux donne

$$R' = -R'' = \frac{a^2 + u^2}{a}.$$

C'est le rayon de torsion de l'helice représentée par les équations (α) où u est supposé constant.

Pour trouver l'équation différentielle des lignes de courbure, on part de la formule (3)

$$\frac{dp}{dx + p\,dz} = \frac{dq}{dy + q\,dz},$$

et en substituant à dp, dq, ... leurs valeurs, on trouvera l'équation

$$\frac{\sin\theta du - u\cos\theta d\theta}{u\cos\theta du - (a^2+u^2)\sin\theta d\theta} = -\frac{\cos\theta du + u\sin\theta d\theta}{u\sin\theta du + (a^2+u^2)\cos\theta d\theta},$$

ou réductions faites

$$\frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \pm d\theta.$$

Le premier membre est (**86**) la dérivée de

$$\mathrm{l}.\,(u+\sqrt{a^2+u^2}),$$

en sorte que l'équation des lignes de courbure, C désignant une constante arbitraire, peut s'écrire

$$\mathrm{l}.\,(u+\sqrt{a^2+u^2}) = \mathrm{C} \pm \theta,$$

ou, résolue par rapport à u,

$$u = \frac{a}{2}\left(\mathrm{A}e^{\theta} - \frac{1}{\mathrm{A}}e^{-\theta}\right),$$

A désignant une constante arbitraire. Discuter.

2. Lignes de courbure de l'ellipsoïde.

R. On appliquera le théorème de Dupin. L'équation

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1, \quad a > b > c,$$

λ étant un paramètre variable, représente une ellipsoïde si $\lambda \geqslant 0$; un hyperboloïde à une nappe, si $-c^2 > \lambda > -b^2$; à deux nappes si $-b^2 > \lambda > -a^2$. Ces trois systèmes de surfaces se coupent à angle droit. Les systèmes des hyperboloïdes à une et à deux nappes tracent sur un ellipsoïde λ toutes ses lignes de courbure.

APPENDICE AU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

FONCTIONS D'UNE VARIABLE IMAGINAIRE.

CHAPITRE XXVI.

FONCTIONS ÉLÉMENTAIRES D'UNE VARIABLE IMAGINAIRE; LEURS DÉRIVÉES.

271. Soient x, y deux variables réelles quelconques; l'expression

$$z = x + yi$$

est ce qu'on appelle une *variable imaginaire*. On la représente aussi par

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

r étant le module, φ l'argument de z; la variable z est figurée géométriquement par un point M du plan, l'*affixe* de z, qui a pour coordonnées rectangulaires x et y, pour coordonnées polaires r et φ (**4**).

Lorsque les variables x et y tendent respectivement vers des limites fixes a et b, on dit que la variable z a pour limite $a + bi$; si $a = 0$, $b = 0$, z a pour limite zéro et s'appelle une quantité imaginaire *infiniment petite*. Pour que z soit infiniment petit, il faut et il suffit que son module r soit infiniment petit (**4**).

Les théorèmes établis au N° **21** subsistent, comme il est facile de le démontrer, pour la limite d'une somme, d'un produit, etc., de quantités imaginaires.

Soient $\varphi(x, y)$, $\chi(x, y)$ deux fonctions réelles des variables réelles x, y. L'expresion

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\chi(x, y)$$

est ce qu'on nomme une *fonction* de la variable imaginaire z, dans le sens le plus étendu. Si les fonctions $\varphi(x, y)$, $\chi(x, y)$ sont simples et continues dans une région T (**134**) du plan XY, on dit que $f(z)$ est une *fonction simple et continue de* z dans cette région. Le point variable z allant d'un point z_0 à un point z_1, par un chemin quelconque dans cette région, à un accroissement infiniment petit

$$\Delta z = \Delta x + i\Delta y$$

de la variable correspond un accroissement infiniment petit $\Delta f(z)$ de la fonction. Le point Z, qui représente la fonction $f(z)$, décrira un chemin continu dans une région déterminée T′ du plan.

Les développements donnés aux Nos **6** et **7** suffisent pour définir la fonction z^m, m étant un nombre entier, positif ou négatif. On a, dans les deux cas

$$z^m = r^m (\cos m\varphi + i \sin m\varphi).$$

Toute fonction rationnelle, entière ou fractionnaire, de z, est définie par là même. Ainsi

$$f(z) = a + bz + cz^2 + \cdots + lz^m,$$

$a, b, \ldots l$ étant des constantes réelles ou imaginaires, est une fonction rationnelle entière de z.

272. Pour définir la fonction e^z, nous poserons, x et y étant réels,

$$e^{yi} = \cos y + i \sin y$$

et

$$e^{x+yi} = e^x e^{yi}.$$

Ces conventions donnent

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y). \tag{1}$$

Il en résulte que si l'on pose $z' = x' + y'i$, on aura, par des propriétés connues (**6**),

$$\begin{aligned} e^z e^{z'} &= e^x (\cos y + i \sin y) \times e^{x'} (\cos y' + i \sin y') \\ &= e^{x+x'} [\cos (y + y') + i \sin (y + y')] = e^{z+z'}, \end{aligned}$$

donc la propriété fondamentale de la fonction exponentielle,

$$e^z e^{z'} = e^{z+z'},$$

subsiste lorsque les variables z et z' sont imaginaires.

On remarquera encore les équations

$$e^{2\pi i} = 1, \quad e^{\pi i} = -1, \quad e^{\frac{\pi i}{2}} = i.$$

La fonction $\mathrm{l}.z$ est la variable $u + vi$ définie par l'équation

$$e^{u+vi} = z.$$

On a donc

$$e^{u}(\cos v + i \sin v) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

et d'après ce qu'on a vu (**4**),

$$e^{u} = r, \quad v = \varphi + 2k\pi,$$

k étant un nombre entier quelconque, positif ou négatif. Donc

$$\mathrm{l}.\, z = \mathrm{l}.\, r + \varphi i + 2k\pi i. \tag{2}$$

La fonction $\mathrm{l}.\, z$ est donc une fonction à détermination multiple, qui admet, en un même point z du plan, une infinité de valeurs imaginaires différant l'une de l'autre d'un multiple de $2\pi i$. Parmi ces valeurs, il convient de distinguer celle qui correspond à $k = 0$,

$$\mathrm{l}.\, z = \mathrm{l}.\, r + \varphi i,$$

l'angle φ étant compris entre 0 et 2π.

273. Nous définirons les fonctions $\cos z$, $\sin z$, z étant imaginaire, par les égalités

$$\cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}, \tag{3}$$

en vertu desquelles l'égalité

$$e^{zi} = \cos z + i \sin z$$

subsistera pour z imaginaire. On déduit des relations (3)

$$\cos z = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2} \cos x - i \frac{e^{y} - e^{-y}}{2} \sin x,$$

$$\sin z = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2} \sin x + i \frac{e^{y} - e^{-y}}{2} \cos x.$$

On déduit aussi des formules (3) que les relations trigonométriques

$$\cos(z + z') = \cos z \cos z' - \sin z \sin z',$$
$$\sin(z + z') = \sin z \cos z' + \cos z \sin z',$$
$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1,$$

etc..., subsistent pour des valeurs imaginaires de z et de z'.

Les autres fonctions trigonométriques sont définies par les relations

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad \text{etc...}$$

Ainsi l'on a

$$(4) \qquad \operatorname{tg} z = \frac{1}{i}\frac{e^{zi} - e^{-zi}}{e^{zi} + e^{-zi}} = i\frac{1 - e^{2zi}}{1 + e^{2zi}}.$$

On considère aussi les fonctions dites *hyperboliques*, définies par les relations

$$(5) \qquad \operatorname{Ch} x = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{Sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2},$$

par lesquelles on établira facilement les propriétés

$$\operatorname{Ch}(-z) = \operatorname{Ch} z, \qquad \operatorname{Sh}(-z) = -\operatorname{Sh} z,$$
$$\operatorname{Ch} z + \operatorname{Sh} z = e^z, \qquad \operatorname{Ch} z - \operatorname{Sh} z = e^{-z},$$
$$\operatorname{Ch}^2 z - \operatorname{Sh}^2 z = 1,$$
$$\operatorname{Ch} zi = \cos z, \qquad \operatorname{Sh} zi = i \sin z.$$

etc... etc...

Les fonctions inverses $u = \operatorname{arc} \sin z$, $u = \operatorname{arc} \cos z$, etc... seraient définies par les équations respectives

$$\frac{e^{ui} - e^{-ui}}{2i} = z, \quad \frac{e^{ui} + e^{-ui}}{2} = z, \ldots$$

Nous ne les étudierons pas ici, mais nous ferons observer que, de l'équation (4), on tire

$$z = \frac{1}{2i} \operatorname{l.} \frac{1 + i \operatorname{tg} z}{1 - i \operatorname{tg} z},$$

et en posant $\operatorname{tg} z = \zeta$,

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \zeta = \frac{1}{2i} \operatorname{l.} \frac{1 + i\zeta}{1 - i\zeta}.$$

Enfin, la fonction z^m est définie, pour des valeurs quelconques, réelles ou imaginaires, de m et de z, par la formule

$$(6) \qquad z^m = e^{m \operatorname{l.} z},$$

qui montre 1° que si m est réel et fractionnaire, en vertu de la formule

(2), z^m admet un nombre fini de valeurs distinctes qui s'accordent avec celles qu'on a trouvées au n° **7**; 2° si m est irrationnel ou imaginaire, z^m admet une infinité de valeurs; 3° que l'on a encore, pour m réel,

$$\text{mod } z^m = \text{mod } e^{m(\text{l}.\rho + \varphi i + 2k\pi i)} = e^{m\text{l}.\rho} = \rho^m$$

comme lorsque m est entier et positif (**6**).

274. Les formules qui précèdent donnent lieu à de nombreuses applications. 1° Prenons l'égalité

$$1 + z^2 + z^4 + \cdots + z^{2n-2} = \frac{z^{2n} - 1}{z^2 - 1},$$

qui subsiste évidemment pour toute valeur réelle ou imaginaire de z. Si nous y faisons $z = e^{\theta i}$, nous aurons

$$1 + e^{2\theta i} + e^{4\theta i} + \cdot\cdot + e^{(2n-2)\theta i} = \frac{e^{2n\theta i} - 1}{e^{2\theta i} - 1} = \frac{e^{n\theta i} - e^{-n\theta i}}{e^{\theta i} - e^{-\theta i}} e^{(n-1)\theta i}$$

$$= \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} [\cos (n - 1) \theta + i \sin (n - 1) \theta].$$

Egalant séparément les parties réelles et les coefficients de i dans les deux membres, on a

$$(7) \left\{ \begin{aligned} 1 + \cos 2\theta + \cos 4\theta + \cdots + \cos (2n - 2) \theta &= \frac{\sin n\theta \cos (n - 1) \theta}{\sin \theta}, \\ \sin 2\theta + \sin 4\theta + \cdots + \sin (2n - 2) \theta &= \frac{\sin n\theta \sin (n - 1) \theta}{\sin \theta}. \end{aligned} \right.$$

Si l'on multiplie les deux membres de l'égalité ci-dessus par $e^{\theta i}$ on a aussi

$$e^{\theta i} + e^{3\theta i} + \cdots + e^{(2n-1)\theta i} = \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} e^{n\theta i},$$

et en séparant les parties réelles,

$$(8) \left\{ \begin{aligned} \cos \theta + \cos 3\theta + \cdots + \cos (2n - 1) \theta &= \frac{\sin n\theta \cos n\theta}{\sin \theta}, \\ \sin \theta + \sin 3\theta + \cdots + \sin (2n - 1) \theta &= \frac{\sin^2 n\theta}{\sin \theta}. \end{aligned} \right.$$

2° Soit encore à trouver la valeur du produit

$$\sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} \cdots \sin \frac{n - 1}{n} \pi = \prod_{k=1}^{k=n-1} \sin \frac{k\pi}{n}.$$

D'après l'expression des sinus en exponentielles imaginaires, on a

$$\Pi_1^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{1}{(2i)^{n-1}} \Pi_1^{n-1} \left(e^{\frac{k\pi i}{n}} - e^{-\frac{k\pi i}{n}}\right) = \frac{1}{(2i)^{n-1}} \Pi e^{-\frac{k\pi i}{n}} \left(e^{\frac{2k\pi i}{n}} - 1\right).$$

Or

$$\Pi_1^{n-1} e^{-\frac{k\pi i}{n}} = e^{-\frac{\pi i}{n}(1+2+\dots+n-1)} = e^{-\frac{\pi i}{2}(n-1)} = (-i)^{n-1}.$$

D'autre part, on sait (**8**) que les racines de l'équation $x^n - 1 = 0$ s'obtiennent en faisant $k = 0, \ 1, 2, \dots, \ n-1$, dans l'expression

$$\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} = e^{\frac{2k\pi i}{n}},$$

en sorte que l'on a identiquement

$$x^n - 1 = (x-1) \Pi_1^{n-1} \left(x - e^{\frac{2k\pi i}{n}}\right),$$

d'où

$$\Pi_1^{n-1} \left(x - e^{\frac{2k\pi i}{n}}\right) = 1 + x + x^2 + \cdot \cdot + x^{n-1},$$

et en faisant $x = 1$ et changeant les signes,

$$\Pi_1^{n-1} \left(e^{\frac{2k\pi i}{n}} - 1\right) = (-1)^{n-1} n.$$

Substituant et réduisant, on a la formule remarquable

$$\sin \frac{\pi}{n} \cdot \sin \frac{2\pi}{n} \cdots \sin \frac{n-1}{n}\pi = \frac{n}{2^{n-1}} \cdot \qquad (9)$$

275. On dit qu'une fonction $f(z)$ *admet une dérivée*, pour une valeur z de la variable, si pour cette valeur le rapport

$$\frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \frac{\Delta \varphi(x, y) + i \Delta \psi(x, y)}{\Delta x + i \Delta y}$$

tend vers une limite déterminée et unique, Δx et Δy tendant vers zéro d'une manière quelconque. Cette limite se désigne par $f'(z)$ ou par $Df(z)$ et s'appelle la dérivée de $f(z)$.

Partant de cette définition, on démontrera sans peine que les règles du N° **77** pour dériver une somme, un produit, etc... de fonctions d'une seule variable, subsistent pour des fonctions d'une variable imaginaire, et qu'il en est de même des règles de dérivation des fonctions inverses et des fonctions de fonctions (**78**, **79**). Il suit immédiatement de là que l'on a, pour m entier (positif ou négatif),

$$Dz^m = mz^{m-1}.$$

Pour trouver la dérivée de e^z, reprenons l'équation

$$e^z = e^x \cos y + i\, e^x \sin y,$$

et soit

$$\Delta z = \Delta x + i\Delta y$$

l'accroissement de la variable z. Nous aurons, d'après la formule (1) du N° **142**.

$$\Delta e^z = e^x(\cos y\,\Delta x - \sin y\,\Delta y) + ie^x(\sin y\,\Delta x + \cos y\,\Delta y) + \omega\Delta x + \omega'\Delta y,$$

ω, ω' étant des quantités imaginaires, qui tendent vers zéro en même temps que Δx et Δy tendent vers zéro. On tire de là

$$\Delta e^z = e^x(\cos y + i \sin y)(\Delta x + i\Delta y) + \omega\Delta x + \omega'\Delta y,$$

$$\frac{\Delta e^z}{\Delta z} = e^z + \frac{\omega\Delta x + \omega'\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}.$$

Posons $\Delta x + i\Delta y = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$; il faut et il suffit que ρ tende vers zéro pour que Δx, Δy tendent vers zéro. Le dernier terme de l'équation devient

$$\frac{\rho(\omega\cos\alpha + \omega'\sin\omega)}{\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = (\omega\cos\alpha + \omega'\sin\alpha)(\cos\alpha - i\sin\alpha)$$

et comme cette expression a pour limite zéro, quel que soit α, puisque ω et ω' sont infiniment petits avec ρ, il vient

$$\lim\frac{\Delta e^z}{\Delta z} = e^z, \quad \text{ou} \quad De^z = e^z.$$

La dérivée première étant égale à la fonction elle-même, il en sera de même de toutes les dérivées suivantes.

Si l'on fait $u = \mathrm{l}.z$, on a $z = e^u$, et d'après la formule ci-dessus et la règle des fonctions inverses

$$D_u z = e^u, \quad D_z u = \frac{1}{D_u z} = \frac{1}{e^u} = \frac{1}{z},$$

donc

$$D\mathrm{l}.z = \frac{1}{z} = z^{-1}.$$

On en conclut, par la règle qui donne la dérivée de z^m,

$$D^2\mathrm{l}.z = -\frac{1}{z^2}, \quad D^3\mathrm{l}.z = \frac{1.2}{z^3}, \ \cdots \ D^n\mathrm{l}.z = (-1)^{n-1}\frac{1.2\ldots(n-1)}{z^n},$$

comme lorsque la variable z est réelle.

La formule pour dériver e^z donne immédiatement

$$\mathrm{D}\cos z = \mathrm{D}\frac{e^{zi}+e^{-zi}}{2} = i\frac{e^{zi}-e^{-zi}}{2} = -\sin z,$$

$$\mathrm{D}\sin z = \mathrm{D}\frac{e^{zi}-e^{-zi}}{2i} = \frac{e^{zi}+e^{-zi}}{2} = \cos z,$$

et l'on retrouverait ainsi, pour z imaginaire, les formules connues des dérivées de tg z, cot z, etc... On a de même

$$\mathrm{DCh}\, z = \mathrm{D}\frac{e^{z}+e^{-z}}{2} = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2} = \mathrm{Sh}\, z,$$

$$\mathrm{DSh}\, z = \mathrm{D}\frac{e^{z}-e^{-z}}{2} = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2} = \mathrm{Ch}\, z, \text{ etc...}$$

CHAPITRE XXVII.

SÉRIES ORDONNÉES SUIVANT LES PUISSANCES ASCENDANTES D'UNE VARIABLE IMAGINAIRE. EXTENSION DE LA FORMULE DE TAYLOR.

276. Une série, dont les termes sont des fonctions d'une variable imaginaire z, est *équiconvergente* dans une région T du plan, lorsque, étant donné un nombre ε aussi petit qu'on le veut, on peut assigner un nombre N tel que le module du reste R_n de la série soit moindre que ε pour toute valeur de n égale ou supérieure à N, et pour toute valeur de z appartenant à la région T.

Parmi les séries dont les termes sont des fonctions de z, on distingue les séries *potentielles* ou séries de la forme

(1) $$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots,$$

$a_0, a_1, .., a_n, ...$ étant des coefficients constants, réels ou imaginaires. On peut d'ailleurs établir sur ces séries une suite de propositions analogues à celles du chapitre VI, § 1, et dont les démonstrations se feront exactement de même. Il suffira de remplacer partout les « *valeurs absolues* » des quantités par les « *modules* » des quantités, et la variable *réelle* x comprise dans un *intervalle* (a, b), par une variable imaginaire z variant

dans une *région* T. Cette remarque faite, nous pouvons nous borner à énoncer les propositions :

I. *Une série imaginaire est équiconvergente dans une région* T *lorsque, dans toute cette région, les modules de ses termes sont égaux ou inférieurs aux termes de même rang d'une série convergente à termes positifs.*

II. *Une série dont le terme général* u_n *est fonction continue de* z *dans une région* T *et qui est équiconvergente dans cette région, a pour somme une fonction continue de* z.

III. *Si, pour une module* r_1 *de* z, *le module du terme général* $a_n z^n$ *de la série* (1) *ne peut jamais surpasser un nombre fixe, la série* (1) *sera absolument convergente pour toute valeur de* z *dont le module sera inférieur à* r_1.

Donc, pour déterminer la région de convergence de la série (1), on fera croître le module r de z à partir de zéro; on cherchera la plus grande valeur R de r pour laquelle mod $a_n z^n$ ne croît pas indéfiniment avec n, ou la *limite supérieure* R des valeurs de z satisfaisant à cette condition. On décrira de l'origine comme centre un cercle de rayon R : c'est ce qu'on appelle le *cercle de convergence* de la série (1). La série sera absolument convergente si mod $z < \mathrm{R}$ ou si le point z est dans l'intérieur de ce cercle, d'après le théorème III; elle sera divergente si le point z est hors du cercle, puisque mod $a_n z^n$ sera indéfiniment croissant avec n. Sur la circonférence même, la série sera, tantôt convergente, tantôt divergente.

IV. *La série* (2) *est équiconvergente dans la région limitée par un cercle qui a l'origine pour centre, et un rayon déterminé* $\rho < \mathrm{R}$; *elle a pour somme une fonction continue de* z *dans cette région.*

V. *Deux séries potentielles ordonnées suivant les puissances d'une même variable* z *et dont les sommes sont égales dans l'intérieur d'un cercle qui a pour centre l'origine, sont identiques terme pour terme.*

Il en résulte qu'une fonction $f(z)$ ne peut être développée en série potentielle que d'une seule manière.

277. Soit $\varphi(z)$ une fonction de z, $\varphi'(z)$ sa dérivée, z_0 et z_1 deux valeurs de la variable, a et b leurs affixes. On aura

$$(2) \qquad \operatorname{mod} \frac{\varphi(z_1) - \varphi(z_0)}{z_1 - z_0} < \operatorname{mod} \varphi'(\zeta),$$

ζ désignant une valeur de z dont l'affixe sera un certain point du segment rectiligne ab.

Supposons, en effet, m et M étant (fig. 48) les affixes respectives de z et de $\varphi(z)$, que le point M décrive l'arc de courbe AMB pendant que le point m décrit le segment rectiligne ab. Posons $s = am$, $S =$ arc AM. D'après la règle d'addition des grandeurs imaginaires (**5**), on aura

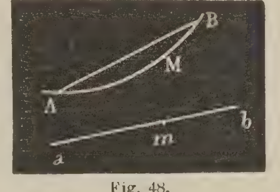


Fig. 48.

$$\operatorname{mod}[\varphi(z_1) - \varphi(z_0)] = AB, \quad \operatorname{mod}(z_1 - z_0) = ab.$$

D'autre part, l'arc et la corde ayant pour rapport limite l'unité,

$$\operatorname{mod} \varphi'(z) = \operatorname{mod}.\lim \frac{\Delta\varphi(z)}{\Delta z} = \lim \frac{\operatorname{mod}\Delta\varphi(z)}{\operatorname{mod}\Delta z} = \lim \frac{\Delta S}{\Delta s}.$$

Donc, si l'on avait *constamment*, de z_0 à z_1,

$$\operatorname{mod} \varphi'(z) < \operatorname{mod} \frac{\varphi(z_1) - \varphi(z_0)}{z_1 - z_0},$$

on aurait aussi

$$\frac{dS}{ds} < \frac{AB}{ab}, \quad \text{ou} \quad \frac{d}{ds}\left(S - \frac{AB}{ab}s\right) < 0.$$

La fonction continue $S - \frac{AB}{ab}s$ serait constamment décroissante quand le point m va de a à b, et comme elle est nulle pour $s = 0$, que pour $s = ab$ on a $S =$ arc AMB, il viendrait

$$\text{arc AMB} - AB < 0,$$

ce qui est impossible.

On conclut de l'inégalité (2) que, λ désignant une quantité imaginaire dont le module ne peut surpasser l'unité, on a

$$\varphi(z_1) - \varphi(z_0) = \lambda(z_1 - z_0)\varphi'[z_0 + (1 - \theta)(z_1 - z_0)],$$

θ étant une quantité réelle comprise entre zéro et l'unité.

Considérons maintenant une fonction $f(z)$ simple et continue entre deux valeurs a et $b = a + h$ de z, et posons

$$\varphi(z) = f(b - z) + zf'(b - z) + \frac{z^2}{1.2}f''(b - z) + \cdots + \frac{z^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{n-1}(b - z);$$

d'où l'on trouve sans peine

$$\varphi'(z) = -\frac{z^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^n(b - z).$$

A cause de la relation $b - h = a$, on a aussi

$$\varphi(h) - \varphi(0) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{1.2} f''(a) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{n-1}(a) - f(b),$$

et d'autre part, le lemme ci-dessus nous donne

$$\varphi(h) - \varphi(0) = \lambda h \varphi'[(1-\theta)h],$$

λ et θ ayant même signification que ci-dessus; donc, remplaçant b par $a + h$ et φ' par sa valeur, on a

$$(3) \qquad f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{n-1}(a) + \frac{\lambda h^n (1-\theta)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^n(a+\theta h).$$

C'est la formule de Taylor étendue à une fonction de variable imaginaire. L'expression du *reste* est due à M. Darboux. Si l'on y fait $a = 0$, $h = z$, on obtient la formule de Maclaurin

$$(4) \qquad f(z) = f(0) + zf'(0) + \frac{z^2}{1.2} f''(0) + \cdots + \frac{z^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{n-1}(0) + R_n,$$

avec l'expression du reste

$$(A) \qquad R_n = \frac{\lambda z^n (1-\theta)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^n(\theta z).$$

Les quantités θ et λ restent inconnues.

278. *Applications.* — La fonction e^z ayant pour dérivée d'ordre quelconque e^z, l'application de l'équation (4) donne

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \cdots + \frac{z^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} + R_n,$$

et l'équation (A)

$$R_n = \frac{\lambda z^n (1-\theta)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} e^{\theta z}.$$

Il est visible que le module de R_n a pour limite zéro pour toute valeur donnée de $r = \text{mod } z$ (**119**), donc on a en série convergente, pour toute valeur imaginaire ou réelle de z,

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \cdots$$

Remplaçant z par $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ dans les deux membres, et égalant séparément les parties réelles et les parties imaginaires, on a les deux égalités

$$e^{r\cos\varphi}\cos(r\sin\varphi) = 1 + r\cos\varphi + \frac{r^2}{1.2}\cos 2\varphi + \frac{r^3}{1.2.3}\cos 3\varphi + \cdots$$

$$e^{r\cos\varphi}\sin(r\sin\varphi) = r\sin\varphi + \frac{r^2}{1.2}\sin 2\varphi + \frac{r^3}{1.2.3}\sin 3\varphi + \cdots$$

Si, dans les équations (3) et (5) du N° **273** qui définissent les fonctions $\cos z$, $\sin z$, Ch z, Sh z, on remplace les exponentielles par leur developpement en série donné ci-dessus, on trouvera, pour toute valeur de z, les séries convergentes

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \frac{z^6}{1.2\ldots6} + \cdots,$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2\ldots5} - \frac{z^7}{1.2\ldots7} + \cdots,$$

$$\text{Ch}\, z = 1 + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \frac{z^6}{1.2\ldots6} + \cdots,$$

$$\text{Sh}\, z = z + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2\ldots5} + \frac{z^7}{1.2\ldots7} + \cdots$$

Remplaçant dans ces formules z par $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ et ayant égard aux équations du N° **273**, puis, décomposant encore chaque équation imaginaire en deux équations réelles, on obtient diverses séries remarquables, telles que celles-ci

$$\frac{e^{r\sin\varphi} + e^{-r\sin\varphi}}{2}\cos(r\cos\varphi) = 1 - \frac{r^2}{1.2}\cos 2\varphi + \frac{r^4}{1.2.3.4}\cos 4\varphi - \cdots,$$

$$\frac{e^{r\sin\varphi} - e^{-r\sin\varphi}}{2}\sin(r\cos\varphi) = \frac{r^2}{1.2}\sin 2\varphi - \frac{r^4}{1.2.3.4}\sin 4\varphi + \cdots,$$

etc...

279. *Développement de* l. $(1+z)$. — En raisonnant absolument comme au N° **121** et désignant par l. $(1+z)$ le log. qui s'annule avec z, on trouvera encore la formule

$$(1+z)\,\text{l.}\,(1+z) = z + \frac{z^2}{1.2} - \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^4}{3.4} - \cdots \pm \frac{z^n}{(n-1)n} + R_{n+1},$$

et l'équation (A) donnera

$$R_{n+1} = (-1)^{n-1}\frac{\lambda}{n}z^{n+1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta z}\right)^n.$$

Le module du rapport du $n^{\text{ième}}$ terme au précédent est $(n-2)\,r : n$; si r est > 1, ce module finit par surpasser l'unité et la série est divergente. Il suffit donc de s'occuper du cas où $r \leqq 1$. On a, en posant toujours $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$,

$$\text{mod}\,(1+\theta z) = \rho\sqrt{1 + 2\theta r\cos\varphi + \theta^2 r^2},$$

et comme $\cos\varphi \geqq -1$, on a

$$1 + 2\theta\, r\cos\varphi + \theta^2 r^2 \geqq (1-\theta r)^2,$$

donc

$$\rho \geqq 1 - \theta r \geqq 1 - \theta, \qquad \frac{1-\theta}{\rho} \leqq 1, \qquad \left(\frac{1-\theta}{\rho}\right)^n \leqq 1.$$

Donc, la valeur de R_{n+1} nous donne

$$\text{mod}\,R_{n+1} \leqq \frac{r^{n+1}}{n},$$

quantité qui tend vers zéro si n croît à l'infini.

La série trouvée ci-dessus est donc convergente et a pour somme $(1+z)\,\text{l}.(1+z)$ pour tout point z *dans* le cercle de rayon 1 autour de l'origine ou *sur* ce cercle. On en déduit, comme au N° **121**, que si z n'est pas égal à -1, on a l'égalité

(5) $$\text{l}.(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots$$

équation qui se trouve ainsi démontrée pour toute valeur réelle ou imaginaire de z dont le module est inférieur ou égal à l'unité, sauf, dans ce dernier cas, pour $\varphi = \pi$ ou $z = -1$.

Dans l'équation (5), remplaçons z par sa valeur $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, et observons que, d'après l'équation (2) du N° **272**, nous aurons

$$\text{l}.(1+z) = \text{l}.(1 + r\cos\varphi + ir\sin\varphi) = \text{l}.\sqrt{1 + 2r\cos\varphi + r^2}$$
$$+ i\,\text{arc tg}\frac{r\sin\varphi}{1 + r\cos\varphi}.$$

Décomposant l'équation en deux équations réelles, nous trouverons ces deux développements

$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{l.}\sqrt{1+2r\cos\varphi+r^2} = r\cos\varphi - \frac{r^2}{2}\cos 2\varphi + \frac{r^3}{3}\cos 3\varphi - \cdots,\\ &\operatorname{arc\,tg}\frac{r\sin\varphi}{1+r\cos\varphi} = r\sin\varphi - \frac{r^2}{2}\sin 2\varphi + \frac{r^3}{3}\sin 3\varphi - \cdots \end{aligned}\right.$$

Ces formules subsistent pour $r = 1$, sauf lorsque $\cos\varphi = -1$; dans cette hypothèse, nous aurons

$$\mathrm{l.}\sqrt{1+2r\cos\varphi+r^2} = \mathrm{l.}\sqrt{2(1+\cos\varphi)} = \mathrm{l.}\, 2\cos\frac{1}{2}\varphi,$$

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{r\sin\varphi}{1+r\cos\varphi} = \operatorname{arc\,tg}\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi} = \operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi\right) = \frac{1}{2}\varphi,$$

si l'on suppose l'arc φ compris entre $-\pi$ et $+\pi$. On a donc, pour toute valeur de $\varphi > -\pi$ et $< \pi$, en séries convergentes,

$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{l.}\, 2\cos\frac{1}{2}\varphi = \cos\varphi - \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{1}{3}\cos 3\varphi - \cdots,\\ &\frac{1}{2}\varphi = \sin\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi + \frac{1}{3}\sin 3\varphi - \cdots \end{aligned}\right.$$

280. *Développement de* $(1+z)^m$. — D'après la définition de z^m lorsque m n'est pas entier (**273**), on a

$$(1+z)^m = e^{m\mathrm{l.}(1+z)},$$

et cette fonction admet, comme $\mathrm{l.}(1+z)$, une infinité de valeurs. Nous ne considérerons ici que celle de ces valeurs de $\mathrm{l.}(1+z)$ qui répond à $k=0$ dans la formule (2) du nº **272**, et qui s'évanouit avec le module r de z. On a d'ailleurs

$$\mathrm{D}(1+z)^m = e^{m\mathrm{l.}(1+z)}\frac{m}{1+z} = m(1+z)^{m-1},$$

en sorte que les dérivées de cette fonction restent de même forme que si z et m étaient réels. Pour étendre le plus possible la région de convergence de la série, nous développerons d'abord la fonction $f(z) = (1+z)^{m+1}$, ***m étant supposé réel***, et nous aurons

$$f'(z) = (m+1)(1+z)^m,\quad f''(z) = (m+1)m(1+z)^{m-1},$$
$$\ldots\ldots f^n(z) = (m+1)m\ldots(m-n+2)(1+z)^{m-n+1}.$$

Il faut donc exclure la valeur $z = -1$ qui rendrait infinies les dérivées à partir d'un certain ordre. Substituons dans la formule (4), où nous changerons n en $n+1$; il viendra

$$(6)\quad (1+z)^{m+1} = 1+(m+1)z+\frac{(m+1)m}{1.2}z^2+\cdots+\frac{(m+1)m\ldots(m-n+2)}{1.2\ldots n}z^n+R_{n+1}$$

Le module du rapport du $(n+1)^{\text{ème}}$ terme au précédent est, pour $n > m+2$,

$$-\frac{m-n+2}{n}r = \left(1-\frac{m+2}{n}\right)r;$$

il tend vers r lorsque n devient infini.

Donc, si r est > 1, la série sera divergente, le terme général ne tendant pas vers zéro. Il faut supposer $r < 1$.

Nous allons prouver que, si $m+1 > 0$, l'expression

$$(7)\qquad U_n = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}$$

a pour limite zéro, n croissant indéfiniment. On a en effet

$$\frac{U_n}{U_{n-1}} = \frac{m-n+1}{n} = (-1)\left(1-\frac{m+1}{n}\right)$$

si $m+1 < 0$, le rapport $U_n : U_{n+1}$ est égal ou supérieur à l'unité en valeur absolue, et U_n ne tend pas vers zéro pour n infini. Mais si $m+1 > 0$, il est clair que l'expression

$$1-\frac{m+1}{n}$$

finira par être toujours positive et moindre que l'unité. On aura d'ailleurs, p ayant une valeur entière quelconque,

$$U_{n+p} = \frac{U_n}{U_{n-1}}\cdot\frac{U_{n+1}}{U_n}\cdots\frac{U_{n+p}}{U_{n+p-1}}\cdot U_{n-1}$$

$$= (-1)^{p+1}\left(1-\frac{m+1}{n}\right)\left(1-\frac{m+1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{m+1}{n+p}\right)U_{n-1}.$$

On sait que, α étant > 0 et < 1, on a

$$-\mathrm{l}.(1-\alpha) = \alpha+\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\alpha^2}{3}+\cdots > \alpha,$$

donc

$$-\mathrm{l}.\left(1-\frac{m+1}{n}\right)\left(1-\frac{m+1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{m+1}{n+p}\right) > (m+1)\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+p}\right),$$

et comme le second membre de cette inégalité croît indéfiniment avec p (**36**), il en est de même du premier. Donc

$$\mathrm{l.}\left(1-\frac{m+1}{n}\right)\left(1-\frac{m+1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{m+1}{n+p}\right)$$

a pour limite $-\infty$, et le produit lui-même a pour limite zéro. Il suit de là que U_{n+p} tend vers zéro lorsque p croît indéfiniment, donc enfin, il est démontré que l'expression U_n a pour limite zéro lorsque n devient infini, si $m+1$ est >0.

281. Ce lemme étant établi, revenons à l'équation (6), et considérons, dans l'hypothèse $r \leqslant 1$, le reste donné par la formule (A),

$$(\gamma) \quad R_{n+1} = \lambda \frac{(m+1)\,m\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n} z^{n+1} (1+\theta z)^m \left(\frac{1-\theta}{1+\theta z}\right)^n.$$

Si nous posons encore $\rho = \mathrm{mod}\,(1+\theta z)$, nous verrons comme au N° **279** que

$$\mathrm{mod}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta z}\right)^n = \left(\frac{1-\theta}{\rho}\right)^n$$

ne peut surpasser l'unité, quelque grand que soit n. On a semblablement

$$\rho \geqslant \sqrt{1+2\theta r\cos\varphi+\theta^2 r^2\cos^2\varphi} \quad \text{ou} \quad \rho \geqslant 1+\theta r\cos\varphi.$$

Si $\cos\varphi$ est positif ou nul, ρ est supérieur ou égal à l'unité. Si $\cos\varphi < 0$, et $r=1$, on a

$$\rho \geqslant 1+\theta\cos\varphi > 1+\cos\varphi$$

donc

$$\rho > 2\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi.$$

Donc, dans aucun cas ρ ne peut descendre au-dessous d'une limite bien déterminée et le module de $(1+\theta r)^m$ ou ρ^m ne peut croître indéfiniment, même si m est négatif.

Cela posé, 1° si r est < 1, on a

$$\mathrm{mod}\,R_{n+1} \leqslant \mathrm{mod}\,(m+1)\,r \times \mathrm{mod}\,U_n r^n \times \rho^m \times \left(\frac{1-\theta}{\rho}\right)^n.$$

Le premier et les deux derniers facteurs ne pouvant croître indéfiniment avec n, comme on vient de le voir, et le facteur $U_n r^n$ ayant pour limite zéro parce que la série $\Sigma U_n r^n$ est absolument convergente, R_{n+1} tend vers zéro avec $1:n$, quel que soit m.

2° Si $r = 1$, le premier et les deux derniers facteurs ne peuvent croître indéfiniment; le facteur U_n tend vers zéro lorsque n croît à l'infini, si $m + 1 > 0$, donc, *sous cette réserve*, R_{n+1} a pour limite zéro.

Observons maintenant que l'on a

$$m + 1 = 1 + m, \quad \frac{(m+1)m}{1.2} = \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2},$$

en général,

$$\frac{(m+1)m\ldots(m-n+2)}{1.2\ldots n} = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)}{1.2\ldots(n-1)} + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n},$$

de sorte que le second membre de l'équation (6) peut se mettre sous la forme

$$(1+z)\left[1 + \frac{m}{1}z + \frac{m(m-1)}{1.2}z^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)}{1.2\ldots(n-1)}z^{n-1}\right]$$
$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}z^n + R_{n+1},$$

les deux derniers termes tendant vers zéro avec $1 : n$. La division par $1 + z$ est toujours possible puisque z n'est pas égal à -1. On a donc, en divisant par $1 + z$ et faisant croître n indéfiniment, le développement de $(1 + z)^m$, savoir

$$(8) \quad (1+z)^m = 1 + \frac{m}{1}z + \frac{m(m-1)}{1.2}z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}z^3 + \cdots$$

Cette formule est donc applicable 1° pour toute valeur réelle de m, si $\bmod z < 1$; 2° pour $\bmod z = 1$ (sauf $z = -1$), si $m + 1 > 0$.

L'équation (8) conduit à de nombreuses conséquences. Remplaçant z par $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ et posant, pour abréger,

$$r' = \sqrt{1 + 2r\cos\varphi + r^2}, \quad \varphi' = \operatorname{arc\,tg}\frac{r\sin\varphi}{1 + r\cos\varphi},$$

on aura évidemment, d'après la formule (2) du N° **272**, où $k = 0$,

$$(1+z)^m = e^{m\,l.(1+z)} = e^{m\,l.(1 + r\cos\varphi + ir\sin\varphi)}$$
$$= e^{m(l.r' + \varphi' i)} = e^{m\,l.r'}(\cos m\varphi' + i\sin m\varphi') = r'^m(\cos m\varphi' + i\sin m\varphi').$$

Remplaçant aussi z par sa valeur dans le second membre, et décomposant en deux équations réelles, on aura

$$r'^m \cos m\varphi' = 1 + mr\cos\varphi + \frac{m(m-1)}{1.2} r^2 \cos 2\varphi + \cdots,$$

$$r'^m \sin m\varphi' = mr\sin\varphi + \frac{m(m-1)}{1.2} r^2 \sin 2\varphi + \cdots$$

Dans le cas particulier où l'on a $r = 1$, ce qui suppose $m > -1$, $\cos\varphi > -1$, on trouve

$$r' = 2\cos\tfrac{1}{2}\varphi, \qquad \varphi' = \tfrac{1}{2}\varphi,$$

et les équations précédentes deviennent

$$\left\{\begin{aligned} 2^m \cos^m \frac{\varphi}{2} \cos\frac{m\varphi}{2} &= 1 + m\cos\varphi + \frac{m(m-1)}{1.2}\cos 2\varphi + \cdots, \\ 2^m \cos^m \frac{\varphi}{2} \sin\frac{m\varphi}{2} &= m\sin\varphi + \frac{m(m-1)}{1.2}\sin 2\varphi + \cdots \end{aligned}\right.$$

On tire de ces relations, en posant $\varphi = 2x$,

$$2^m \cos^m x = \cos mx + m\cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)x + \cdots$$

Si, dans l'équation (8), on fait $z = i\,\mathrm{tg}\,\psi$, on aura

$$(1 + i\,\mathrm{tg}\,\psi)^m = 1 + mi\,\mathrm{tg}\,\psi - \frac{m(m-1)}{1.2}\mathrm{tg}^2\psi - i\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\mathrm{tg}^3\psi + \cdots$$

d'où

$$(\cos\psi + i\sin\psi)^m = \cos^m\psi\left[1 + mi\,\mathrm{tg}\,\psi - \frac{m(m-1)}{1.2}\mathrm{tg}^2\psi + \cdots\right]$$

et par suite

$$\cos m\psi = \cos^m\psi\left[1 - \frac{m(m-1)}{1.2}\mathrm{tg}^2\psi + \frac{m(m-1)\cdots(m-3)}{1.2.3.4}\mathrm{tg}^4\psi - \cdots\right],$$

$$\sin m\psi = \cos^m\psi\left[m\,\mathrm{tg}\,\psi - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\mathrm{tg}^3\psi + \cdots\right],$$

etc. etc.....



LIVRE TROISIÈME.

CALCUL INTÉGRAL.

(QUADRATURES).

CHAPITRE XXVIII.

DIVERSES MÉTHODES D'INTÉGRATION.

282. Le *Calcul intégral* est l'inverse du calcul différentiel ; il a pour but de remonter, de relations données entre les variables et leurs différentielles, aux relations primitives entre les variables elles-mêmes.

Le cas le plus simple et celui dont nous nous occuperons d'abord, est le cas où l'on se propose de trouver une fonction d'une seule variable, connaissant sa dérivée en fonction explicite de cette variable seulement ; ce problème est celui *des quadratures*. Nous établirons plus loin l'existence générale de la fonction *primitive*, lorsque la dérivée satisfait à certaines conditions, et nous nous bornerons ici à établir ce théorème :

Lorsqu'on a trouvé une fonction $\mathrm{F}(x)$ *de la variable* x, *dont la dérivée est égale à une fonction continue* $f(x)$ *dans un intervalle détérminé* (a, b), *on aura une fonction plus générale en ajoutant à la première une constante arbitraire* C, *et ce sera la fonction continue la plus générale qui satisfasse à cette condition.*

Si la fonction $\mathrm{F}(x)$ a pour dérivée $f(x)$, il est évident que $\mathrm{F}(x) + \mathrm{C}$ aura la même dérivée. Réciproquement il résulte du théorème IV, N° **91**,

que toute fonction de x dont la dérivée est $f(x)$ dans l'intervalle (a, b), est continue et ne peut différer de $F(x)$ que par une constante.

Cette fonction la plus générale dont la dérivée est égale à $f(x)$ se nomme l'*intégrale indéfinie de* $f(x)\,dx$, et se représente par la notation

$$\int f(x)\,dx$$

comprenant implicitement la constante arbitraire. Ainsi, les symboles d et $\int$ indiquent deux opérations inverses l'une de l'autre qui se neutralisent :

$$d\int f(x)dx = f(x)\,dx.$$

Nous nous occuperons ici des méthodes connues pour la recherche des intégrales indéfinies, en exposant d'abord les procédés dont on fait le plus souvent usage dans cette recherche.

283, La différentiation et l'intégration constituant deux opérations inverses, chaque proposition concernant la première a sa réciproque dans la seconde. Ainsi, a désignant un facteur constant, on sait que

$$d.\, a\int f(x)\,dx = ad\int f(x)\,dx = af(x)\,dx,$$

donc

$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx.$$

Tout facteur constant peut être mis hors du signe d'intégration. Les autres règles de différentiation donnent pareillement lieu à autant de procédés d'intégration que nous allons examiner.

Intégration immédiate. — Lorsque, dans l'expression à intégrer $f(x)\,dx$, on reconnaît la différentielle d'une fonction connue $F(x)$, il suffit (**282**) d'ajouter à celle-ci une constante arbitraire C pour obtenir $\int f(x)\,dx$. Cette remarque, appliquée aux différentielles des fonctions simples, donne le tableau suivant, sorte de *dictionnaire* que la mémoire doit bien posséder, parce que toute intégration s'y ramène en définitive :

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C,\ (a \gtrless -1), \qquad \int \frac{dx}{x} = \mathrm{l}.x + C,$$

$$\int A^x\,dx = \frac{A^x}{\mathrm{l}.A} + C, \qquad \int e^x\,dx = e^x + C,$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \text{arc sin } x + C = - \text{arc cos } x + C; \quad (-1 < x < 1),$$

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \text{arc tg } x + C, \quad \text{etc.....}$$

284. *Intégration par substitution.* — Cette méthode est basée sur la règle pour différentier une fonction de fonction. Soit u la fonction qui vérifie l'équation $du = f(x)\,dx$, et posons $x = \varphi(z)$, z étant une nouvelle variable. Nous aurons (**78**)

$$\frac{du}{dz} = f(x)\,\varphi'(z), \quad du = f[\varphi(z)]\,\varphi'(z)\,dz,$$

et u, considéré comme fonction de z, est donné par l'équation

$$u = \int f[\varphi(z)]\,\varphi'(z)\,dz.$$

Si l'on choisit la relation $x = \varphi(z)$ de manière à simplifier l'expression de du, et à la ramener à l'une des formes immédiatement intégrables, on aura u en fonction de z, et éliminant z à l'aide de la relation $x = \varphi(z)$, on trouvera u en fonction de x et le problème sera résolu.

On a ainsi immédiatement

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a} + C, \quad \int \cos ax\,dx = \frac{\sin ax}{a} + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \text{arc sin} \frac{x}{a} + C,$$

etc... Soit à chercher

$$\int \frac{dx}{a + bx};$$

on posera $a + bx = z$, d'où $b\,dx = dz$, et il viendra

$$\int \frac{dx}{a + bx} = \frac{1}{b} \int \frac{dz}{z} = \frac{1}{b}\,\text{l.}\,z = \frac{1}{b}\,\text{l.}\,(a + bx) + C.$$

De même

$$\int \frac{dx}{(a + bx)^m} = \frac{1}{b} \int z^{-m}\,dz = -\frac{1}{(m-1)\,bz^{m-1}} + C = \frac{-1}{(m-1)\,b(a + bx)^{m-1}} + C.$$

L'intégrale de

$$\frac{dx}{a^2 + b^2 x^2}$$

s'obtient en posant $bx = az$, $bdx = adz$, et l'on a

$$\int \frac{dx}{a^2 + b^2x^2} = \frac{1}{ab}\int \frac{dz}{1 + z^2} = \frac{1}{ab} \operatorname{arc\,tg} \frac{bx}{a} + C.$$

Enfin, en divisant haut et bas par $\cos^2 x$ et posant $\operatorname{tg} x = z$, on a

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{d.\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x} = \int \frac{dz}{z} = \text{l.} \operatorname{tg} x + C.$$

Exercices.

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\sqrt{a^2 - x^2} + C;$$

$$\int \frac{dx}{x\,\text{l.}\,x} = \text{l. l.}\, x + C; \quad \int \frac{dx}{a^2e^x + b^2e^{-x}} = \frac{1}{ab} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{ae^x}{b}\right) + C;$$

$$\int \frac{xdx}{a^4 + x^4} = \frac{1}{2a^2} \operatorname{arc\,tg} \frac{x^2}{a^2} + C; \quad \int \frac{dx}{1 + \cos^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x - x^2}} \arcsin(1 - 2x) = -\frac{1}{2}[\arcsin(1 - 2x)]^2 + C;$$

$$\int \frac{dx}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} + C.$$

En général, si $F'(x) = f(x)$, on aura

$$\int f(a^2 + x^2)\, xdx = \frac{1}{2} F(a^2 + x^2) + C; \quad \int f(e^x)\, e^x dx = F(e^x) + C,$$

$$\int f(\sin x) \cos x dx = F(\sin x) + C, \text{ etc.....}$$

285. *Intégration par décomposition.* — En vertu de la règle pour différentier une somme de fonctions (**77**), on a

$$d[\int f(x)\, dx \pm \int \varphi(x)\, dx \pm \int \psi(x) dx + \cdots] = [f(x) \pm \varphi(x) \pm \psi(x) + \cdots] dx,$$

donc, réciproquement,

$$\int [f(x) \pm \varphi(x) \pm \psi(x) + \cdots]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int \varphi(x)\, dx \pm \int \psi(x) dx + \cdots$$

L'intégrale de la somme algébrique de plusieurs différentielles est égale à la somme algébrique des intégrales de ces différentielles.

En décomposant une expression différentielle donnée en une somme

de plusieurs autres plus simples, on pourra ainsi dans beaucoup de cas effectuer l'intégration. Exemple :

$$\int\frac{dx}{a^2-b^2x^2}=\int\frac{dx}{(a-bx)(a+bx)}=\frac{1}{2a}\int\frac{(a-bx+a+bx)dx}{a^2-b^2x^2}=\frac{1}{2a}\int\frac{dx}{a+bx}$$

$$+\frac{1}{2a}\int\frac{dx}{a-bx}=\frac{1}{2ab}[\text{l.}(a+bx)-\text{l.}(a-bx)]+\text{C},$$

d'où enfin

$$\int\frac{dx}{a^2-b^2x^2}=\frac{1}{2ab}\,\text{l.}\,\frac{a+bx}{a-bx}+\text{C}.$$

De même, en introduisant le facteur $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, on trouvera

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{dx}{\sin^2 x}=\operatorname{tg} x-\cot x+\text{C}=-2\cot 2x+\text{C}.$$

Exercices.

$$\int\frac{dx}{a+be^x}=\frac{1}{a}[x-\text{l.}(a+be^x)]+\text{C};$$

$$\int dx\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\text{arc}\sin x-\sqrt{1-x^2}+\text{C};\quad \int\operatorname{tg}^2 x\,dx=\operatorname{tg} x-x+\text{C};$$

$$\int\frac{dx}{\sin^3 x\cos^3 x}=\frac{1}{2\cos^2 x}-\frac{1}{2\sin^2 x}+2\,\text{l.}\operatorname{tg} x+\text{C};$$

$$\int\cos^2 x\,dx=\frac{1}{2}\int(1+\cos 2x)\,dx=\frac{1}{2}(x+\sin x\cos x)+\text{C};$$

$$\int\sin ax\cos bx\,dx=-\frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)}-\frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)}+\text{C},$$

$$\int\frac{dx}{a^4-b^4x^4}=\frac{1}{2a^3b}\left(\text{arc tg}\frac{bx}{a}+\frac{1}{2}\,\text{l.}\,\frac{a+bx}{a-bx}\right)+\text{C}.$$

286, *Intégration par partie.* — On a trouvé pour différentier le produit uv de deux fonctions de x la formule

$$d.uv=vdu+udv,$$

d'où

$$udv=d.uv-vdu.$$

On a donc, par le n° précédent,

$$\int udv=uv-\int vdu.$$

Cette équation contient la règle de *l'intégration par partie.* Chaque fois que la différentielle donnée $f(x)\,dx$ sera décomposable dans le produit d'une fonction u par la différentielle dv d'une autre fonction connue, la règle ramènera la recherche de l'intégrale de $f(x)\,dx$ à celle de $\int v du$, qui pourra être plus facile à trouver. Ainsi, si l'on a à chercher l'intégrale de arc tg $x\,dx$, on fera $u = \text{arc tg } x$, $v = x$. et l'on aura

$$\int \text{arc tg } x\,dx = x \text{ arc tg } x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = x \text{ arc tg } x - \frac{1}{2}\,\text{l.}\,(1+x^2) + \text{C}.$$

De même, m étant entier et positif,

$$\int x^m \cos x\,dx = \int x^m\,d.\sin x = x^m \sin x = m \int x^{m-1} \sin x\,dx.$$

Une seconde intégration par partie ramènera à l'intégrale de $x^{m-2} \cos x\,dx$, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on arrive à $\int \cos x\,dx$ ou à $\int \sin x\,dx$, qui, étant connue, fera connaître toutes les précédentes.

Exercices.

$$\int \text{arc sin } x dx = x \text{ arc sin } x + \sqrt{1-x^2} + \text{C}; \qquad \int \frac{xe^x dx}{(1+x)^2} = \frac{e^x}{1+x} + \text{C};$$

$$\int \frac{x \text{ arc sin } x dx}{\sqrt{1-x^2}} = x - \sqrt{1-x^2} \text{ arc sin } x + \text{C};$$

$$\int \text{arc sin } x \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \text{ arc sin } x + \frac{1}{2}\,\text{l.}\,(1-x^2) + \text{C};$$

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{(1-x)^m} = \frac{1}{m-1}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{m-1} - \frac{1}{m-2}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{m-2} + \cdots \pm \frac{x}{1-x} \pm \text{l.}\,(1-x) + \text{C}.$$

287. *Remarque.* — 1° Si l'on sépare, de la constante arbitraire C qui complète une intégrale indéfinie, une constante déterminée pour la réunir avec la fonction intégrale, on arrive à donner à celle-ci des formes variées, qui pourraient faire croire, au premier abord, à l'existence de fonctions distinctes ayant même dérivée.

Ainsi, en posant $\text{C} = \text{C}_1 - \frac{\pi}{4}$, C_1 désignant une nouvelle constante arbitraire, on a

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tg } x + \text{C} = \text{arc tg } x - \text{arc tg } 1 + \text{C}_1 = \text{arc tg } \frac{x-1}{x+1} + \text{C}_1.$$

2° De ce que, *dans un intervalle déterminé* (a, b), une même expression différentielle ne peut admettre comme intégrales que des fonctions identiques, à une constante près, il faut se garder de conclure que l'intégrale de $f(x)\,dx$ soit nécessairement représentée par une même expression analytique dans tout intervalle des valeurs de la variable.

Il arrive même que l'expression qui représente l'intégrale dans un premier intervalle devient imaginaire dans un second, sans que l'on soit en droit d'en conclure que la différentielle n'admet pas d'intégrale réelle dans ce second intervalle. Ainsi, lorsqu'on suppose $x < a$, on a

$$\int \frac{dx}{a-x} = -\mathrm{l.}(a-x) + \mathrm{C}.$$

Pour $x > a$, $\mathrm{l.}\,(a-x)$ est imaginaire, mais la fonction à intégrer restant réelle, on écrira

$$\int \frac{dx}{a-x} = -\int \frac{dx}{x-a} = -\mathrm{l.}\,(x-a) + \mathrm{C},$$

et l'on voit qu'il existe, dans tout intervalle de la variable, une fonction réelle qui a pour dérivée $(a-x)^{-1}$. L'intégrale de la différentielle proposée est donc $-\mathrm{l.}\,(a-x)$ ou $-\mathrm{l.}\,(x-a)$ suivant que x est $<$ ou $> a$. On ne doit pas perdre de vue cette remarque lorsqu'on intègre par logarithmes.

Exercices. (Combinaison des méthodes.)

1. $\int dx \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arc\,sin} \frac{x}{a} + \mathrm{C}.$

2. $\int \frac{dx}{x}\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{x^2 - a^2} - a \operatorname{arc\,cos} \frac{a}{x} + \mathrm{C}.$

3. $\int \frac{x^2}{1 + x^2} \operatorname{arc\,tg} x\,dx = x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}(\operatorname{arc\,tg} x)^2 - \frac{1}{2}\mathrm{l.}\,(1 + x^2) + \mathrm{C}.$

4. $\int dx \operatorname{arc\,sin} \sqrt{\frac{x}{a+x}} = (a + x) \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{ax} + \mathrm{C}.$

5. $\int e^{m \operatorname{arc\,sin} x}\,dx = \frac{e^{m \operatorname{arc\,sin} x}\,(x + m\sqrt{1 - x^2})}{1 + m^2} + \mathrm{C}.$

$$6.\quad \int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\,\mathrm{l.}\dfrac{2cx+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2cx+b+\sqrt{b^2-4ac}}+C, & \text{si } b^2-4ac>0, \\ -\dfrac{2}{2cx+b}+C, & \text{si } b^2-4ac=0, \\ \dfrac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\dfrac{2cx+b}{\sqrt{4ac-b^2}}+C, & \text{si } b^2-4ac<0. \end{cases}$$

CHAPITRE XXIX.

INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES RATIONNELLES.

§ 1. DÉCOMPOSITION D'UNE FRACTION RATIONNELLE EN FRACTIONS SIMPLES.

288. Soient $f(x)$, $F(x)$ deux fonctions entières de x, a une racine réelle de l'équation $F(x)=0$, m son degré de multiplicité, en sorte que

$$(1)\qquad F(x) = (x-a)^m F_1(x),$$

$F_1(x)$ étant une nouvelle fonction entière de x qui ne s'annule plus pour $x=a$. Posons, A désignant une constante qui ne pourra être infinie,

$$A = \frac{f(a)}{F_1(a)},\quad \text{d'où}\quad f(a) - AF_1(a) = 0.$$

La fonction $f(x) - AF_1(x)$ s'annule donc pour $x=a$, elle est divisible par $x-a$; en d'autres termes, on a

$$f(x) - AF_1(x) = (x-a)\,f_1(x),$$

$f_1(x)$ étant une fonction entière de x. Divisons les deux membres de cette équation par $F(x)$ en ayant égard à l'équation (1), nous aurons

$$(2)\qquad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{(x-a)^m} + \frac{f_1(x)}{(x-a)^{m-1}F_1(x)}.$$

Il résulte de là ce théorème : *La fonction rationnelle $f(x) : F(x)$ est toujours décomposable en deux autres, l'une qui a pour numérateur une constante et pour dénominateur le facteur $(x-a)$ élevé à la plus haute puissance à laquelle il entre dans le dénominateur $F(x)$; l'autre qui a pour numérateur une fonction entière $f_1(x)$ et pour dénominateur la*

fonction F(x) *dans laquelle l'exposant de* $(x-a)$ *serait diminué d'une unité.*

Appliqué au dernier terme de l'équation (2), ce théorème permettra de le décomposer à son tour en deux autres, et ainsi de suite, jusqu'à ce que, l'exposant de $x-a$ au diviseur s'abaissant chaque fois d'une unité, on arrive à une fraction dont le dénominateur ne contient plus ce facteur. On aura donc

$$(3) \qquad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{(x-a)^m} + \frac{A_1}{(x-a)^{m-1}} + \dots + \frac{A_{m-1}}{x-a} + \frac{f_m(x)}{F_1(x)},$$

$A, A_1, \dots A_m$ étant des constantes dont aucune ne pourra être infinie et $f_m(x)$ une fonction entière de x.

Si a était une racine simple de l'équation $F(x)=0$, m serait égal à l'unité, on aurait une seule fraction simple

$$\frac{A}{x-a}.$$

Soit b une deuxième racine de $F(x)$, n son degré de multiplicité; de sorte que

$$F(x) = (x-a)^m (x-b)^n F_2(x), \quad F_1(x) = (x-b)^n F_2(x),$$

$F_2(x)$ désignant encore une fonction entière.

On appliquera le théorème ci-dessus à la fraction rationnelle

$$\frac{f_m(x)}{F_1(x)} = \frac{f_m(x)}{(x-b)^n F_1(x)},$$

et l'on aura

$$\frac{f_m(x)}{F_1(x)} = \frac{B}{(x-b)^n} + \frac{B_1}{(x-b)^{n-1}} + \dots + \frac{B_{n-1}}{x-b} + \frac{f_{m+n}(x)}{F_2(x)},$$

$F_2(x)$ ne renfermant plus le facteur $(x-b)$. On continuera cette série d'opérations jusqu'à ce que l'on arrive à une fraction dont le dénominateur, ne renfermant plus aucune des racines de $F(x)$, sera nécessairement une constante, c'est-à-dire à une fonction entière $E(x)$ de x.

289. La méthode de décomposition qui vient d'être exposée s'applique de la même manière lorsque les racines $a, b, \dots$ sont imaginaires, les propriétés sur lesquelles nous nous sommes appuyé étant communes à ces racines et aux racines réelles. Les coefficients $A, A_1, \dots$ sont alors imaginaires en général, et des réductions ultérieures ramènent à des

expressions réelles. Mais si l'on veut obtenir immédiatement la décomposition en fractions simples sous forme réelle, on procédera comme il suit :

Soit $\alpha + \beta i$ une racine imaginaire de $F(x)$, m son degré de multiplicité. Les racines imaginaires étant conjuguées deux-à-deux[1], l'équation $F(x) = 0$ aura aussi m racines égales à $\alpha - \beta i$; $F(x)$ sera donc divisible par

$$(x - \alpha - \beta i)^m (x - \alpha + \beta i)^m = [(x - \alpha)^2 + \beta^2]^m,$$

en sorte qu'on aura, quel que soit x, l'identité

$$F(x) = [(x - \alpha)^2 + \beta^2]^m F_1(x), \tag{4}$$

$F_1(x)$ étant une fonction entière et réelle de x qui ne s'annulera plus pour $x = \alpha \pm \beta i$. Posons

$$M(\alpha + \beta i) + N = \frac{f(\alpha + \beta i)}{F_1(\alpha + \beta i)}. \tag{5}$$

Le second membre de cette égalité se réduira (**7**, **8**) à une certaine expression imaginaire $P + Qi$ qui ne pourra pas être infinie, et l'équation

$$M(\alpha + \beta i) + N = P + Qi$$

se décomposera en deux équations réelles $M\alpha + N = P$, $M\beta = Q$, qui détermineront pour M et N des valeurs toujours réelles et finies.

L'équation (5), mise sous la forme

$$f(\alpha + \beta i) - [M(\alpha + \beta i) + N] F_1(\alpha + \beta i) = 0,$$

montre que la fonction $f(x) - (Mx + N) F_1(x)$ s'annule pour $x = \alpha + \beta i$, et comme elle est à coefficients réels, pour $x = \alpha - \beta i$. Donc, pour toute valeur de x on a

$$f(x) - (Mx + N) F_1(x) = [(x - \alpha)^2 + \beta^2] f_1(x),$$

$f_1(x)$ étant une fonction entière et réelle de x. Divisons les deux membres par $F(x)$ et ayons égard à l'équation (4); il viendra

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{Mx + N}{[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^m} + \frac{f_1(x)}{[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^{m-1} F_1(x)}. \tag{6}$$

D'où ce théorème, analogue au premier : *La fraction rationnelle* $f(x) : F(x)$ *sera décomposable en deux autres, une fraction simple dont le*

---

(1) Nous supposons que $F(x)$ ait ses coefficients réels.

numérateur sera du premier degré en x et le dénominateur le facteur $[(x-\alpha)^2+\beta^2]$ élevé à la plus haute puissance à laquelle il entre dans la fonction F (x)*; et une fraction ayant pour numérateur une fonction entière de x, pour dénominateur la fonction* F (x) *dans laquelle l'exposant de ce facteur sera diminué d'une unité.*

Le dernier terme de l'équation (6), par ce même théorême, se décomposera en deux autres, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à une fraction dont le dénominateur se réduise à $F_1(x)$.

Combinant ce que nous venons d'établir avec ce qui a été démontré plus haut, on peut conclure que toute fraction rationnelle $f(x):F(x)$ sera décomposable 1° en une somme de fractions simples à coefficients réels, ayant pour numérateurs des constantes ou des fonctious du premier degré en x, et pour dénominateurs les facteurs réels du premier ou du second degré qui correspondent aux racines réelles ou imaginaires de $F(r)$, élevés à des puissances égales ou inférieures à celles auxquelles ces facteurs entrent dans $F(x)$; 2° en une partie entière $E(x)$. Donc, connaissant les racines de l'équation $F(x)=0$, on peut immédiatement écrire la formule de la décomposition, les constantes $A, A_1, \ldots M, N\ldots$ restant à déterminer.

La marche suivie pour établir ces propriétés pourrait servir à déterminer les coefficients, mais il est pour cela des procédés plus expéditifs.

290. Après avoir cherché les racines de l'équation $F(x)=0$ et décomposé $F(x)$ en ses facteurs réels du premier ou du second degré correspondant à ces racines, on posera la formule de décomposition suivant la nature et le degré de multiplicité des racines, comme on l'a dit plus haut. Multipliant ensuite par $F(x)$ les deux membres de l'égalité, le premier se réduira à $f(x)$; dans le second les dénominateurs des fractions simples disparaîtront, puisqu'ils sont des diviseurs de $F(x)$; ce second membre se réduira donc aussi à une fonction entière de x. On pourra alors procéder de deux manières :

1° Par la *méthode des coefficients indéterminés*. On ordonnera les deux membres suivant les puissances croissantes de x, et comme l'égalité doit avoir lieu quel que soit x, on égalera les coefficients des mêmes puissances de x dans les deux membres. On aura ainsi une suite d'égalités, du premier degré par rapport à $A, A_1, \ldots B, B_1, \ldots N, N_1\ldots$, et toujours en nombre suffisant pour les déterminer, ainsi que $E(x)$.

De là une conséquence importante : *si le degré de $f(x)$ est moindre*

que celui de F (x), *la fonction entière* E (x) *sera nulle*. Car, soit λ le degré de F (x), $f(x)$ étant, par hypothèse, de degré inférieur à λ; les termes du second membre qui proviennent de la multiplication des fractions simples par F (x), seront aussi évidemment de degré inférieur à λ. Au contraire, si E (x) n'était pas nul, le produit E (x) F (x) renfermerait au moins un terme de degré égal ou supérieur à λ, irréductible avec tous les autres du second membre. Les deux membres de l'équation ne seraient pas de même degré par rapport à x, ce qui est absurde.

Cette méthode, commode lorsque F (x) est d'un degré inférieur, conduit à des calculs complqués lorsque F (x) est de degré élevé ; la suivante est alors préférable.

2° Après avoir ramené, comme ci-dessus, les deux membres de l'équation à être des fonctions entières de x, supposons que l'on veuille déterminer les coefficients A, $A_1, \ldots A_{m-1}$ qui correspondent à une racine réelle a du degré m de multiplicité. Le second membre de l'égalité peut évidemment s'écrire sous la forme

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} f(x) = AF_1(x) + A_1(x-a)F_1(x) + A_2(x-a)^2F_1(x) + \cdots \\ + A_{m-1}(x-a)^{m-1}F_1(x) + (x-a)^m\varphi(x), \end{aligned} \right.$$

$F_1(x)$ étant toujours le quotient de F (x) par $(x-a)^m$ et $\varphi(x)$ une fonction entière de x, car la multiplication par F (x) doit introduire le facteur $(x-a)^m$ dans tous les termes qui n'ont pas $(x-a)$ au diviseur.

L'équation (7) ayant lieu quel que soit x, faisons $x = a$. Les termes du second membre s'annulent sauf le premier, et l'on a

$$f(a) = AF_1(a),$$

équation qui détermine A.

Dérivons les deux membres de l'équation (7) par rapport à x et faisons $x = a$. D'après la règle pour les dérivées successives d'un produit et pour celles de x^m, on voit facilement que la dérivée d'ordre p de $(x-a)^r F_1(x)$ renfermera $(x-a)$ en facteur si $p < r$ et s'annulera pour $x = a$, mais si $p \geqslant r$, $(x-a)$ ne sera plus facteur de cette dérivée. Donc, nous aurons

$$f'(a) = AF'_1(a) + A_1[D.(x-a)F_1(x)]_{x=a}.$$

A étant connu, cette équation donnera A_1. Prenons les dérivées secondes des deux membres de l'équation (7) et faisons $x = a$. D'après la remarque

ci-dessus, tout les termes du second membre s'annuleront à l'exception des trois premiers, et nous aurons

$$f''(a) = AF_1''(a) + A_1 [D^2.(x-a) F_1(x)]_{x=a} + A_2 [D^2.(x-a)^2 F_1(x)]_{x=a},$$

ce qui donnera A_2; et ainsi de suite. Après $m - 1$ dérivations, suivies de l'hypothèse $x = a$, les coefficients $A, A_1, \dots A_{m-1}$ seront déterminés. Il est inutile de développer les calculs sous forme générale ; il vaut mieux appliquer la méthode sur chaque cas particulier.

On remarquera que le dernier terme de l'équation (7), $(x - a)^m \varphi(x)$, renfermant $(x - a)$ à la puissance m, s'annulera pour $x = a$ après chacune des $m - 1$ dérivations. On n'a donc pas besoin d'en tenir compte dans ces calculs relatifs à la détermination des numérateurs qui correspondent à la racine a, ce qui abrègera le travail.

Si a est racine simple, l'équation

$$f(a) = AF_1(a)$$

suffit pour déterminer le numérateur de la seule fraction simple correspondante.

Mais la théorie des équations apprend que, dans ce cas, $F_1(x)$ se réduit pour $x = a$, à $F'(a)$, et l'on a la formule commode

$$A = \frac{f(a)}{F'(a)}, \tag{8}$$

pour déterminer les coefficients qui se rapportent aux racines simples.

291. Ce qui précède s'appliquerait aussi à la détermination des coefficients correspondant aux racines imaginaires, mais si l'on veut faire la décomposition immédiatement sous la forme réelle, on déterminera les coefficients $M, N, M_1 \dots$; par une voie analogue. Soit $\alpha + \beta i$ une racine imaginaire de $F(x)$, m son degré de multiplicité, $F_1(x)$ le quotient de la division de $F(x)$ par $[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^m$.

La formule générale de décomposition, après multiplication par $F(x)$, donnera un résultat de la forme

$$(9) \left\{ \begin{aligned} f(x) &= (Mx + N) F_1(x) + (M_1 x + N_1) [(x-\alpha)^2 + \beta^2] F_1(x) + \cdots \\ &+ (M_{m-1} x + N_{m-1}) [(x-\alpha)^2 + \beta^2]^{m-1} F_1(x) + [(x-\alpha)^2 + \beta^2]^m \varphi(x), \end{aligned} \right.$$

$\varphi(x)$ désignant une fonction entière de x. Si dans cette équation on pose $x = \alpha + \beta i$, il viendra

$$f(\alpha + \beta i) = [M(\alpha + \beta i) + N] F_1(\alpha + \beta i),$$

équation imaginaire qui se décomposera en deux équations réelles, d'où l'on déduira M et N. Prenant les dérivées par rapport à x des deux membres de l'équation (9), puis faisant $x = \alpha + \beta i$, tous les termes du second membre s'annuleront sauf les deux premiers, comme renfermant $[(x - \alpha)^2 + \beta^2]$ en facteur, et l'on aura une équation pour déterminer M_1, N_1 ; et ainsi de suite. Il suffit de $m - 1$ dérivations pour trouver tous les coefficients M et N, et il est inutile de tenir compte du terme final $[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^m \varphi(x)$, qui donnera zéro après chaque différentiation.

On voit, par cette méthode, que la décomposition sous la forme demandée ne peut se faire que d'une seule manière, car si les coefficients $A, A_1, \ldots M, N, \ldots$ admettaient plusieurs valeurs, le procédé que nous venons de suivre pour les déterminer devrait les donner toutes; or, chaque coefficient est donné par une équation du premier degré et n'admet qu'une seule valeur.

Lorsque l'équation $F(x) = 0$ n'a pas de racines égales, le moyen le plus rapide d'opérer la décomposition consiste à former l'expression $f(x) : F'(x)$, et à y faire successivement $x = a, b, \ldots, \alpha + \beta i, \ldots$ Les numérateurs sont alors déterminés par les formules

$$A = \frac{f(a)}{F'(a)}, \quad B = \frac{f(b)}{F'(b)}, \ldots$$

qui s'appliquent, que $a, b, \ldots$ soient réels ou imaginaires. Il suffira ensuite de réduire deux à deux les fractions imaginaires correspondant aux racines conjuguées pour obtenir la décomposition de $f(x) : F(x)$ sous la forme réelle.

292. Supposons les racines de $F(x)$, $a, b, \ldots l$, réelles et inégales, et $f(x)$ de degré moindre que $F(x)$. Donc

$$F(x) = (x - a)(x - b) \ldots (x - l),$$

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x - b} + \cdots + \frac{L}{x - l},$$

A, B, ... L étant constants. On a

$$F'(a) = \lim_{x=a} \frac{F(x)}{x - a} = (a - b)(a - c) \ldots (a - l),$$

et

$$A = \frac{f(a)}{F'(a)} = \frac{f(a)}{(a-b)(a-c)\ldots(a-l)}; \text{ et de même } B = \frac{f(b)}{(b-a)(b-c)\ldots(b-l)},$$

etc.....

Substituant, multipliant par $F(x)$ et réduisant, on obtient la *formule d'interpolation de Lagrange*

$$(10)\quad \left\{ \begin{aligned} f(x) = \frac{(x-b)(x-c)\ldots(x-l)}{(a-b)(a-c)\ldots(a-l)} f(a) + \frac{(x-a)(x-c)\ldots(x-l)}{(b-a)(b-c)\ldots(b-l)} f(b) \\ + \cdots + \frac{(x-a)(x-b)\ldots}{(l-a)(l-b)\ldots} f(l), \end{aligned} \right.$$

qui sert à former une fonction entière de x connaissant les valeurs que prend cette fonction pour des valeurs données $a, b, \ldots l$ de la variable, en nombre supérieur au degré de $f(x)$.

293. *Exemples*. — I. Soit à décomposer

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{x^3 + x^2 + 2}{x^5 - 2x^3 + x}.$$

L'équation $F(x) = 0$ a une racine simple $x = 0$, deux racines doubles $x = 1$ et $x = -1$. Donc

$$F(x) = x^5 - 2x^3 + x = x(x-1)^2(x+1)^2.$$

On posera

$$\frac{x^3 + x^2 + 2}{x^5 - 2x^3 + x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{C_1}{x+1};$$

il n'y a pas de partie entière, $f(x)$ étant de moindre degré que $F(x)$. Chassant les dénominateurs, on a

$$\begin{aligned} x^3 + x^2 + 2 = A(x-1)^2(x+1)^2 + Bx(x+1)^2 + B_1 x(x-1)(x+1)^2 \\ + Cx(x-1)^2 + C_1 x(x-1)^2(x+1). \end{aligned}$$

L'hypothèse $x = 0$ donne $2 = A$; $x = 1$ donne $4 = 4B$ ou $B = 1$. Dérivant et faisant $x = 1$, sans s'occuper des termes en $(x-1)^2$, on trouve

$$5 = 8B + 4B_1, \quad B_1 = -\frac{3}{4}.$$

Enfin, posant $x = -1$ dans l'équation ci-dessus, on trouve $C = -1:2$; puis, différentiant et faisant $x = -1$, on aura

$$1 = 8C - 4C_1, \quad \text{d'où} \quad C_1 = -\frac{5}{4}.$$

La formule cherchée est donc

$$\frac{x^3 + x^2 + 2}{x^5 - 2x^3 + x} = \frac{2}{x} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{3}{4(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)^2} - \frac{5}{4(x+1)}.$$

II. Soit encore

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{x^3 - 1}{x^5 - 2x^4 + 8x^2 - 12x + 8}.$$

Les racines de $F(x)$ sont $x = -2$, $x = 1 + i$, racine double, $x = 1 - i$, double. Donc

$$F(x) = (x + 2)[(x - 1)^2 + 1]^2 = (x + 2)(x^2 - 2x + 2)^2,$$

et l'on devra poser, $E(x)$ étant nul,

$$(\alpha)\quad \frac{x^3 - 1}{x^5 - 2x^4 + 8x^2 - 12x + 8} = \frac{A}{x + 2} + \frac{Mx + N}{(x^2 - 2x + 2)^2} + \frac{M_1 x + N_1}{x^2 - 2x + 2}.$$

Multipliant les deux membres par $F(x)$, il vient

$$x^3 - 1 = A(x^2 - 2x + 2)^2 + (Mx + N)(x + 2) + (M_1 x + N_1)(x + 2)(x^2 - 2x + 2).$$

On détermine A en faisant $x = -2$, d'où

$$-9 = 100 \cdot A \quad \text{ou} \quad A = -\frac{9}{100}.$$

On fera ensuite $x = 1 + i$, ce qui donnera

$$(1 + i)^3 - 1 = (M + N + Mi)(3 + i),$$

ou, en développant et séparant en deux équations réelles,

$$-3 = 2M + 3N, \quad 2 = 4M + N,$$

d'où

$$M = \frac{9}{10}, \quad N = -\frac{8}{5}.$$

Pour trouver M_1, N_1, on dérivera l'équation ci-dessus et l'on fera $x = 1 + i$, en négligeant le terme $A(x^2 - 2x + 2)^2$; on aura

$$6i = 4M + N - 8M_1 - 2N_1 + i(2M + 4M_1 + 6N_1),$$

d'où l'on tirera

$$4M + N - 8M_1 - 2N_1 = 0, \quad 2M + 4M_1 + 6N_1 = 6,$$

et en résolvant et substituant à M, N leurs valeurs,

$$M_1 = \frac{9}{100}, \quad N_1 = \frac{16}{25}.$$

Il suffira de porter ces valeurs dans l'équation (α) pour avoir la décomposition demandée.

§ 2. INTÉGRATION DES FONCTIONS RATIONNELLES.

294. Soit à intégrer $\varphi(x)dx$, $\varphi(x)$ désignant une fonction rationnelle de x. Si cette fonction est entière, ou de la forme

$$\varphi(x) = a + bx + cx^2 + \cdots + kx^n,$$

les principes établis au chapitre précédent donneront

$$\int\varphi(x)dx = ax + \frac{bx^2}{2} + \frac{cx^3}{3} + \cdots + \frac{kx^{n+1}}{n+1} + \text{C}.$$

Si $\varphi(x)$ est fractionnaire, on effectuera la division algébrique du numérateur par le dénominateur, et l'on décomposera $\varphi(x)$ en une partie entière $\text{E}(x)$ [qui sera nulle si le numérateur est de degré moins élevé que le dénominateur] et une partie fractionnaire $f(x) : \text{F}(x)$ dans laquelle $f(x)$ sera de degré moins élevé que $\text{F}(x)$.

L'expression $\text{E}(x)dx$ s'intègre sans difficulté comme on l'a vu plus haut. La fraction $f(x) : \text{F}(x)$ se décomposera, par les méthodes exposées ci-dessus, en une somme de fractions simples qui appartiendront à l'une des quatre formes :

$$\frac{\text{A}}{x-a}, \quad \frac{\text{A}}{(x-a)^m}, \quad \frac{\text{M}x+\text{N}}{(x-\alpha)^2+\beta^2}, \quad \frac{\text{M}x+\text{N}}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^m},$$

a, $\alpha + \beta i$ désignant des racines de $\text{F}(x)$; A, M, N des constantes. Or, on sait déjà (**284**) que

$$(1)\ \int\frac{\text{A}\,dx}{x-a} = \text{A}\,\text{l.}\,(x-a) + \text{C}, \quad (2)\ \int\frac{\text{A}\,dx}{(x-a)^m} = -\frac{\text{A}}{(m-1)(x-a)^{m-1}} + \text{C}.$$

Pour intégrer les fractions de la 3me forme, nous poserons $x - \alpha = \beta z$, d'où $dx = \beta dz$, et il viendra, par substitution et décomposition,

$$\int\frac{\text{M}x+\text{N}}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx = \frac{\text{M}}{2}\int\frac{2z\,dz}{1+z^2} + \frac{\text{M}\alpha+\text{N}}{\beta}\int\frac{dz}{1+z^2}$$
$$= \frac{\text{M}}{2}\text{l.}\,(1+z^2) + \frac{\text{M}\alpha+\text{N}}{\beta}\,\text{arc tg}\,z + \text{C}.$$

Remplaçant z par sa valeur et faisant rentrer $-\text{M}\,\text{l.}\,\beta$ dans la constante C, nous aurons

$$(3)\ \int\frac{\text{M}x+\text{N}}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx = \frac{\text{M}}{2}\text{l.}\,[(x-\alpha)^2+\beta^2] + \frac{\text{M}\alpha+\text{N}}{\beta}\,\text{arc tg}\frac{x-\alpha}{\beta} + \text{C}.$$

La même substitution donnera, pour la quatrième forme,

$$\int \frac{Mx+N}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^m}dx = \frac{M}{2\beta^{2m-2}}\int\frac{2z\,dz}{(1+z^2)^m}+\frac{M\alpha+N}{\beta^{2m-1}}\int\frac{dz}{(1+z^2)^m}$$

$$= -\frac{M}{2(m-1)[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{m-1}}+\frac{M\alpha+N}{\beta^{2m-1}}\int\frac{dz}{(1+z^2)^m}.$$

Le calcul de cette dernière intégrale se fait par une *méthode de réduction*. On a

$$\int\frac{dz}{(1+z^2)^m}=\int\frac{(1+z^2-z^2)\,dz}{(1+z^2)^m}=\int\frac{dz}{(1+z^2)^{m-1}}-\int\frac{z^2\,dz}{(1+z^2)^m}.$$

Mais, en intégrant par partie, on obtient

$$\int z\cdot\frac{z\,dz}{(1+z^2)^m}=-\frac{z}{(2m-2)(1+z^2)^{m-1}}+\frac{1}{2m-2}\int\frac{dz}{(1+z^2)^{m-1}},$$

et la substitution de cette valeur dans l'équation précédente donne

$$(4)\qquad \int\frac{dz}{(1+z^2)^m}=\frac{z}{(2m-2)(1+z^2)^{m-1}}+\frac{2m-3}{2m-2}\int\frac{dz}{(1+z^2)^{m-1}}.$$

L'intégrale est ramenée à une autre de même forme, mais l'exposant m est abaissé d'une unité. En changeant dans la formule (4) m en $m-1$, on fera dépendre la nouvelle intégrale d'une troisième où m sera remplacé par $m-2$, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on arrive, m étant entier, à

$$\int\frac{dz}{1+z^2}=\text{arc tg } z+C.$$

Cette dernière, étant connue, fera connaître toutes les précédentes, en sorte que l'intégrale (4) doit être regardée comme connue, pour toute valeur entière et positive de m. En y remplaçant z par sa valeur en x, on aura l'intégrale de la quatrième expression. Il suit de là que

L'intégrale d'une différentielle rationnelle par rapport à x peut toujours être obtenue au moyen d'un nombre limité de termes ne renfermant que des fonctions rationnelles, des logarithmes ou des arcs de cercle.

Exercices.

A) Déduire, du cas où $F(x)$ n'a que des racines simples, une formule générale pour décomposer $f(x) : F(x)$ en fractions simples dans le cas de racines multiples (HERMITE, *Annales de la Soc. Scient. de Bruxelles*, t. II).

R. Supposons d'abord $F(x) = (x-a)(x-b)\dots(x-l)$. On sait (**291**) que l'on a

$$(\alpha) \qquad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{1}{x-a}\frac{f(a)}{F'(a)} + U,$$

U désignant une somme de termes dont aucun ne renferme $x-a$ en diviseur. L'équation (α) étant vraie quelles que soient les valeurs de $a, b, \dots l$, si l'on dérive les deux membres α fois par rapport à a, β fois par rapport à $b\dots$, on aura encore une équation exacte. En posant $1, 2 \dots \alpha = \alpha!$, le résultat des opérations indiquées sera, sur le premier membre.

$$\frac{\alpha!\,\beta!\dots\lambda!\,f(x)}{(x-a)^{\alpha+1}(x-b)^{\beta+1}\dots(x-l)^{\lambda+1}}.$$

D'autre part, comme on a $F'(a) = (a-b)(a-c)\dots(a-l)$, le résultat des dérivations par rapport à $b, c, \dots l$ sur le second membre sera, quant au premier terme,

$$\frac{f(a)}{x-a}\frac{\beta!\,\gamma!\dots\lambda!}{(a-b)^{\beta+1}(a-c)^{\gamma+1}\dots(a-l)^{\lambda+1}} = \beta!\,\gamma!\dots\lambda!\,\frac{\varphi(a)}{x-a},$$

$\varphi(a)$ désignant le quotient de $f(a)$ par $(a-b)^{\beta+1}\dots(a-l)^{\lambda+1}$. Il reste à dériver α fois par rapport à a. D'après la règle de Leibnitz (**97**) on a

$$D_a^\alpha \frac{\varphi(a)}{x-a} = \alpha!\,\frac{\varphi(a)}{(x-a)^{\alpha+1}} + \frac{\alpha!}{1}\frac{\varphi'(a)}{(x-a)^\alpha} + \frac{\alpha!\,\varphi''(a)}{1.2\,(x-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{\alpha!}{\alpha!}\frac{\varphi^\alpha(a)}{x-a}.$$

Egalant les dérivées indiquées des deux membres de (α), et simplifiant, on a

$$\frac{f(x)}{(x-a)^{\alpha+1}\dots(x-l)^{\lambda+1}} = \frac{\varphi(a)}{(x-a)^{\alpha+1}} + \frac{\varphi'(a)}{(x-a)^\alpha} + \frac{\varphi''(a)}{1.2\,(x-a)^{\alpha-1}} + \dots$$
$$+ \frac{1}{\alpha!}\frac{\varphi^\alpha(a)}{x-a} + D_a^\alpha D_b^\beta \dots D_l^\lambda U.$$

Ce dernier terme n'en renfermant aucun qui ait $(x-a)$ en diviseur, la somme des autres termes représente l'ensemble des fractions simples qui correspondent au facteur $(x-a)^{\alpha+1}$ du dénominateur du premier membre. Les fractions correspondant aux racines multiples $b, \dots l$ se détermineraient de la même manière.

B) Trouver les valeurs des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int \frac{x^2 - x + 2}{x^4 - 5x^2 + 4}\,dx$; *R.* $\displaystyle\frac{1}{3}\,\mathrm{l.}\,\frac{(x-2)(x+1)^2}{(x-1)(x+2)^2} + C.$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3(x-1)}$; *R.* $\displaystyle\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x} + \mathrm{l.}\,\frac{x-1}{x} + C.$

3. $\displaystyle\int \frac{2x^4 - 5x^3 + 1}{(x^2+1)^3(x^2-3x+2)}\,dx$;

$$R.\ \frac{1}{4}\,\mathrm{l.}\,(x-1) - \frac{7}{125}\,\mathrm{l.}\,(x-2) - \frac{97}{1000}\,\mathrm{l.}\,(x^2+1) + \frac{58x+11}{100\,(x^2+1)}$$

$$-\frac{6x+7}{20\,(x^2+1)^2} + \frac{58}{100}\,\mathrm{arc\,tg}\,x + C.$$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{a+bx^2+cx^4}$; $1^\circ\ b^2-4ac>0,\quad k=\sqrt{b^2-4ac}.$

$$R.\quad -\frac{1}{k}\sqrt{\frac{2c}{b+k}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x\sqrt{2c}}{\sqrt{b+k}} + \frac{1}{k}\sqrt{\frac{2c}{b-k}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x\sqrt{2c}}{\sqrt{b-k}} + C.$$

$2^\circ\ b^2-4ac<0,\quad b^2-4ac=-k^2,\quad -b+ki=2c\rho e^{\theta i}.$

$$R.\ \frac{1}{4c\rho^{\frac{3}{2}}\cos\frac{\theta}{2}}\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{l.}\,\frac{x^2+2x\rho^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\theta}{2}+\rho}{x^2+2x\rho^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\theta}{2}+\rho} + \cot\frac{\theta}{2}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{2\rho^{\frac{1}{2}}x\sin\frac{\theta}{2}}{\rho^2-x^2}\right)+C.$$

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^6} = \frac{1}{12}\,\mathrm{l.}\,\frac{(1+x)^2\,(x^2+x+1)}{(1-x)^2\,(x^2-x+1)} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2} + C.$

CHAPITRE XXX.

INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES IRRATIONNELLES.

295. L'intégration des différentielles algébriques irrationnelles, dans le petit nombre de cas où elle est possible au moyen des fonctions élémentaires admises jusqu'ici, s'effectue généralement par l'un des procédés suivants : 1° ou bien l'on rend rationnelle l'expression donnée, par une substitution de variables, ce qui ramène au cas du Ch. XXIX; 2° ou bien l'on fait dépendre, au moyen de l'intégration par partie, l'intégrale cherchée d'une autre plus simple, celle-ci d'une autre plus simple, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à une intégrale connue. Appliquons d'abord la première méthode.

Supposons que $f(x)$ soit une fonction rationnelle des quantités x, x^p, x^q, ..., p, q... étant fractionnaires. Désignons par μ le plus petit multiple des dénominateurs de p, q ..., et faisons

$$x = z^\mu,\qquad dx = \mu z^{\mu-1}\,dz.$$

μp, μq,... étant entiers, x^p, x^q,... seront rationnels en z, ainsi que dx, donc $f(x)\,dx$ deviendra rationnel en z et pourra s'intégrer par les méthodes exposées plus haut. On substituera ensuite à z sa valeur $x^{\frac{1}{\mu}}$.

Si $f(x)$ était une fonction rationnelle de x, $(a+bx)^p$, $(a+bx)^q$,... on poserait de même $a+bx=z^\mu$ et l'on rendrait la différentielle rationnelle. De même encore si $f(x)$ renfermait des puissances fractionnaires de l'expression

$$\frac{a+bx}{a'+b'x}.$$

Exemples :

$$\int\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}}=\int\frac{6z^3dz}{1+z}=6\left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{3}-\frac{x^{\frac{1}{3}}}{2}+x^{\frac{1}{6}}-\text{l.}\,(1+x^{\frac{1}{6}})\right]+\text{C},$$

$$\int\frac{1+x^{\frac{1}{3}}}{1+x^{\frac{1}{4}}}=12\left(\frac{z^{13}}{13}-\frac{z^{10}}{10}-\frac{z^9}{9}+\frac{z^7}{7}-\frac{z^6}{6}-\frac{z^4}{4}+\frac{z^3}{3}+z\right)$$

$$+2\,\text{l.}\,\frac{1-z+z^2}{(1+3^3)^2\,(1+z)^2}-\frac{12}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2z-1}{\sqrt{3}}+\text{C},\quad (z=x^{\frac{1}{12}}).$$

$$\int\frac{xdx}{(1+x)^{\frac{1}{3}}-(1+x)^{\frac{1}{2}}}=-(1+x)^{\frac{2}{3}}\left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{5}{6}}+\frac{3}{4}(1+x)^{\frac{2}{3}}+\frac{6}{7}(1+x)^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left.+(1+x)^{\frac{1}{3}}+\frac{6}{5}(1+x)^{\frac{1}{6}}+\frac{3}{2}\right]+\text{C}.$$

296. *Différentielles renfermant la racine carrée d'un trinôme du second degré.* — Soit à intégrer une expression de la forme $f(x,y)\,dx$, f désignant une fonction rationnelle de x et de y, et y le radical $\sqrt{\text{A}+\text{B}x+\text{C}x^2}$, où A, B, C sont des constantes. On peut supposer $\text{C}=\pm 1$, il suffit de diviser sous le radical par la valeur absolue de C. Nous poserons donc simplement

$$y=\sqrt{a+bx\pm x^2},$$

a et b ayant des signes quelconques.

1er *cas :* $y=\sqrt{a+bx+x^2}$. — Désignons par z une nouvelle variable et posons

$$y=z-x,\quad \text{d'où}\quad a+bx=z^2-2xz,$$

et en différentiant,

$$bdx=2zdz-2xdz-2zdx,\qquad x=\frac{z^2-a}{b+2z},\qquad dx=\frac{2(z-x)\,dz}{b+2z}.$$

x étant fonction rationnelle de z, si l'on substitue à x sa valeur dans les expressions de dx et de y, on trouvera les fonctions rationnelles de z

$$dx = \frac{2(z^2 + bz + a)}{(b + 2z)^2} dz, \quad y = \frac{z^2 + bz + a}{b + 2z}.$$

Donc $f(x, y)dx$ sera rendu rationnel et s'intégrera. On remplacera z par sa valeur

$$z = x + \sqrt{a + bx + x^2}.$$

2[me] *cas* : $y = \sqrt{a + bx - x^2}$. — L'équation $x^2 - bx - a = 0$ doit avoir ses racines α et β réelles, sans quoi y serait imaginaire pour toute valeur de x, et de plus, x devra varier dans l'intervalle (α, β) compris entre les racines. On posera

$$y = \sqrt{a + bx - x^2} = \sqrt{(x - \alpha)(\beta - x)} = (x - \alpha)z,$$

d'où l'on tirera successivement

$$\beta - x = (x - \alpha) z^2, \quad -dx = z^2 dx + 2(x - \alpha) z dz,$$

$$x = \frac{\beta + \alpha z^2}{1 + z^2}, \quad dx = -\frac{2(x - \alpha) z dz}{1 + z^2}.$$

x, dx, y s'exprimeront rationnellement en z, et par suite $f(x, y)\ dx$. Après l'intégration, on remplacera z par sa valeur

$$z = \sqrt{\frac{\beta - x}{x - \alpha}}.$$

La même transformation s'applique au premier cas lorsque le trinôme sous le radical a ses racines réelles.

3[me] *cas* : $y = \sqrt{a + bx \pm x^2}$, $a > 0$. — On posera

$$y = \sqrt{a} + xz,$$

d'où, élevant au carré et réduisant,

$$b \pm x = 2z\sqrt{a} + xz^2, \quad x = \frac{b - 2z\sqrt{a}}{z^2 \mp 1},$$

$$\pm dx = z^2 dx + 2(\sqrt{a} + xz)\, dz, \quad dx = -\frac{2(\sqrt{a} + xz) dz}{z^2 \mp 1}.$$

x étant rationnel en z, il en sera de même de dx, y, et de $f(x, y)\, dx$. On aura ensuite

$$z = \frac{\sqrt{a + bx \pm x^2} - \sqrt{a}}{x}.$$

297. Prenons comme exemple de la première transformation

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + x^2}}.$$

On a immédiatement

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + x^2}} = \int \frac{dx}{z - x} = \int \frac{2dz}{b + 2z} = \text{l.}\left(\frac{b}{2} + z\right) + \text{C},$$

donc

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + x^2}} = \text{l.}\left(\frac{b}{2} + x + \sqrt{a + bx + x^2}\right) + \text{C}.$$

En particulier, si $b = 0$, $a = \alpha^2$,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2 + x^2}} = \text{l.}\,(x + \sqrt{\alpha^2 + x^2}) + \text{C}.$$

De même, la seconde transformation donnerait

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx - x^2}} = -\int \frac{2dz}{1 + z^2} = -\,2 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{\beta - x}{x - a}} + \text{C}.$$

Mais cette intégrale s'obtient sous une forme plus commode si l'on écrit

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(a + \frac{b^2}{4}\right) - \left(x - \frac{b}{2}\right)^2}} = \arcsin \frac{2x - b}{\sqrt{b^2 + 4a}} + \text{C},$$

d'après la formule connue

$$\int \frac{dz}{\sqrt{\alpha^2 - z^2}} = \arcsin \frac{z}{\alpha} + \text{C}.$$

Cela suppose $b^2 + 4a > 0$. Si cette quantité était négative, $a + bx - x^2$ serait toujours négatif et il n'y aurait plus lieu de chercher une intégrale réelle.

Comme exemple de la troisième transformation, soit

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{ax - x^2}}, \quad m \text{ entier et } > 0.$$

On fera

$$\sqrt{ax - x^2} = xz, \quad \text{d'où} \quad \int \frac{x^m dx}{\sqrt{ax - x^2}} = -2a^m \int \frac{dz}{(1 + z^2)^{m+1}}.$$

On est ramené à l'intégrale traitée au n° **288**, et qui est connue. On remplacera ensuite z par sa valeur

$$z = \frac{\sqrt{ax - x^2}}{x}.$$

Exercices.

1. $$\int (x + \sqrt{1 + x^2})^n dx = \frac{(x + \sqrt{1 + x^2})^{n+1}}{2n + 2} + \frac{(x + \sqrt{1 + x^2})^{n-1}}{2n - 2} + C.$$

2. $$\int \frac{dx}{(1 + x)\sqrt{1 + x - x^2}} = -2 \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{1 + x - x^2} - (1 + x)}{x} + C.$$

3. $$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 - x^2}} = -\frac{1}{2x}(\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 - x^2}) + \frac{1}{2}\,\mathrm{l.}\,(x + \sqrt{1 + x^2}) + \operatorname{arc\,sin} x + C.$$

4. $$\int \frac{dx}{(\alpha + \beta x)\sqrt{a + bx^2}} = \begin{cases} -\dfrac{1}{k}\,\mathrm{l.}\,\dfrac{a\beta - b\alpha x + k\sqrt{a + bx^2}}{\alpha + \beta x} + C, & \text{si} \quad a\beta^2 + b\alpha^2 = k^2 > 0, \\ -\dfrac{1}{k} \operatorname{arc\,sin} \dfrac{a\beta - b\alpha x}{(\alpha + \beta x)\sqrt{-ab}} + C, & \text{si} \quad a\beta^2 + b\alpha^2 = -k^2 < 0, \\ \dfrac{1}{\alpha}\sqrt{\dfrac{\beta x - \alpha}{b(\beta x + \alpha)}} + C, & \text{si} \quad a\beta^2 + b\alpha^2 = 0. \end{cases}$$

298. Supposons que, dans la différentielle $f(x, y)\,dx$, x et y soient liés par une équation algébrique de degré n, $F(x, y) = 0$. Si l'on peut exprimer x et y rationnellement au moyen d'une même variable t,

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad dx = \varphi'(t)\,dt,$$

il est clair que cette substitution rendra rationnelle la différentielle proposée. Ainsi, l'équation

$$F(x, y) = y^3 + x^3 - 3axy = 0$$

fournirait pour y une valeur assez compliquée qui ne permettrait pas l'intégration de $f(x, y)\,dx$; mais si l'on fait $y = tx$, on en déduit

$$x = \frac{3\,at}{1 + t^2}, \quad y = \frac{3\,at^2}{1 + t^2},$$

et x, y sont des fonctions rationnelles de t.

La théorie générale de cette transformation est liée à celle des *courbes unicursales*. On appelle ainsi toute courbe dont les coordonnées x et y peuvent s'exprimer rationnellement en fonction d'une même variable t. Nous nous bornerons ici à établir que, *si la courbe algébrique* (A) *de degré* n, $F(x, y) = 0$, *admet* $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ *points doubles*, [en d'autres termes si le système $F = 0$, $F'_x = 0$, $F'_y = 0$ admet $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ solutions réelles ou imaginaires], *il sera possible d'exprimer* x *et* y *en fonctions rationnelles d'une variable* t.

Prenons une courbe

$$\text{(B)} \qquad 1 + ax + by + cx^2 + dxy + ey^2 + \cdots = 0$$

de degré $n-2$, renfermant dans son équation $\frac{1}{2}(n+1)(n-2)$ paramètres arbitraires a, b, c ... que nous pourrons déterminer en assujettissant la courbe (B) à passer par des points donnés (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., ce qui fournira les équations

$$(\alpha) \qquad \left\{ \begin{array}{l} 1 + ax_1 + by_1 + cx_1^2 + \cdots = 0, \\ 1 + ax_2 + by_2 + cx_2^2 + \cdots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

pour déterminer $a, b, c, \ldots$ Si le nombre des points donnés est seulement $\frac{1}{2}(n+1)(n-2) - 1$, il restera un coefficient arbitraire que nous appellerons t, et en vertu des équations (α) tous les autres s'exprimeront en fonction linéaire de celui-là, en sorte que les courbes (B) passant par les points donnés seront comprises dans l'équation $M + Nt = 0$, M et N étant des fonctions entières de degré $n-2$ en x et y. Cette équation représente donc, par la variation du paramètre t, un faisceau de courbes de l'ordre $n-2$ qui ont $\frac{1}{2}(n+1)(n-2) - 1$ points communs.

Choisissons pour les points fixes (x_1, y_1), (x_2, y_2), ... les $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ points doubles de la courbe (A), et comme on a

$$\tfrac{1}{2}(n+1)(n-2) - 1 = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) + (n-3),$$

il faudra y joindre $n-3$ autres points simples (x', y'), (x'', y''), ... de la

courbe (A) pour la détermination du faisceau $M + Nt = 0$. Mais, d'autre part, une courbe (A) de degré n et une courbe (B) de degré $n - 2$ ont $n(n-2)$ points d'intersection réels ou imaginaires, et comme ici chaque point double de (A) compte pour deux points simples, la courbe (A) est coupée par une courbe (B) du faisceau en

$$(n-1)(n-2) + n - 3 = n(n-2) - 1$$

points fixes; il reste donc un point d'intersection variable avec (B), c'est-à-dire avec le paramètre t. Cherchons à exprimer les coordonnées de ce point en fonction de t. Pour cela, éliminons y entre les équations $F(x, y) = 0$, $M + Nt = 0$; nous obtiendrons un résultat de la forme

$$x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \cdots = 0,$$

m étant égal à $n(n-2)$, et $p, q, \ldots$ étant, d'après les règles de l'élimination, des fonctions rationnelles de t. Or, cette équation doit admettre les racines doubles $x = x_1$, $x = x_2$, ... et les racines simples $x = x'$, $x = x''$, ...; son premier membre est donc divisible par le facteur

$$(x - x_1)^2 (x - x_2)^2 \ldots (x - x')(x - x'') \ldots,$$

qui est de degré $n(n-2) - 1$, et donne un quotient du premier degré

$$Kx + L = 0,$$

K, L étant toujours des fonctions rationnelles de t. On aura donc

$$x = -\frac{L}{K} = \varphi(t), \quad \text{et de même} \quad y = -\frac{L'}{K'} = \psi(t)$$

par exprimer les coordonnées d'un point quelconque de (A) en fonction rationnelle de t.

Une conique est toujours unicursale, car on a ici $n = 2$, $(n-1)(n-2) = 0$, la condition est vérifiée. L'application de la transformation, qui donnerait une autre solution du problème du n° **296**, se comprendra par le cas suivant.

Considérons une courbe du troisième ordre,

$$F(x, y) = S + Ax + By + Cx^2 + Dxy + Ey^2 + Fx^3 + \cdots + Iy^3 = 0.$$

Ici $n = 3$, $\frac{1}{2}(n-1)(n-2) = 1$, la courbe doit avoir un point double (comme le *folium* considéré plus haut) pour être unicursale. Admettons qu'il en soit ainsi, et que, pour plus de simplicité, on ait par un changement de coordonnées placé l'origine en ce point. L'équation $F = 0$ devant être vérifiée, ainsi que ses dérivées

$$F'_x = A + 2Cx + Dy + 3Fx^2 + 2Gxy + Hy^2 = 0$$
$$F'_y = B + Dx + 2Ey + Gx^2 + 2Hxy + 3Iy^2 = 0,$$

par les valeurs $x = 0$, $y = 0$, on aura nécessairement $S = 0$, $A = 0$, $B = 0$, l'équation (A) se réduira donc à la forme

$$Cx^2 + Dxy + Ey^2 + Fx^3 + Gx^2y + Hxy^2 + Iy^3 = 0,$$

et en coupant la courbe par un faisceau de droites passant par l'origine, ou en posant $y = tx$, on en déduira immédiatement

$$(C + Dt + Et^2)\, x^2 + (F + Gt + Ht^2 + It^3)\, x^3 = 0,$$

d'où

$$x = -\frac{C + Dt + Et^2}{F + Gt + Ht^2 + It^3}, \quad y = -\frac{Ct + Dt^2 + Et^3}{F + Gt + Ht^2 + It^3},$$

ce qui effectue la transformation désirée.

299. Parmi les expressions différentielles irrationnelles, les plus importantes à considérer sont celles qui renferment un radical de la forme $\sqrt{X}$, X étant un polynôme du 4me degré en x. Prenons d'abord l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}}, \quad X = A\,(x - a)\,(x - b)\,(x - c)\,(x - d),$$

les racines a, b, c, d étant réelles ou imaginaires, et proposons-nous de ramener le radical à ne plus renfermer que des termes de degré pair, par une substitution de la forme

$$x = \frac{p + qt}{1 + t}, \quad \text{d'où} \quad t = \frac{p - x}{x - q},$$

les constantes p et q étant réelles. Comme à chaque valeur de x qui annule X correspond une valeur de t jouissant de la même propriété, et que ces valeurs de t doivent être deux-à-deux égales et de signes contraires, on aura

$$\frac{p - a}{a - q} = -\frac{p - b}{b - q}, \quad \frac{p - c}{c - q} = -\frac{p - d}{d - q},$$

ou

$$(a + b)\,(p + q) - 2pq - 2ab = 0, \quad (c + d)\,(p + q) - 2pq - 2cd = 0,$$

ou encore, en posant $p + q = g$, $pq = h$,

$$(a + b)\, g = 2\,(ab + h), \quad (c + d)\, g = 2\,(cd + h).$$

Résolvant par rapport à g, h, on a, en supposant que $a + b - c - d$ soit différent de zéro,

$$g = \frac{2(ab - cd)}{a + b - c - d}, \quad h = \frac{ab(c + d) - cd(a + b)}{a + b - c - d}.$$

Mais p, q devant être réels, il faut que g, h le soient. Cette condition sera remplie, évidemment, si les racines a, b, c, d sont réelles. Si deux racines sont imaginaires, on les choisira pour a et b, et comme les expressions de g et de h ne renferment que la somme et le produit de ces racines conjuguées, g et h seront réels (**2**, 4°). Si les quatre racines sont imaginaires, a et b seront conjuguées, c et d de même, et le même raisonnement conduira à la même conclusion.

Mais il faut encore que p et q soient réels. Or, p et q sont les racines de l'équation en ζ

$$\zeta^2 - g\zeta + h = 0,$$

d'où la condition $g^2 - 4h > 0$. Remplaçant g et h par leurs valeurs, on a, en divisant par 4 et observant que le dénominateur $(a+b-c-d)^2$ est positif,

$$(ab - cd)^2 - [ab(c + d) - cd(a + b)](a + b - c - d) > 0.$$

On voit sans peine que le premier membre se réduirait à zéro pour $a = c$, $a = d$, $b = c$, $b = d$, il est donc divisible par les facteurs $a - c$, $a - d$, $b - c$, $b - d$, et comme le coefficient du terme $a^2 b^2$ est $+1$, l'inégalité se réduit simplement à

$$(a - c)(b - c)(a - d)(b - d) > 0.$$

Considérons encore les trois cas : 1° si les racines sont réelles, il suffit de les ranger dans l'ordre $a > b > c > d$, pour que la condition précédente soit remplie; 2° si l'on a deux racines imaginaires, soient

$$a = \alpha + \beta i, \quad b = \alpha - \beta i,$$

$(a - c)(b - c)$ sera le produit de deux imaginaires conjuguées et sera positif; de même $(a - d)(b - d)$; 3° si les quatre racines sont imaginaires,

$$a = \alpha + \beta i, \quad b = \alpha - \beta i, \quad c = \gamma + \delta i, \quad d = \gamma - \delta i,$$

on aura

$$(a-c)(b-d) = [\alpha - \gamma + (\beta - \delta)i][\alpha - \gamma - (\beta - \delta)i] = (\alpha - \gamma)^2 + (\beta - \delta)^2 > 0$$

et de même

$$(a-d)(b-c)=(\alpha-\gamma)^2+(\beta+\delta)^2>0,$$

donc l'inégalité sera encore vérifiée. La substitution est donc toujours possible, et en l'effectuant, on aura un résultat de la forme

$$\frac{dx}{\sqrt{X}}=\frac{(q-p)\,dt}{\sqrt{(a'+b't^2)(a''+b''t^2)}},$$

a', b', a'', b'', étant réels. Des transformations ultérieures ramènent la fonction sous le radical à la forme $(1-t^2)(1-k^2t^2)$, et l'intégrale à la forme classique des *intégrales* dites *elliptiques*, qui ne peuvent s'exprimer au moyen des fonctions élémentaires. Mais la théorie des *fonctions elliptiques*, qui sont les inverses de ces intégrales, fournit des méthodes plus commodes pour la solution de ce problème, et nous ne nous y arrêterons pas.

L'hypothèse $a+b-c-d=0$ que nous avons écartée, rend impossible la transformation précédente, mais on peut alors poser

$$x=t+\frac{a+b}{2}=t+\frac{c+d}{2},$$

et l'on trouve

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=\left[t^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right]\left[t^2-\left(\frac{c-d}{2}\right)^2\right],$$

ce qui réalise immédiatement la transformation désirée.

300. Une différentielle $f(x,\sqrt{X})\,dx$, f désignant une fonction rationnelle de x et $\sqrt{X}$, étant donnée, on ramènera évidemment la fonction f, les puissances paires de $\sqrt{X}$ étant rationnelles, à la forme.

$$f(x,\sqrt{X})=\frac{G+H\sqrt{X}}{G'+H'\sqrt{X}},$$

G et H étant rationnels et entiers en x. On aura donc

$$f(x,\sqrt{X})=\frac{(G+H\sqrt{X})(G'-H'\sqrt{X})}{G'^2-H'^2X}=M+N\sqrt{X}=M+\frac{NX}{\sqrt{X}},$$

M et N étant aussi rationnels. L'intégrale $\int M\,dx$ s'obtiendra sans difficulté, la fonction rationnelle NX se décomposera en une fonction entière et une somme de fractions simples par la méthode exposée au chapitre précédent. On sera donc, en définitive, ramené à intégrer des expression de la forme

$$\frac{dx}{\sqrt{X}},\quad \frac{x^m dx}{\sqrt{X}},\quad \frac{dx}{(x-\alpha)^p\sqrt{X}},$$

m, p, étant entiers, et par des réductions successives, on ramène tous les cas à $m = 2$, $p = 1$.

301. *Différentielles binômes.* — On donne ce nom aux expressions de la forme

$$x^m (a + bx^n)^p \, dx \tag{1}$$

m, n, p étant des nombres entiers ou fractionnaires de signes quelconques. Si m, n, p étaient entiers, on retomberait sur une expression rationnelle. Ce cas étant écarté, on peut toujours poser

$$x^n = z, \quad \text{d'où} \quad x = z^{\frac{1}{n}}, \quad dx = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1} dz,$$

et

$$x^m (a + bx^n)^p \, dx = \frac{1}{n} z^{\frac{m+1}{n}-1} (a + bz)^p \, dz.$$

On posera

$$\frac{m+1}{n} = q + 1,$$

et l'on voit que l'intégrale d'une différentielle binôme pourra toujours être ramenée à la forme

$$\int x^q (a + bx)^p \, dx = \mathrm{B}_{p,q}. \tag{2}$$

On peut l'écrire aussi

$$\int x^{p+q} \left(\frac{a + bx}{x}\right)^p dx.$$

Donc, si p est entier, ou q, ou $p + q$, on rentrera dans un des cas d'irrationnalité étudiés au n° **295** et l'intégration s'effectuera par substitution. On en conclut que la différentielle binôme $x^m (a + bx^n)^p \, dx$ s'intègre si l'un des nombres

$$p, \quad \frac{m+1}{n}, \quad \frac{m + np + 1}{n}$$

est entier ou nul, quel que soit son signe.

Exemples :

$$\int \frac{x\,dx}{(a + bx)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{b^2} \frac{2a + bx}{\sqrt{a + bx}} + \mathrm{C}, \quad \int \frac{x^2\,dx}{(a + bx^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{x^3}{3a (a + bx^2)^{\frac{3}{2}}} + \mathrm{C}.$$

$$\int x^3\,dx\,(a+x^2)^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{14}(a+x^2)^{\frac{4}{3}}\left(x^2 - \frac{3a}{4}\right) + C.$$

$$\int \frac{(1+x^2)^{\frac{3}{5}}}{x^3}\,dx = -\frac{z^3}{2(z^5-1)} + \frac{3}{2}\int\frac{z^2\,dz}{z^5-1}, \qquad z = (1+x^2)^{\frac{3}{5}}.$$

302. Appliquons maintenant la méthode des réductions successives, en prenant pour exemple l'intégrale suivante, qui rentre dans les intégrales binômes :

$$\int\frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad m \text{ entier}.$$

En observant que

$$\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -d.\sqrt{1-x^2},$$

on a, par l'intégration par partie,

$$\int\frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = -x^{m-1}\sqrt{1-x^2} + (m-1)\int x^{m-2}\,dx\sqrt{1-x^2}$$

$$= -x^{m-1}\sqrt{1-x^2} + (m-1)\int\frac{x^{m-2}\,dx\,(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Décomposant cette dernière intégrale, on y retrouve la proposée que l'on fait passer dans le premier membre, et en divisant par m on a

$$(3) \qquad \int\frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{m-1}\sqrt{1-x^2}}{m} + \frac{m-1}{m}\int\frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Cette *formule de réduction* permet d'abaisser de deux, quatre,... unités l'exposant de x, et si m est positif et pair, on sera ramené à l'intégrale

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + C.$$

Si m est impair, on arrivera à

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + C.$$

Si m était entier et négatif, il faudrait disposer la formule (3) de

manière à élever l'exposant de x de deux unités. Pour cela, résolvons l'équation par rapport à l'intégrale du second membre et changeons m en $-m+2$, il viendra

$$(4)\qquad \int\frac{dx}{x^m\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{(m-1)\,x^{m-1}}+\frac{m-2}{m-1}\int\frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{1-x^2}}.$$

Au moyen de cette formule, on abaissera d'autant de fois deux unités qu'on le voudra l'exposant de x au dénominateur, et l'on sera ramené

1° Si m est pair, à

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C;$$

2° Si m est impair, à l'intégrale

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}},$$

à laquelle la formule (4) ne s'applique plus et que nous chercherons directement par la troisième transformation (**296**). Nous aurons

$$\sqrt{1-x^2}=1-xz,$$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{dz}{z}=\text{l. }z=\text{l. }\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right)+C.$$

303. Appliquons la même méthode aux différentielles binômes, ramenées à la forme (2). L'équation

$$\int x^q\,(a+bx)^p\,dx=\int x^q\,(a+bx)\,(a+bx)^{p-1}\,dx$$

donne immédiatement, par décomposition, la relation

$$(5)\qquad B_{p,q}=aB_{p-1,q}+bB_{p-1,q+1}.$$

D'autre part l'intégration par partie donne

$$\int x^q\,(a+bx)^p\,dx=\frac{x^{q+1}\,(a+bx)^p}{q+1}-\frac{bp}{q+1}\int x^{q+1}\,(a+bx)^{p-1}\,dx,$$

d'où la relation

$$(6)\qquad (q+1)\,B_{p,q}=x^{q+1}\,(a+bx)^p-bp\,B_{p-1,q+1}.$$

Entre les relations (5) et (6), on peut éliminer, soit $B_{p-1,q+1}$, soit $B_{p,q}$, et l'on trouve ainsi les deux équations

$$(7)\qquad \begin{aligned}(p+q+1)\,B_{p,q}&=x^{q+1}\,(a+bx)^p+ap\,B_{p-1,q},\\ b\,(p+q+1)\,B_{p-1,q+1}&=x^{q+1}\,(a+bx)^p-a\,(q+1)\,B_{p-1,q},\end{aligned}$$

dont la seconde devient, en remplaçant p par $p+1$ et q par $q-1$.

(8) $$b(p+q+1)\,B_{p,q} = x^q(a+bx)^{p+1} - aq\,B_{p,q-1}.$$

Chacune des formules (7) et (8) établit donc une relation entre deux intégrales $B_{p,q}$ dans lesquelles l'indice p ou l'indice q diffère d'une unité.

Elles permettront donc d'augmenter ou de diminuer d'autant d'unités qu'on le voudra, suivant son signe, chacun des indices p et q, et par suite de le ramener à une valeur absolue inférieure à l'unité.

Exercices.

1. $$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x^{m-1}\sqrt{1-x^2}}{m} - \frac{m-1}{m}\int \frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

2. $$\int \frac{x^{2n}dx}{(1-x^2)^{\frac{2n+1}{2}}} = \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(1-x^2)^{\frac{2n-1}{2}}} - \frac{x^{2n-3}}{(2n-3)(1-x^2)^{\frac{2n-3}{2}}}$$
$$+ \frac{x^{2n-5}}{(2n-5)(1-x^2)^{\frac{2n-5}{2}}} - \dots \pm \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} \pm \text{arc sin}\, x + C.$$

CHAPITRE XXXI.

INTÉGRATION DES EXPRESSIONS RENFERMANT DES FONCTIONS EXPONENTIELLES OU CIRCULAIRES.

304. Dans un grand nombre de cas, le changement de variable ramène à une expression algébrique. Si $f(z)$ est une fonction algébrique de z, les différentielles de la forme

$$f(e^x)\,e^x dx, \quad f(\text{tg}\,x)\frac{dx}{\cos^2 x}, \quad f(\text{arc sin}\,x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \dots$$

prendront la forme $f(z)\,dz$ par les substitutions respectives

$$e^x = z, \quad \text{tg}\,x = z, \quad \text{arc sin}\,x = z, \quad \dots,$$

et l'intégration se fera sans peine si $f(z)$ est rationnel en z. Ainsi, en posant $e^{ax} = z$, on trouve

$$\int \frac{dx}{e^{ax}+e^{-ax}} = \int \frac{e^{ax}dx}{1+e^{2ax}} = \frac{1}{a}\int \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{a}\,\text{arc tg}\,(e^{ax}) + C.$$

Les fonctions l. x, arc sin x, arc tg x, ... ont des différentielles algébriques. Cette remarque permet de rendre algébriques les différentielles de la forme

$$f(e^x)\,dx, \quad f(\sin x)\,dx, \quad f(\sin x, \cos x)\,dx, \quad f(\operatorname{tg} x)\,dx,$$

f désignant d'ailleurs une fonction algébrique.

En effet, posant $e^x = z$, on a $x = \text{l}.\,z$, $dx = dz : z$, donc

$$\int f(e^x)\,dx = \int f(z)\frac{dz}{z},$$

et de même pour les suivantes.

Les expressions de la forme

$$f(\sin x, \cos^2 x)\cos x dx, \quad f(\sin^2 x, \cos x)\sin x dx,$$

où f désigne une fonction rationnelle, sont immédiatement réductibles à des différentielles rationnelles en z. Posant en effet, dans la première, $\sin x = z$, on a

$$f(\sin x, \cos^2 x)\cos x dx = f(z, 1 - z^2)\,dz;$$

de même, on fera $\cos x = z$ dans la seconde.

Ainsi l'on aura ($\cos x = z$)

$$\frac{dx}{\sin x(a + b\cos x)} = \frac{\sin x dx}{\sin^2 x(a + b\cos x)} = -\frac{dz}{(1 - z^2)(a + bz)}$$
$$= \frac{b^2 dz}{(a^2 - b^2)(a + bz)} - \frac{dz}{2(a + b)(1 - z)} - \frac{dz}{2(a - b)(1 + z)}$$

par la décomposition en fractions simples.

Intégrant et remplaçant z par $\cos x$, on trouve

$$\int\frac{dx}{\sin x(a + b\cos x)} = \frac{b}{a^2 - b^2}\,\text{l}.(a + b\cos x) + \frac{\text{l}.(1 - \cos x)}{2(a + b)} - \frac{\text{l}.(1 + \cos x)}{2(a - b)} + \text{C}.$$

Les différentielles de la forme $f(\sin x, \cos x)\,dx$, dans la même hypothèse, sont aussi rendues rationnelles par la transformation

$$z = \operatorname{tg}\frac{1}{2}x, \quad \text{d'où} \quad \sin x = \frac{2z}{1 + z^2}, \quad \cos x = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}, \quad dx = \frac{2dz}{1 + z^2}.$$

Ainsi l'on a

$$\int\frac{dx}{a + b\cos x} = \int\frac{2dz}{(a + b) + (a - b)z^2}.$$

On peut toujours faire que $a+b$ soit positif; $a-b$ sera positif ou négatif, donc

$$a+b=\alpha^2, \quad a-b=\pm\beta^2,$$

et d'après les formules connues

$$\int\frac{dz}{\alpha^2+\beta^2z^2}=\frac{1}{\alpha\beta}\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta z}{\alpha}, \quad \int\frac{dz}{\alpha^2-\beta^2z^2}=\frac{1}{2\alpha\beta}\,\mathrm{l.}\frac{\alpha+\beta z}{\alpha-\beta z},$$

il viendra, pour $a-b>0$,

$$\int\frac{dx}{a+b\cos x}=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}x\right)+C;$$

pour $a-b<0$,

$$\int\frac{dx}{a+b\cos x}=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\,\mathrm{l.}\frac{\sqrt{b+a}\cos\frac{1}{2}x+\sqrt{b-a}\sin\frac{1}{2}x}{\sqrt{b+a}\cos\frac{1}{2}x-\sqrt{b-a}\sin\frac{1}{2}x}+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\,\mathrm{l.}\frac{b+a\cos x+\sqrt{b^2-a^2}\sin x}{a+b\cos x}+C.$$

305. L'intégration par partie s'emploie utilement pour l'évaluation ou la réduction des intégrales des fonctions transcendantes. En général, soient u, v deux fonctions de x, n un nombre entier positif, et posons

$$v_1=\int v\,dx.$$

De la formule

$$(1) \qquad \int u^n v\,dx=u^n v_1-n\int u^{n-1}v_1\,du$$

on déduira, si u et v vérifient la condition

$$v_1\,du=gv\,dx,$$

où g désigne une constante, la formule de réduction

$$(2) \qquad \int u^n v\,dx=u^n v_1-ng\int u^{n-1}v\,dx,$$

qui donnera immédiatement pour la valeur de l'intégrale proposée

$$\int u^n v\,dx=v_1[u^n-ngu^{n-1}+n(n-1)g^2u^{n-2}-\cdots\pm n(n-1)\cdots 1\,g^n]+C.$$

Si l'on prend $u=x$, $v=e^{ax}$, on aura

$$v_1=\frac{1}{a}e^{ax}, \quad g=\frac{1}{a},$$

$$\int x^n e^{ax}dx=\frac{e^{ax}}{a}\left[x^n-\frac{n}{a}x^{n-1}+\frac{n(n-1)}{a^2}x^{n-2}-\cdots\pm\frac{n(n-1)\cdots 1}{a^n}\right]+C.$$

Reprenons l'équation (1), et supposons que l'on ait

$$\int v_1\, du = v_2, \quad v_2\, du = gv\, dx;$$

en intégrant une seconde fois par partie, on trouvera

$$(3) \qquad \int u^n v\, dx = u^n v_1 - nu^{n-1} v_2 + n(n-1)\, g \int u^{n-2} v\, dx,$$

formule de réduction qui abaissera de deux unités à la fois l'exposant de u. Soit, comme exemple, $u = x$, $v = \cos x$; on aura

$$v_1 = \sin x, \quad v_2 = -\cos x, \quad v_2\, du = -v\, dx,$$

donc, g étant ici égal à -1,

$$\int x^n \cos x\, dx = x^n \sin x + nx^{n-1} \cos x - n(n-1) \int x^{n-2} \cos x\, dx.$$

On sera ramené, suivant que n est pair ou impair, à

$$\int \cos x\, dx = \sin x, \quad \int x \cos x\, dx = x \sin x + \cos x.$$

La même formule (3) s'applique à $\int x^n \sin x\, dx$.

306. Si l'exposant n était négatif, il faudrait diriger autrement l'intégration par partie, sans quoi l'on augmenterait sa valeur absolue au lieu de la diminuer. Ainsi l'on a

$$\int \frac{e^{ax}\, dx}{x^n} = -\frac{e^{ax}}{(n-1)\, x^{n-1}} + \frac{a}{n-1} \int \frac{e^{ax}\, dx}{x^{n-1}},$$

et si n est entier, l'application répétée de cette formule conduira à

$$\int \frac{e^{ax}\, dx}{x},$$

qui n'est pas susceptible d'une réduction ultérieure et constitue une nouvelle fonction transcendante.

L'intégration par partie peut, dans certains cas, ramener à l'intégrale même que l'on cherche, et qui se trouve alors déterminée avec d'autres par un système d'équations du premier degré. Ainsi, en intégrant par partie, on trouve

$$\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a} \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx\, dx,$$

et en opérant de même

$$\int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a} \sin bx - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx\, dx.$$

Résolvons ces deux équations par rapport aux intégrales qu'elles renferment; il viendra

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} \int e^{ax}\cos bx\,dx &= \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2} + \mathrm{C}, \\ \int e^{ax}\sin bx\,dx &= \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + \mathrm{C}. \end{aligned}\right.$$

On peut remarquer que ces équations se déduisent immédiatement de la règle (**275**) pour différentier e^z, z étant imaginaire. En effet, soit $z=(a+bi)x$; cette règle donne

$$d.\,e^{(a+bi)x} = (a+bi)\,e^{(a+bi)x}\,dx,$$

d'où

$$\int e^{(a+bi)x}\,dx = \frac{e^{(a+bi)x}}{a+bi} = \frac{e^{(a+bi)x}(a-bi)}{a^2+b^2} + \mathrm{C}.$$

Remplaçant $e^{(a+bi)x}$ par sa valeur

$$e^{ax}(\cos bx + i\sin bx)$$

et séparant le réel de l'imaginaire, on trouve les équations (4).

307. On rencontre souvent des différentielles de la forme $\sin^m x \cos^n x dx$, m, n étant entiers, mais positifs ou négatifs. Il est facile de les ramener à des différentielles algébriques par substitution; on peut aussi exprimer $\sin^m x \cos^n x$ par une somme de sinus ou de cosinus des multiples de x, mais le moyen le plus simple est de réduire les exposants m et n par des formules semblables à celles que nous avons données pour les différentielles binômes. Posons

$$\mathrm{P}_{m,n} = \int \sin^m x\cos^n x\,dx;$$

nous aurons

$$\int \sin^m x\cos^n x\,dx = \int \sin^m x\cos^{n-2} x\,(1-\sin^2 x)\,dx,$$

d'ou

$$(5)\qquad \mathrm{P}_{m,n} = \mathrm{P}_{m,n-2} - \mathrm{P}_{m+2,n-2}.$$

D'autre part, l'intégration par partie donne

$$\mathrm{P}_{m,n} = \int \sin^m x\cos^{n-1} x\,d.\sin x = \frac{\sin^{m+1} x\cos^{n-1} x}{m+1}$$

$$+\frac{n-1}{m+1}\int \sin^{m+2} x\cos^{n-2} x\,dx,$$

ou bien

(6) $$(m+1)\,P_{m,n} = \sin^{m+1} x \cos^{n-1} x + (n-1)\,P_{m+2,n-2}.$$

Entre les équations (5) et (6), on peut éliminer $P_{m+2,n-2}$ ou $P_{m,n}$, et l'on a

(7) $$(m+n)\,P_{m,n} = \sin^{m+1} x \cos^{n-1} x + (n-1)\,P_{m,n-2},$$
$$(m+n)\,P_{m+2,n-2} = -\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x + (m+1)\,P_{m,n-2},$$

dont la seconde devient, par le changement de m en $m-2$ et de n en $n+2$,

(8) $$(m+n)\,P_{m,n} = -\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x + (m-1)\,P_{m-2,n}.$$

Les formules (7) et (8) établissent des relations entre deux fonctions $P_{m,n}$ dans lesquelles les indices m ou les indices n diffèrent de deux unités. Elles serviront donc à ramener la fonction $P_{m,n}$ à une autre dans laquelle l'indice m et l'indice n seront diminués, ou augmentés s'ils sont négatifs, d'autant de fois deux unités que l'on voudra. On pourra donc toujours ramener ces deux indices à l'une des valeurs 0, 1, — 1. Or, on a

$$P_{0,0} = \int dx = x + C, \quad P_{1,0} = \int \sin x dx = -\cos x + C,$$

$$P_{0,1} = \int \cos x dx = \sin x + C, \quad P_{1,1} = \int \sin x \cos x dx = \frac{\sin^2 x}{2} + C,$$

$$P_{1,-1} = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = -\text{l.}\cos x + C, \quad P_{-1,1} = \int \frac{\cos x dx}{\sin x} = \text{l.}\sin x + C,$$

$$P_{-1,-1} = \int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \text{l.}\operatorname{tg} x + C, \quad P_{-1,0} = \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2 \sin \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x}$$
$$= \text{l.}\operatorname{tg}.\frac{x}{2} + C,$$

$$P_{0,-1} = \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = \text{l.}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C.$$

Remarquons encore 1° que l'on a

$$P_{m,1} = \int \sin^m x \cos x \, dx = \frac{\sin^{m+1} x}{m+1} + C,$$

$$P_{1,n} = \int \sin x \cos^n x \, dx = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1} + C;$$

2° que la formule (6) donne pour $n = -m$,

$$(m+1)\int \operatorname{tg}^m x\,dx = \operatorname{tg}^{m+1} x - (m+1)\int \operatorname{tg}^{m+2} x\,dx,$$

d'où, changeant m en $m-2$, on tire

$$(m-1)\int \operatorname{tg}^m x\,dx = \operatorname{tg}^{m-1} x - (m-1)\int \operatorname{tg}^{m-2} x\,dx.$$

Exercices.

1. $$\int dx\sqrt{1+e^{ax}} = \frac{2\sqrt{1+e^{ax}}}{a} + \frac{1}{a}\,\mathrm{l.}\,\frac{\sqrt{1+e^{ax}}+1}{\sqrt{1+e^{ax}}-1} + \mathrm{C}.$$

2. $$\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{-(a^2+b^2)+2ab\cos x + c^2\sin^2 x}} = \frac{1}{c}\,\text{arc sin}\,\frac{ab-c^2\cos x}{\sqrt{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}} + \mathrm{C}.$$

3. $$\int \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = \frac{1}{ab}\,\text{arc tg}\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg} x\right) + \mathrm{C}.$$

4. $$\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}\,dx = \mathrm{l.}\,(2+\cos x) + \frac{4}{\sqrt{3}}\,\text{arc tg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + \mathrm{C}.$$

5. $$\int \frac{1-r\cos x}{1-2r\cos x + r^2}\,dx = \frac{x}{2} + \text{arc tg}\left(\frac{1+r}{1-r}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + \mathrm{C}.$$

6. $$\int \frac{dx}{a+b\cos x + c\sin x} = \int \frac{dx}{a + r\cos(x-\alpha)}\ \textbf{(304)},\ b = r\cos\alpha,\ c = r\sin\alpha.$$

7. $$\int \frac{(a-b\cos x)\,dx}{\sin x\sqrt{-(a^2+b^2)+2ab\cos x + c^2\sin^2 x}} = \text{arc sin}\,\frac{b-a\cos x}{\sqrt{c^2-a^2}\,\sin x} + \mathrm{C}.$$

$c^2 - a^2 > 0$. On mettra la quantité sous le radical sous la forme $(c^2-a^2)\sin^2 x - (b-a\cos x)^2$.

8. $$\int [\mathrm{l.}\,(x+\sqrt{1+x^2})]^n\,dx = [\mathrm{l.}\,(x+\sqrt{1+x^2})]^{n-1}[x\,\mathrm{l.}\,(x+\sqrt{1+x^2}) - n\sqrt{1+x^2}] + n(n-1)\int [\mathrm{l.}\,(x+\sqrt{1+x^2})]^{n-2}\,da.$$

9. $$\int x^2\cos^3 x\,dx = \frac{1}{12}\left(x^2 - \frac{2}{9}\right)\sin 3x + \frac{x\cos 3x}{18} + \frac{3}{4}(x^2-2)\sin x + \frac{3}{2}x\cos x + \mathrm{C}.$$

10. $$\int e^{ax}\cos^2 x\,dx = \frac{e^{ax}}{a(a^2+4)}(a^2\cos^2 x + 2a\sin x\cos x + 2) + \mathrm{C}.$$

11. $$\int e^{ax}\sin^2 x\,dx = \frac{e^{ax}}{a(a^2+4)}(a^2\sin^2 x - 2a\sin x\cos x + 2) + \mathrm{C}.$$

12. $$\int e^{ax}\sin x\cos x\,dx = \frac{e^{ax}(a\sin 2x - 2\cos 2x)}{2(a^2+4)} + \mathrm{C}.$$

13. $\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x} = -x \cot x + \mathrm{l.}\sin x + C.$

14. $\int \sin^5 x\,dx = -\frac{\cos x}{5}\left(\sin^4 x + \frac{4}{3}\sin^2 x + \frac{2.4}{1.3}\right) + C.$

15. $\int \frac{\sin^4 x\,dx}{\cos x} = -\frac{\sin^2 x}{3} - \sin x + \mathrm{l.}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C$

16. $\int \frac{dx}{\sin^4 x} = \frac{\cos x}{3\sin^3 x}(1 + 2\sin^2 x) + C.$

17. $\int \mathrm{tg}^7 x\,dx = \frac{\mathrm{tg}^6 x}{6} - \frac{\mathrm{tg}^4 x}{4} + \frac{\mathrm{tg}^2 x}{2} - \mathrm{l.}\cos x + C.$

18. $\int \frac{dx}{\sin^7 x \cos x} = -\left(\frac{1}{6\sin^6 x} + \frac{1}{4\sin^4 x} + \frac{1}{2\sin^2 x}\right) + \mathrm{l.}\,\mathrm{tg}\,x + C.$

19 $\int \sin 2\theta\ \mathrm{l.}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = \cos^2\frac{\theta}{2}\left[\left(1 + \sin^2\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{l.}\cos^2\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} - 2\right] + C.$

CHAPITRE XXXII.

INTÉGRALES DÉFINIES.

§ 1. — PRINCIPES GÉNÉRAUX.

308. Soit $f(x)$ une fonction de x, continue dans l'intervalle fini (a, b), $> a$. Partageons cet intervalle en un nombre quelconque n de parties par des valeurs de x interposées $x_1 = a, x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1} = b$, et soient $\delta_i = x_{i+1} - x_i$ l'un quelconque de ces intervalles partiels qui sont tous positifs, ξ_i une valeur arbitraire de x prise dans l'intervalle δ_i; concevons que l'on fasse la somme

$$(\alpha) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} f(\xi_i)\,\delta_i = f(\xi_1)\,\delta_1 + f(\xi_2)\,\delta_2 + \cdots + f(\xi_n)\,\delta_n,$$

et désignons par Δ l'oscillation de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle (a, b), par X une valeur arbitraire de x dans cet intervalle, en sorte que les

différences $f(\xi_1) - f(\mathrm{X})$, $f(\xi_2) - f(\mathrm{X})$, ..., $f(\xi_n) - f(\mathrm{X})$ seront toutes, en valeur absolue, égales au plus à Δ ; on aura donc

$$\mathrm{M}\Sigma\,[f(\xi_i) - f(\mathrm{X})]\,\delta_i \leqslant \Delta\Sigma\delta_i, \quad \Sigma\delta_i = b - a,$$

d'où

$$(\beta) \qquad \mathrm{M}\,[\Sigma f(\xi_i)\,\delta_i - (b-a)\,f(\mathrm{X})] \leqslant (b-a)\,\Delta.$$

Cela posé, admettons que les intervalles δ_i soient pris assez petits pour que, dans chacun d'eux, l'oscillation de la fonction soit moindre qu'une quantité arbitrairement petite donnée σ, ce qui est possible (**70**) vu la continuité de $f(x)$. Subdivisons chacun des intervalles δ_i en un nombre quelconque d'autres plus petits δ'_k par l'intercalation de nouvelles valeurs de x, et désignons par $\Sigma f(\xi'_k)\,\delta'_k$ la somme, analogue à (α), étendue à tous ces nouveaux intervalles dans lesquels on a divisé l'intervalle (a, b). Chacun des termes $f(\xi_i)\,\delta_i$ de la somme primitive (α) se trouvera donc remplacé par une somme $\Sigma_i f(\xi'_k)\,\delta'_k$ de termes correspondant aux intervalles δ'_k compris dans l'intervalle δ_i, et cette somme, en vertu de l'équation (β), différera de $f(\xi_i)\,\delta_i$, en valeur absolue, d'une quantité moindre que $\delta_i\sigma$, en sorte qu'on aura

$$\mathrm{M}\,[\Sigma_1 f(\xi'_k)\,\delta'_k - f(\xi_1)\,\delta_1] < \delta_1\sigma, \quad \mathrm{M}\,[\Sigma_2 f(\xi'_k)\,\delta'_k - f(\xi_2)\,\delta_2] < \delta_2\sigma, \ldots$$

et par conséquent, en ajoutant membre à membre et observant que la valeur absolue d'une somme de quantités est au plus égale à la somme des valeurs absolues de ces quantités,

$$(\gamma) \qquad \mathrm{M}\,[\Sigma f(\xi'_k)\,\delta'_k - \Sigma f(\xi_i)\,\delta_i] < (b-a)\,\sigma.$$

Donc, si l'on compare les sommes $\Sigma f(\xi_i)\,\delta_i$, $\Sigma f(\xi'_k)\,\delta'_k$ qui se rapportent à deux modes de division de l'intervalle (a, b), tels que le second résulte de la subdivision des parties δ_i du premier mode en parties plus petites δ'_k, leur différence absolue sera moindre que le produit de l'intervalle $b - a$ par σ. Et puisque σ peut être pris moindre que toute grandeur donnée, la différence absolue

$$\Sigma f(\xi'_k)\,\delta'_k - \Sigma f(\xi_i)\,\delta_i$$

finira par rester toujours moindre que toute grandeur donnée quand les divisions δ_i décroîtront indéfiniment, donc (**18**) la somme $\Sigma f(\xi_i)\,\delta_i$ tendra vers une limite finie et déterminée, *indépendante de la manière dont on choisit les valeurs* ξ_i, lorsque les intervalles δ_i tendront vers zéro par des subdivisions successives. Appelons S cette limite.

Il reste à prouver que cette limite S est la même, quel que soit le mode de division de l'intervalle $b - a$ en intervalles indéfiniment décroissants. Soit $\Sigma f(\xi'_i)\,\delta'_i$ la somme qui se rapporte à un autre mode *quelconque* de division de l'intervalle, et S' sa limite quand les δ'_i tendent vers zéro. Admettons d'ailleurs que les intervalles δ_i et δ'_i soient déjà assez petits pour que l'oscillation de $f(x)$ y soit moindre qu'une fraction σ. Considérons un troisième mode de division de l'intervalle (a, b) formé par la *superposition* des deux premiers, c'est-à-dire par l'intercalation de toutes les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et $x'_1, x'_2, \ldots, x'_m$ de la variable x qui appartiennent aux deux groupes. Soit $\Sigma f(\xi''_i)\,\delta''_i$ la somme correspondant à ce troisième mode de division. Comme il peut être regardé, relativement au premier mode, comme résultant de la subdivision des δ_i en intervalles plus petits, on aura par l'équation (γ)

$$\text{VA}\,[\Sigma f(\xi''_i)\,\delta''_i - \Sigma f(\xi_i)\,\delta_i] < (b-a)\,\sigma,$$

et pour la même raison,

$$\text{VA}\,[\Sigma f(\xi''_i)\,\delta''_i - \Sigma f(\xi'_i)\,\delta'_i] < (b-a)\,\sigma,$$

d'où il suit évidemment que l'on a

$$\text{VA}\,[\Sigma f(\xi'_i)\,\delta'_i - \Sigma f(\xi_i)\,\delta_i] < 2\,(b-a)\,\sigma.$$

Ainsi la différence des sommes $\Sigma f(\xi_i)\,\delta_i$ qui répondent à deux modes de division arbitraires décroît indéfiniment en même temps que les éléments δ_i de ces divisions, et l'on a $S' = S$.

Nous pouvons donc conclure que *la somme* (α) *désignée par* $\Sigma f(\xi_i)\,\delta_i$ *tend vers une limite déterminée et finie lorsque les parties* δ_i *dans lesquelles on a divisé l'intervalle* (a, b) *tendent vers zéro suivant une loi complètement arbitraire.*

Cette limite est l'*intégrale définie* de $f(x)\,dx$ *prise entre les limites* a *et* b; on la désigne par la notation

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \Sigma f(\xi_i)\,\delta_i, \tag{1}$$

à cause de sa relation intime avec la fonction qui a pour dérivée $f(x)$, comme on le verra plus loin.

La valeur ξ_i de x étant choisie à volonté dans l'intervalle $x_{i+1} - x_i$, on prend d'habitude $\xi_i = x_i$, et l'on a par suite

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \sum_{i=1}^{i=n} f(x_i)\,\delta_i.$$

309. *Remarques.* — 1° On a supposé $f(x)$ continu dans l'intervalle (a, b), mais la somme (α) tendrait toujours vers une limite fixe et l'intégrale définie ne cesserait pas de subsister, si cette fonction devenait discontinue (**63**) pour un certain nombre de valeurs de x appartenant à l'intervalle (a, b), pourvu qu'elle reste toujours moindre (en valeur absolue) qu'un nombre fixe M. En effet, considérons encore les valeurs de $\Sigma f(\xi_i)\,\delta_i$, $\Sigma f(\xi'_k)\,\delta'_k$ qui se rapportent à deux modes de divivion de l'intervalle (a, b), le second résultant de la subdivision des éléments δ_i du premier ; nous prouverons comme au N° **308** que la différence absolue de ces deux sommes sera moindre que $(b - a)\,\sigma$ pour l'ensemble des intervalles δ_i dans lesquels l'oscillation de la fonction sera moindre que σ, et l'on verra facilement, d'autre part, qu'elle est inférieure à $2M\varepsilon$ pour l'ensemble des éléments δ_i dans lesquels l'oscillation surpasse σ, ε désignant la somme des intervalles δ_i dans lesquels la fonction $f(x)$ devient discontinue. Comme σ et ε décroissent indéfiniment quand les δ_i tendent vers la limite zéro, les valeurs successives de $\Sigma f(\xi_i)\,\delta_i$ tendront vers une limite fixe.

Il résulte évidemment de là que la deuxième partie de la démonstration ci-dessus, établissant que la limite est indépendante du mode de division de l'intervalle (a, b), s'étend aussi au cas actuel.

Ces conclusions peuvent encore être généralisées (1), mais nous nous bornerons aux cas considérés ici, où la fonction $f(x)$ est continue dans l'intervalle (a, b), ou ne devient discontinue que pour un nombre limité de valeurs de x, sans que sa valeur absolue puisse surpasser un nombre fixe, et nous dirons alors que la fonction $f(x)$ est *intégrable dans l'intervalle* (a, b).

2° Il résulte évidemment de la remarque précédente que *l'intégrale*

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

ne cesse pas d'exister et ne change pas de valeur, si l'on change arbitrairement la valeur de $f(x)$ *pour un nombre limité de valeurs de* x, *quelque grand qu'il soit d'ailleurs;* parce que la somme des intervalles δ_i qui renferment ces valeurs de x décroissant indéfiniment, les termes correspondants de $\Sigma f(\xi_i)\,\delta_i$ sont sans influence sur la limite S.

---

(1) V. la note I à la fin du volume.

Par exemple, si $f(x)$ passait brusquement d'une valeur à une autre pour $x = a$ ou pour $x = b$, l'intégrale ci-dessus ne serait pas altérée si l'on remplaçait $f(a)$ par $f(a+0)$ ou $f(b)$ par $f(b-0)$, etc...

3° Nous avons supposé, pour la démonstration, $b > a$, mais le raisonnement se ferait de la même manière si l'on avait $a > b$ et toutes les différences $x_{i+1} - x_i = \delta_i$ négatives. Il suffit d'observer que l'on a

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(\xi_i)\,\delta_i = -\sum_{i=1}^{i=n} f(\xi_i)(-\delta_i) = -\sum_{i=n}^{i=1} f(\xi_i)(-\delta_i),$$

et comme cette somme rentre dans le premier cas considéré, elle a pour limite $\int_b^a f(x)\,dx$; on a donc en passant aux limites,

$$(2) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Ainsi, *renverser les limites d'une intégrale définie revient à changer son signe.*

4° La définition de l'intégrale définie montre encore immédiatement que, A désignant un facteur constant, on a

$$(3) \qquad \int_a^b \mathrm{A}\, f(x)\,dx = \mathrm{A}\int_a^b f(x)\,dx.$$

5° La signification géométrique de l'intégrale définie ressort de ce qui a été dit au N° **52**. Soit une courbe dont l'équation, en coordonnées rectangulaires, serait $y = f(x)$; décomposons l'aire entre les ordonnées $f(a)$ et $f(b)$ par des parallèles à l'axe des y; l'élément de l'aire entre deux parellèles correspondant aux abscisses x_i et x_{i+1} sera compris entre les aires des rectangles qui ont pour base δ_i et pour hauteurs respectives l'ordonnée maximum et l'ordonnée minimum dans cet intervalle. Donc il pourra être représenté par $f(\xi_i)\,\delta_i$, l'ordonnée étant supposée continue et positive dans l'intervalle (x_i, x_{i+1}). L'aire totale sera donc égale à $\lim \Sigma f(\xi_i)\,\delta_i$, ou à l'intégrale définie (1).

Si l'ordonnée était négative ou si b était $< a$, on trouverait une valeur négative pour l'aire cherchée.

310. *Premier théorème de la moyenne.* — Il suit évidemment de l'équation (1) que si $f(x)$ est constamment positif ou nul dans l'intervalle (a, b), $b > a$, l'intégrale définie (1) sera nécessairement positive. Ce principe admis, soient $\varphi(x)$, $\psi(x)$ deux fonctions intégrables entre a et b;

il en sera de même du produit $\varphi(x)\psi(x)$. Admettons que $\psi(x)$ ne change pas de signe dans cet intervalle, que $\varphi(x)$ ne soit pas constant et ait pour limites maximum et minimum L et l. On aura, $\psi(x)$ étant supposé $\geqslant 0$,

$$\int_a^b [L - \varphi(x)]\psi(x)\,dx > 0, \quad \int_a^b [\varphi(x) - l]\psi(x)\,dx > 0,$$

d'où

$$L\int_a^b \psi(x)\,dx > \int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx > l\int_a^b \psi(x)\,dx,$$

donc, si l'on désigne par μ une quantité $> l$ et $< L$, on aura,

$$(\text{I}) \qquad \int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = \mu\int_a^b \psi(x)\,dx.$$

Si $\psi(x)$ était constamment négatif, ou si b était $< a$, les inégalités changeraient de sens, mais la conclusion subsisterait.

Si la fonction $\varphi(x)$ est continue dans l'intervalle (a, b), il existe une quantité $\xi > a$ et $< b$, telle que l'on ait $\varphi(\xi) = \mu$ (**67**). On aura donc, dans ce cas,

$$(5) \qquad \int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = \varphi(\xi)\int_a^b \psi(x)\,dx.$$

Prenons, ce qui s'accorde avec notre hypothèse, $\psi(x) = 1$, les équations (4) et (5) deviendront respectivement

$$(4') \qquad \int_a^b \varphi(x)\,dx = (b - a)\mu, \qquad L > \mu > l;$$

et

$$(5') \qquad \int_a^b \varphi(x)\,dx = (b - a)\varphi(\xi), \qquad b > \xi > a.$$

311. Nous avons démontré que la valeur de l'integrale définie ne dépend pas du mode de division de l'intervalle (a, b) en intervalles δ_i indéfiniment décroissants. Si donc $a_1, a_2, \ldots, a_p$ sont des valeurs déterminées de x entre a et b, il sera permis de supposer que tous les δ_i soient des subdivisions des intervalles, fixes et tous de même signe, $a_1 - a$, $a_2 - a_1, \ldots, b - a_p$, et l'on voit aussitôt par là que l'intégrale (1) sera la somme des intégrales partielles correspondant à ces intervalles, ou que l'on aura

$$(6) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a_1} f(x)\,dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{a_p}^b f(x)\,dx.$$

Il est de même facile de s'assurer, au moyen de l'équation (2), que la relation (6) ne suppose nullement que les quantités $a, a_1, a_2, \ldots a_p, b$ forment une suite toujours croissante ou toujours décroissante ; quelques-unes d'entr'elles pourraient même ne pas appartenir à l'intervalle (a, b), le théorème subsisterait, pourvu que $f(x)$ soit intégrable dans l'intervalle compris entre la plus petite et la plus grande de ces quantités.

312. Si nous représentons par x une valeur quelconque de la variable entre a et b, et si nous formons, d'après les principes exposés ci-dessus, l'intégrale définie

$$\int_a^x f(x)\, dx,$$

elle sera nécessairement une fonction déterminée $\varpi(x)$ de sa limite supérieure. *Cette fonction sera continue dans l'intervalle* (a, b), car, pour un accroissement h, positif ou négatif, de la variable, on aura en vertu de la relation (6)

$$\varpi(x+h) - \varpi(x) = \int_a^{x+h} f(x)\, dx - \int_a^x f(x)\, dx = \int_x^{x+h} f(x)\, dx,$$

donc, d'après l'équation (4'),

$$\varpi(x+h) - \varpi(x) = \mu h,$$

μ étant compris entre les limites maximum et minimum de $f(x)$ dans l'intervalle $(x, x+h)$. Si h est infiniment petit, comme μ ne peut croître au dessus d'un nombre fixe, $\varpi(x+h) - \varpi(x)$ aura pour limite zéro, ce qui démontre la proposition.

Si nous admettons en outre que la fonction $f(x)$, qui peut devenir discontinue dans l'intervalle (a, b), soit telle néanmoins que $f(x+0)$ et $f(x-0)$ existent toujours pour chaque valeur de x qui rend la fonction discontinue (**63**), on aura, d'après la relation ci-dessus,

$$\frac{\varpi(x+h) - \varpi(x)}{h} = \mu,$$

et si l'on fait tendre h vers zéro, μ aura nécessairement pour limite $f(x+0)$ pour $h > 0$, et $f(x-0)$ pour $h < 0$; on aura donc

$$\lim_{h=0} \frac{\varpi(x+h) - \varpi(x)}{h} = \begin{cases} f(x+0) \text{ si } h > 0, \\ f(x-0) \text{ si } h < 0; \end{cases}$$

et si la fonction $f(x)$ est continue pour la valeur considérée de x, ce qui entraîne

$$f(x+0) = f(x) = f(x-0) \ (\mathbf{63}),$$

il viendra

$$(7) \qquad \lim_{h=0} \frac{\varpi(x+h) - \varpi(x)}{h} = f(x),$$

quel que soit la signe de h. Donc, *l'intégrale*

$$\int_a^x f(x)\, dx$$

est une fonction continue de x qui admet une dérivée égale à $f(x)$, pour toute valeur de la variable x pour laquelle la fonction $f(x)$ est continue.

313. Ce théorème résout affirmativement la question posée au N° **282**, savoir si, dans un intervalle (a, b) où la fonction $f(x)$ reste finie et continue, il existe toujours une fonction qui admette pour dérivée $f(x)$. La fonction

$$\varpi(x) = \int_a^x f(x)\, dx$$

jouit en effet de cette propriété. Nous savons de plus que $\varpi(x) + C$, C étant une constante arbitraire, est la fonction la plus générale qui satisfasse à cette condition, et de là résulte une relation fondamentale entre l'intégrale définie et l'intégrale indéfinie.

Admettons que l'on connaisse une fonction $F(x)$ qui, dans l'intervalle (a, b), ait une dérivée égale à $f(x)$ et qui soit par conséquent continue dans cet intervalle. Elle ne peut différer de $\varpi(x)$ que par une constante C, et l'on a

$$\int_a^x f(x)\, dx = F(x) + C_1.$$

Faisant tendre x vers a et observant que l'intégrale a alors pour limite zéro (**312**), que $F(x)$ a pour limite $F(a)$, on trouve

$$F(a) + C_1 = 0, \quad C_1 = -F(a),$$

d'où

$$(8) \qquad \int_a^x f(x)\, dx = F(x) - F(a).$$

Enfin, faisant tendre x vers la limite b, on aura

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a), \tag{9}$$

d'où ce théorème important : *L'intégrale définie de $f(x)dx$ entre deux limites a et b entre lesquelles $f(x)$ est continu, est égale à l'accroissement que prend une fonction $\mathrm{F}(x)$, dont la dérivée est égale à $f(x)$ dans l'intervalle (a, b), lorsque x passe de la valeur a à la valeur b.*

Pour abréger l'écriture, nous écrivons cet accroissement comme il suit :

$$\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) = \Big[\mathrm{F}(x)\Big]_a^b$$

Remarques. — 1° Ce théorème subsiste si $f(x)$, étant intégrable, devient discontinu pour un nombre limité de valeurs $a_1, a_2, \dots a_p$ de x dans l'intervalle (a, b), du moment où $\mathrm{F}(x)$ reste continu dans cet intervalle et où l'on a $\mathrm{F}'(x) = f(x)$ pour les valeurs de x ou $f(x)$ est continu. En effet, on a vu (**312**) que la fonction $\varpi(x)$ est aussi continue dans l'intervalle (a, b); donc les fonctions $\mathrm{F}(x)$ et $\varpi(x)$ qui ont même dérivée dans chacun des intervalles $(a + 0, a_1 - 0), \dots (a_p + 0, b - 0)$, sont égales, à une constante près, dans chacun de ces intervalles, et comme ces fonctions sont continues pour $x = a, x = a_1, \dots x = a_p, x = b$, la constante a la même valeur dans tous ces intervalles et dans l'intervalle (a, b). L'équation (8) subsiste donc ainsi que l'équation (9).

2° Une précaution est nécessaire dans l'emploi de l'équation (9) lorsque $\mathrm{F}(x)$ est une fonction à détermination multiple, telle que arc tg x, le symbole arc tg étant pris dans le sens général (**85**) ; $\mathrm{F}(a)$, $\mathrm{F}(b)$ admettent alors plusieurs valeurs qui, substituées dans l'équation (7), fourniraient des résultats différents pour l'intégrale définie, laquelle évidemment n'admet qu'une valeur unique si $f(x)$ est une fonction simple. Le choix est déterminé par la condition de continuité imposée à $\mathrm{F}(x)$: après avoir attribué à $\mathrm{F}(a)$ l'une des valeurs que comporte $\mathrm{F}(x)$ pour $x = a$, il faudra choisir pour $\mathrm{F}(b)$ celle que l'on obtient en supposant que $\mathrm{F}(x)$ varie d'une manière continue lorsque x passe de la valeur a à la valeur b. Ainsi, l'on devra prendre

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arc\,tg}(1) - \operatorname{arc\,tg} 0 = \frac{\pi}{4}$$

parce que, si arc tg x est pris égal à zéro pour $x = 0$, et si x varie d'une

manière continue de 0 à 1, la fonction arc tg x, restant continue, atteindra la valeur $\pi : 4$.

314. Les théorèmes sur l'intégration par décomposition, par partie, etc..., s'appliquent aux intégrales définies. Il résulte d'abord, de la définition des intégrales définies et de l'égalité évidente

$$\Sigma [f(\xi_i) \pm \varphi(\xi_i) \pm \cdots] \delta_i = \Sigma f(\xi_i)\, \delta_i \pm \Sigma \varphi(\xi_i)\, \delta_i \pm \cdots$$

$f(x)$, $\varphi(x)$, ... désignant des fonctions intégrables entre a et b, que l'on aura

$$(10) \quad \int_a^b [f(x) \pm \varphi(x) \pm \cdots]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b \varphi(x)\, dx \pm \cdots$$

En second lieu, partant de la formule de l'intégration par partie,

$$\int \varphi(x) \psi'(x)\, dx = \varphi(x) \psi(x) - \int \psi(x) \varphi'(x)\, dx$$

et appliquant l'équation (9) du N° **313**, on aura évidemment

$$(11) \qquad \int_a^b \varphi(x) \psi'(x) dx = [\varphi(x) \psi(x)]_a^b - \int_a^b \psi(x) \varphi'(x)\, dx,$$

ce qui est la règle de l'intégration par partie appliquée aux intégrales définies.

315. Revenons encore à l'équation

$$\varpi(x) = \int_a^x f(x)\, dx,$$

$f(x)$ étant une fonction intégrable dans l'intervalle (a, b) et x variant entre a et b. Posons

$$x = \varphi(z),$$

$\varphi(z)$ étant une fonction continue de z dans une intervalle (z_0, z_1) tel que l'on ait

$$\varphi(z_0) = a, \quad \varphi(z_1) = b,$$

et admettant une dérivée $\varphi'(z)$ intégrable dans cet intervalle.

On aura, comme ou l'a vu (**312**),

$$\frac{d\varpi(x)}{dx} = f(x), \qquad \frac{d\varpi(x)}{dz} = f(x)\, \varphi'(z) = f[\varphi(z)]\varphi'(z)$$

d'après la règle des fonctions de fonctions. Il en résulte, d'après le N° **313** $\varpi(x) = \varpi[\varphi(z)]$ étant une fonction continue de z,

$$\int_{z_0}^{z_1} f[\varphi(z)]\,\varphi'(z)\,dz = \varpi[\varphi(z_1)] - \varpi[\varphi(z_0)] = \varpi(b) - \varpi(a),$$

ou enfin

$$(12) \qquad \int_{z_0}^{z_1} f[\varphi(z)]\,\varphi'(z)\,dz = \int_a^b f(x)\,dx.$$

C'est l'intégration par substitution appliquée à l'intégrale définie. *On peut donc remplacer x par une fonction $\varphi(z)$ d'une nouvelle variable sous le signe d'intégration, pourvu que l'on prenne pour limites de la nouvelle intégrale les valeurs de z qui correspondent aux limites primitives, et que $\varphi(z)$ varie d'une manière continue dans cet intervalle.*

Ainsi, si l'on applique à l'intégrale la transformation

$$x = \frac{1}{z}, \quad dx = -\frac{dz}{z^2},$$

on aura, si a et b sont de même signe,

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}} f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{dz}{z^2},$$

parce que $x = 1 : z$ varie d'une manière continue entre $z = 1 : a$ et $z = 1 : b$; mais cette transformation ne serait plus permise si a et b étaient de signes contraires, parce que $1 : a$ et $1 : b$ étant aussi de signes contraires, $1 : z$ passerait par l'infini entre les limites de l'intégration.

316. *Deuxième théorème de la moyenne.* — Soient $\varphi(x)$, $\psi(x)$ deux fonctions intégrables dans l'intervalle (a, b), en sorte que l'intégrale

$$\int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx$$

aura une valeur déterminée et finie. De plus, admettons que $\varphi(x)$ soit toujours positif et non décroissant dans cette intervalle. Il sera toujours possible, par un certain nombre de valeurs

$$x_1 = a, \quad x_2, x_3, \ldots \quad x_n, x_{n+1} = b,$$

de décomposer l'intervalle (a, b) en n intervalles dans chacun desquels l'oscillation de la fonction $\varphi(x)$ sera moindre qu'une quantité arbitrairement petite σ, car on pourra toujours prendre pour l'une des valeurs x,

ci-dessus, toute valeur ξ de x pour laquelle $\varphi(x)$ serait discontinue, et remplacer, sans changer la valeur de l'intégrale, $\varphi(\xi)$ par $\varphi(\xi - 0)$ ou par $\varphi(\xi + 0)$.

Désignons par C_i une moyenne entre les valeurs de $\varphi(x)$ dans l'intervalle (x_i, x_{i+1}), et par $g(x)$ la différence $\varphi(x) - C_i$ dans cet intervalle; il s'ensuit que $g(x)$ aura, dans tout l'intervalle (a, b), une valeur absolue moindre que σ. Nous aurons donc

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = \sum_{i=1}^{i=n}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi(x)\psi(x)\,dx = \Sigma\int_{x_i}^{x_{i+1}} [C_i + g(x)]\,\psi(x)\,dx$$
$$= \Sigma C_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \psi(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,\psi(x)\,dx.$$

Nous posons

$$\int_{x_1}^b \psi(x)\,dx = J_1, \quad \int_{x_2}^b \psi(x)\,dx = J_2, \ldots, \quad \int_{x_n}^b \psi(x)\,dx = J_n,$$

d'où

$$\Sigma C_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \psi(x)dx = C_1(J_1 - J_2) + C_2(J_2 - J_3) + \cdots + C_{n-1}(J_{n-1} - J_n) + C_n J_n$$
$$= C_1 J_1 + (C_2 - C_1) J_2 + \cdots + (C_n - C_{n-1}) J_n = C_n \,\mathcal{M}\,(J_1, J_2, \ldots, J_n),$$

car, d'après les propriétés attribuées à $\varphi(x)$, les quantités $C_1, C_2 - C_1, \ldots, C_n - C_{n-1}$ sont toutes positives. Mais la fonction de x

$$\int_x^b \psi(x)\,dx$$

est une fonction continue de sa limite inférieure x; donc, la valeur moyenne entre les intégrales $J_1, J_2 \ldots J_n$ ne peut être que la valeur de cette intégrale qui répond à une valeur ξ de x comprise entre a et b. De là

$$\Sigma C_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \psi(x)\,dx = C_n \int_\xi^b \psi(x)\,dx.$$

D'autre part, désignons par M la limite maximum des valeurs absolues de $\psi(x)$ dans l'intervalle $(a + 0, b - 0)$; on a évidemment

$$\mathrm{VA}\int_a^b g(x)\psi(x)\,dx \leqq \int_a^b \mathrm{VA}\,g(x) \cdot \mathrm{VA}\,\psi(x)\,dx < \sigma M(b - a),$$

donc, si l'on désigne par λ une quantité comprise entre -1 et $+1$, on aura

$$\int_a^b g(x)\,\psi(x)\,dx = \lambda\sigma M(b - a),$$

et enfin

$$\int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx = C_n \int_\xi^b \psi(x)\,dx + \lambda\sigma M(b-a).$$

Faisons tendre vers zéro les intervalles (x_i, x_{i+1}); C_n différera aussi peu qu'on voudra de $\varphi(b-0)$, σ pourra devenir moindre que tout nombre donné; on trouvera, à la limite,

$$\text{(A)} \qquad \int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx = \varphi(b-0)\int_\xi^b \psi(x)\,dx.$$

Supposons maintenant que $\varphi(x)$ soit de signe quelconque, mais variant toujours dans le même sens dans l'intervalle $(a+0, b-0)$. La fonction $\varphi(x) - \varphi(a+0)$ sera donc constamment positive et croissante, ou constamment négative et décroissante. Dans le premier cas, on prendra cette fonction pour la fonction $\varphi(x)$ de l'équation (A), ce qui donnera

$$\int_a^b [\varphi(x) - \varphi(a+0)]\,\psi(x)\,dx = [\varphi(b-0) - \varphi(a+0)]\int_\xi^b \psi(x)\,dx,$$

d'où

$$(13) \quad \int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx = \varphi(a+0)\int_a^\xi \psi(x)\,dx + \varphi(b-0)\int_\xi^b \psi(x)\,dx.$$

Dans le second cas, on remplacera dans (A) $\varphi(x)$ par $\varphi(a+0) - \varphi(x)$ et l'on arrivera au même résultat. L'équation (13) est donc générale et constitue le *second théorème de la moyenne.*

317. Toutes ces propriétes et l'existence même de l'intégrale définie ont été fondées sur les hypothèses 1° que les limites a et b aient des valeurs finies; 2° que la fonction $f(x)$ ne puisse croître au-dessus de toute grandeur donnée dans l'intervalle (a, b). Si ces conditions cessent d'être remplies, de nouvelles définitions sont nécessaires. Nous nous bornerons ici aux premiers principes.

1° L'intégrale de $f(x)\,dx$ prise entre les limites a et ∞ désigne la limite vers laquelle tend l'intégrale prise entre les limites a et x lorsqu'on fait croître indéfiniment x. Ainsi, par définition, on a

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{x=\infty} \int_a^x f(x)\,dx.$$

Par exemple, α étant > 0,

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\,dx = \lim_{x=\infty}\left[-\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha}\right]_0^x = \frac{1}{\alpha}.$$

La limite est, tantôt infinie, tantôt indéterminée, tantôt, comme ici, finie et déterminée ; nous indiquerons plus tard les caractères qui distinguent ces divers cas.

On interpréterait dans le même sens les notations

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx.$$

2° Concevons que $f(x)$ croisse indéfiniment en valeur absolue, lorsque x tend vers la limite b, et soit ε une quantité positive, aussi petite qu'on le veut. On posera, comme définition,

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon=0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\, dx ;$$

cette limite pourra être, suivant les cas, infinie, indéterminée, ou finie et déterminée. Ainsi, l'on aura

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon=0} [\operatorname{arc}\sin(1-\varepsilon) - \operatorname{arc}\sin 0] = \frac{\pi}{2}.$$

De même, si $f(a+0) = \pm\infty$, on posera

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon=0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\, dx.$$

3° Enfin, si $f(x)$ devenait infini pour une ou plusieurs valeurs de x comprises entre a et b, on regarderait l'intégrale comme la somme des intégrales étendues à chacun des intervalles dans l'intérieur desquels la fonction reste finie, et ces intégrales partielles seraient définies par la règle précédente. Ainsi, si l'on avait, a_1 étant $> a$ et $< b$,

$$f(a_1 - 0) = \pm\infty, \quad f(a_1 + 0) = \pm\infty,$$

on prendrait comme définition

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim \left[\int_a^{a_1-\varepsilon} f(x)\, dx + \int_{a_1+\eta}^{b} f(x)\, dx \right],$$

ε et η étant des quantités positives, infiniment petites et indépendantes l'une de l'autre.

318. L'équation (9) du N° **313** subsistera pour ces intégrales que nous venons de définir, *si la fonction* F (x) *reste continue dans l'intervalle des intégrations*. Il n'y a nulle difficulté pour les intégrales à limites infinies. Mais si nous considérons le troisième cas, qui comprend le

second, nous aurons, la fonction F (x) étant continue dans les intervalles $(a, a_1 - \varepsilon)$, $(a_1 + \eta, b)$, ce qui permet d'appliquer l'équation (9),

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim\,[\mathrm{F}(a_1 - \varepsilon) - \mathrm{F}(a) + \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a_1 + \eta)]$$
$$= \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) + \lim\,[\mathrm{F}(a_1 - \varepsilon) - \mathrm{F}(a_1 + \eta)],$$

et comme le dernier terme se réduit à zéro à cause de la continuité de F (x) pour $x = a_1$, on retombe sur l'équation (9).

De même, si dans l'équation (12) la dérivée $\varphi'(z)$ de x par rapport à z devenait infinie pour une valeur de z de l'intervalle (z_0, z_1), on partagerait les intégrales relatives à x et à z en deux autres dans lesquelles cette difficulté ne se présenterait pas, et l'on démonterait ainsi que l'équation (12) subsiste, même lorsque $\varphi'(z)$ passe par l'infini. De même pour les théorèmes du N° **314**.

Ces remarques suffisent pour lever les difficultés qui se rencontrent dans les applications les plus usuelles.

§ 2. APPLICATION DES THÉORIES PRÉCÉDENTES AU CALCUL DES INTÉGRALES DÉFINIES.

319. Lorsqu'on connai tl'intégrale indéfinie d'une expression $f(x)\,dx$, l'équation (9) du paragraphe précédent conduit presque toujours immédiatement à la valeur de l'intégrale définie. Ainsi, de la formule

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + \mathrm{C}, \quad (a > -1),$$

on déduit

$$\int_0^1 x^a\,dx = \frac{1}{a+1}\,.$$

De même, de l'équation

$$\int \cos^2 mx\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2\,mx}{4m} + \mathrm{C},$$

on déduit, si m est entier,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 mx\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

Si m et n sont entiers et inégaux, on aura

$$\int \cos mx \cos nx \, dx = \frac{1}{2} \int \left[\cos (m+n) x + \cos (m-n) x \right] dx$$
$$= \frac{\sin (m+n) x}{2 (m+n)} + \frac{\sin (m-n) x}{2 (m-n)},$$

d'où

$$\int_0^\pi \cos mx \cos nx \, dx = 0.$$

De l'équation du N° **304**,

$$\int \frac{dx}{a + b \cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \text{arc tg} \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \text{tg} \frac{1}{2} x \right) + C, \ (a > b),$$

on déduira pour l'intégrale entre les limites 0 et π, en ayant égard à la condition de continuité imposée à la fonction,

$$\int_0^\pi \frac{dx}{a + b \cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} (\text{arc tg} \infty - \text{arc tg} 0) = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

320. On trouvera aussi immédiatement, d'après la définition donnée pour les intégrales à limites infinies, si a est > 0,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{\pi}{2a},$$

et en appliquant les formules (4) du N° **306**,

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos bx dx = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad \int_0^\infty e^{-ax} \sin bx dx = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Les formules de réduction, souvent rencontrées, se simplifient parfois notablement lorsqu'on les applique aux intégrales définies, et conduisent rapidement aux valeurs de celles-ci.

Par exemple, la formule (8) du N° **307** nous donne

$$m \int \sin^m x dx = -\sin^{m-1} x \cos x + (m-1) \int \sin^{m-2} x dx,$$

d'où, prenant l'intégrale entre 0 et $\pi : 2$, on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx = \frac{m-1}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x dx,$$

et l'on en conclut immédiatement, en supposant m égal à un nombre entier, positif et pair $2n$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \ldots 2n} \frac{\pi}{2},$$

et en prenant $m = 2n + 1$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx = \frac{2 \cdot 4 \ldots 2n}{3 \cdot 5 \ldots (2n+1)}.$$

On a d'ailleurs

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m \left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^m z dz$$

en posant $z = \frac{\pi}{2} - x$; d'où

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx.$$

Reprenons encore la formule du n° **294**.

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^m} = \frac{x}{(2m-2)(1+x^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2m-2} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{m-1}},$$

et cherchons l'intégrale entre zéro et l'infini. Le terme hors du signe $\int$ s'annule pour $x = 0$ et tend vers zéro lorsque x tend vers l'infini si m est entier et > 1. On a donc

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^m} = \frac{2m-3}{2m-2} \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{m-1}},$$

et cette formule de réduction nous ramène au cas de $m = 1$ traité ci-dessus, d'où

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^m} = \frac{1 \cdot 3 \ldots (2m-3)}{2 \cdot 4 \ldots (2m-2)} \frac{\pi}{2}.$$

En posant $\sqrt{ax - x^2} = xz$ $(a > 0)$, nous avons ramené (**300**) l'intégrale de

$$\frac{x^m dx}{\sqrt{ax - x^2}}$$

à celle de $(1+z^2)^{-(m+1)}dz$. Aux valeurs $x=0$, $x=a$ correspondent $z=\infty$ et $z=0$, donc, en renversant les limites, changeant le signe et appliquant la formule ci-dessus, on trouvera

$$\int_0^a \frac{x^m dx}{\sqrt{ax-x^2}} = \frac{1.3\ldots(2m-1)}{2.4\ldots 2m}\pi a^m.$$

On a encore, par le même procédé,

$$\int e^{-ax}x^{n-1}dx = -\frac{e^{-ax}x^{n-1}}{a} + \frac{n-1}{a}\int e^{-ax}x^{n-2}dx,$$

d'où, a étant supposé positif et $n>1$,

$$\int_0^\infty e^{-ax}x^{n-1}dx = \frac{n-1}{a}\int_0^\infty e^{-ax}x^{n-2}dx.$$

On en conclut, n étant entier,

$$\int_0^\infty e^{-ax}x^{n-1}dx = \frac{1.2.3\ldots(n-1)}{a^n}.$$

Enfin, on trouverait encore par des formules de réduction tirées des équations (7) et (8) du N° **307**, m et n étant entiers et >0,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \cos^{2n} x dx = \frac{1.3\ldots(2m-1)\,1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2m+2n)}\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m} x \cos^{2n+1} x dx = \frac{2.4\ldots 2n}{(m+1)(m+3)\ldots(m+2n+1)},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x \cos^{n} x dx = \frac{2.4\ldots 2m}{(n+1)(n+3)\ldots(2m+n+1)}.$$

321. La formule (6) du N° **310** facilite souvent l'évaluation des intégrales définies. Soit à chercher l'intégrale

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x dx}{1+\cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin x dx}{1+\cos^2 x} + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{x\sin x dx}{1+\cos^2 x}.$$

Dans la dernière intégrale, posons

$$x = \pi - z, \quad \text{d'où } dx = -dz,$$

les valeurs de z correspondant à $x=\pi:2$ et $x=\pi$ sont respectivement

$z = \pi : 2$, $z = 0$; donc, changeant le signe et renversant les limites, cette intégrale devient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\pi - z)\sin z dz}{1 + \cos^2 z},$$

et l'on a, réduction faite,

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x dx}{1 + \cos^2 x} = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin z dz}{1 + \cos^2 z} = \pi \Big[- \operatorname{arc\,tg}(\cos z) \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}.$$

322. Considérons encore une intégrale définie importante, après quelques remarques préliminaires. Supposons m, n entiers et positifs, et $n > m$; faisons

$$s = \frac{\pi}{n}, \quad (2k + 1)\frac{\pi}{n} = (k, s), \quad \theta = ms,$$

en observant que $\sin n\theta = 0$; les formules (8) du nº **274** nous donnent immédiatement

$$(\alpha) \qquad \sum_{k=0}^{k=n-1} \cos m(k, s) = 0, \qquad \sum_{k=0}^{k=n-1} \sin m(k, s) = 0;$$

de plus, en dérivant par rapport à θ la première de ces deux équations (8) et faisant encore $\theta = ms$, on trouvera

$$(\beta) \qquad \sum_{k=0}^{k=n-1} (2k + 1) \sin m(k, s) = - \frac{n}{\sin ms}.$$

Décomposons maintenant en fractions simples la fraction rationnelle

$$\frac{x^{m-1}}{1 + x^n},$$

en observant que les racines, toutes inégales, du dénominateur sont données (**7**, **8**) par la formule

$$\cos(2k + 1)\frac{\pi}{n} + i \sin(2k + 1)\frac{\pi}{n} = e^{(k,s)i},$$

où k reçoit les valeurs $0, 1, 2, \ldots, (n - 1)$. Donc, d'après la remarque du nº **250**, le numérateur de la fraction correspondant à la racine $x_k = e^{(k,s)i}$ sera

$$\frac{1}{n} x_k^{m-n} = \frac{e^{(m-n)(k,s)i}}{n} = - \frac{e^{m(k,s)i}}{n},$$

car on a

$$e^{-n\,(k,s)i} = e^{-(2k+1)\pi i} = -\,1.$$

De là nous tirons

$$\frac{x^{m-1}}{1+x^n} = -\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{e^{m\,(k,s)i}}{x - e^{(k,s)i}},$$

ou, multipliant haut et bas par $x - e^{-(k,s)i}$ et ayant égard à l'expression du cosinus en exponentielles imaginaires, observant d'ailleurs que la fonction étant réelle, la partie imaginaire doit s'annuler d'elle-même,

$$\frac{x^{m-1}}{1+x^n} = -\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{xe^{m(k,s)i} - e^{(m-1)\,(k,s)i}}{x^2 - 2x\cos(k,s) + 1} = -\frac{1}{n}\sum \frac{x\cos m\,(k,s) - \cos(m-1)(k,s)}{x^2 - 2x\cos(k,s) + 1}.$$

Intégrons cette expression d'après la formule (3) du n° **294**, et observons que l'on a ici $\alpha = \cos(k, s)$, $\beta = \sin(k, s)$, d'où

$$\frac{M\alpha + N}{\beta} = \frac{\cos m\,(k, s)\cos(k, s) - \cos(m-1)(k, s)}{\sin(k, s)} = -\sin m\,(k, s),$$

et nous trouverons pour l'intégrale indéfinie

$$\int \frac{x^{m-1}dx}{1+x^n} = -\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{k=n-1} \cos m\,(k, s)\,\mathrm{l.}\,[x^2 - 2x\cos(k, s) + 1]$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1} \sin m\,(k, s)\,\mathrm{arc\,tg}\left[\frac{x - \cos(k, s)}{\sin(k, s)}\right] + \mathrm{C}.$$

Le premier groupe s'annule évidemment pour $x = 0$, et aussi pour $x = \infty$, car on a

$$\mathrm{l.}\,[x^2 - 2x\cos(k, s) + 1] = \mathrm{l.}\,x^2 + \mathrm{l.}\left[1 - \frac{2}{x}\cos(k, s) + \frac{1}{x^2}\right],$$

et à cause de la formule (α), on a

$$\mathrm{l.}\,x^2 \sum \cos m\,(k, s) = 0;$$

donc il ne reste dans ce premier groupe que des termes qui s'annulent pour $x = \infty$. Quant au second groupe, comme on a

$$\mathrm{arc\,tg}\left[\frac{x - \cos(k, s)}{\sin(k, s)}\right] - \mathrm{arc\,tg}\left[-\frac{\cos(k, s)}{\sin(k, s)}\right] = \mathrm{arc\,tg}\left[\frac{x\sin(k, s)}{1 - x\cos(k, s)}\right],$$

et que cette expression tend, pour des valeurs indéfiniment croissantes de x, vers

$$\mathrm{arc\,tg}\,[-\mathrm{tg}\,(k, s)] = -(k, s) = -(2k+1)\frac{\pi}{n},$$

nous aurons la formule

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}\,dx}{1+x^n} = -\frac{\pi}{n^2}\sum_{k=0}^{k=n-1}(2k+1)\sin m\,(k,s) = \frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}$$

en vertu de l'égalité (β).

Cette intégrale donne la suivante. Posons

$$x^n = z, \quad \frac{m}{n} = a,$$

les limites d'intégration seront encore o et ∞, et nous aurons

$$\int_0^\infty \frac{z^{a-1}\,dz}{1+z} = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Cette formule est donc démontrée pour toute valeur rationnelle de a entre zéro et l'unité.

Exercices.

1. Trouver la valeur de l'intégrale

$$\int_0^\pi \mathrm{l.}\,(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)\,dx,$$

en partant de la définition de l'intégrale définie (**308**).

R. Partageant l'intervalle (o, π) en n parties égales, on trouve d'abord que cette intégrale n'est autre que

$$\lim_{n=\infty} \frac{\pi}{n}\,\mathrm{l.}\prod_{k=0}^{k=n-1}\left(1 - 2\alpha\cos\frac{k\pi}{n} + \alpha^2\right),$$

et d'autre part, on déduit des formules du n° **7**,

$$\prod_{k=0}^{k=n-1}\left(1 - 2\alpha\cos\frac{k\pi}{n} + \alpha^2\right) = (\alpha-1)^2\frac{\alpha^{2n}-1}{\alpha^2-1} = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}(\alpha^{2n}-1).$$

Donc

$$\int_0^\pi \mathrm{l.}\,(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)\,dx = \pi\lim_{n=\infty}\frac{\mathrm{l.}\,(\alpha^{2n}-1)}{n}.$$

Cette limite est zéro, si $\alpha^2 < 1$; $\pi\,\mathrm{l.}\,\alpha^2$, si $\alpha^2 > 1$.

2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = \frac{\pi}{2ab}.$

3. $\displaystyle\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}\,;(a^2 > 1).$

4. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x\, dx}{1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2} = \frac{1}{\alpha}\,\mathrm{l.}\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right).$

5. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2} = \frac{\pi}{1-\alpha}.$

6. $\displaystyle\int_{-1}^{+1} \mathrm{l.}\sqrt{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} + \mathrm{l.}\,2 - 2.$

7. $\displaystyle\int_0^{1} x^{m-1}(1-x)^{n-1}\, dx = \frac{1.2\ldots(n-1)}{m(m+1)\ldots(m+n-1)},$ $(m, n$ entiers et $> 0).$

8. $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^m x \cos mx\, dx = \frac{\pi}{2^m}.$

9 $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^m x \cos nx\, dx,$ m et n entiers.

R. L'intégrale est nulle si m est $< n$, et si m est $> n$ mais de parité différente. Si $m > n$, m et n étant de même parité, on a

$$\frac{(n+1)(n+2)\ldots m}{2.4\ldots(m-n)(2n+2)(2n+4)\ldots(m+n)}\,\frac{\pi}{2^n}.$$

10. $$\int_0^{\infty} e^{-ax}\sin^n x\, dx = \begin{cases} \dfrac{1.2\ldots n}{(a^2+1)(a^2+3^2)\ldots(a^2+n^2)} & \text{si } n \text{ est impair.} \\[2ex] \dfrac{1.2\ldots n}{a(a^2+2^2)\ldots(a^2+n^2)} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

11. Dans l'intervalle $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ on a constamment, n étant entier et > 0,

$$\sin^{2n+1} x \leq \sin^{2n} x \leq \sin^{2n-1} x,$$

d'où

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\, dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\, dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x\, dx.$$

Divisant les termes de cette inégalité par le premier qui est positif, et remplaçant ces intégrales par leurs valeurs (**320**), on aura

$$1 < \frac{3^2.5^2\ldots(2n-1)^2(2n+1)}{2^2.4^2\ldots(2n)^2}\cdot\frac{\pi}{2} < \frac{2n+1}{2n}.$$

Faisant croître n indéfiniment, on a la formule de Wallis

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n=\infty} \frac{2^2.4^2\ldots(2n)^2}{3^2.5^2\ldots(2n-1)^2(2n+1)}.$$

CHAPITRE XXXIII.

INTÉGRATION PAR LES SÉRIES.

323. Soit $f(x)$ une fonction développable en série équiconvergente (**108**) dans un intervalle (a, b), en sorte que si l'on fait

$$(1) \qquad f(x) = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + \mathrm{R}_n,$$

VAR_n sera $< \varepsilon$, ε étant arbitrairement petit, pour toute valeur de n égale ou supérieure à un nombre fixe N et pour toute valeur de x dans l'intervalle (a, b). Si les termes de la série et la fonction $f(x)$ sont intégrables dans cet intervalle, on aura, pour $a \leqslant x \leqslant b$,

$$\int_a^x f(x)\,dx = \int_a^x u_0 dx + \int_a^x u_1 dx + \cdots + \int_a^x u_{n-1} dx + \int_a^x \mathrm{R}_n dx.$$

Mais si $n \geqslant \mathrm{N}$, on a

$$\mathrm{VA} \int_a^x \mathrm{R}_n dx < \varepsilon \int_a^x dx < \varepsilon(b - a);$$

donc la valeur absolue du dernier terme peut être supposée moindre qu'une quantité donnée pour toute valeur de x dans l'intervalle $b - a$, donc la série du second membre est équiconvergente et a pour somme l'intégrale du premier membre,

$$(2) \qquad \int_a^x f(x) dx = \int_a^x u_0 dx + \int_a^x u_1 dx + \cdots + \int_a^x u_{n-1} dx + \cdots$$

On a donc ce théorème : *Si une fonction $f(x)$, intégrable dans un intervalle (a, b), est développable dans cet intervalle en une série équiconvergente dont les termes sont eux-mêmes intégrables, les intégrales de ces termes entre les limites a et $x \leqslant b$ formeront une série équiconvergente qui aura pour somme*

$$\int_a^x f(x) dx.$$

324. Ce théorème conduit à un autre également utile : *Si une fonction $f(x)$ est développable en une série convergente, dont les termes sont des fonctions de x qui ont des dérivées continues, dans un intervalle* (a, b),

et si la série formée par ces dérivées est équiconvergente dans le même intervalle, la somme de cette seconde série sera la dérivée de $f(x)$.

Soit

$$f(x) = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

la série donnée, et

$$\varphi(x) = u'_0 + u'_1 + u'_2 + \cdots$$

la série formée par les dérivées des termes de la première. Cette seconde série satisfait aux conditions du premier théorème, et l'on a, par suite,

$$\int_a^x \varphi(x)\,dx = \int_a^x u'_0\,dx + \int_a^x u'_1\,dx + \int_a^x u'_2\,dx + \cdots$$

Mais, d'après le théorème du n° **312**, on a

$$\int_a^x u'_p\,dx = [u_p]^x,$$

d'où

$$\int_a^x \varphi(x)\,dx = [u_0 + u_1 + u_2 + \cdots]_a^x = f(x) - f(a),$$

et, en dérivant les deux membres par rapport à x, on obtient

$$\varphi(x) = f'(x).$$

325. Le théorème du n° **323** est susceptible de deux sortes d'applications : 1° on peut, lorsqu'on sait obtenir sous forme finie l'intégrale de $f(x)\,dx$, déduire le développement de cette intégrale de celui de sa dérivée ; 2° si l'on ne sait pas obtenir l'expression de $\int f(x)\,dx$ au moyen des fonctions élémentaires, le théorème fournira le moyen de calculer sa valeur par approximation au moyen de séries convergentes. Considérons d'abord le premier problème.

I. On sait que, pour toute valeur de x comprise entre $-\rho$ et $+\rho$, $\rho < 1$, on a la série équiconvergente

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

On conclut, par l'équation (2),

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^x dx - \int_0^x x^2 dx + \int_0^x x^4 dx - \cdots,$$

ou

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots, \quad (-1 < x < 1),$$

résultat obtenu au n° **124**.

II. De même, on a la série équiconvergente entre deux valeurs de x moindres que l'unité

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \cdots$$

Appliquant le même théorème et observant que

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sin } x,$$

on trouvera l'équation

$$\text{arc sin } x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \cdots$$

qui sera applicable pour toute valeur numérique de x moindre que l'unité. Pour $x = 1$, la série reste convergente, car on a ici (**37**, IX)

$$\lim_{n=\infty} n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \lim n\left[1 - \frac{(2n-1)^2}{2n(2n+1)}\right] = \lim \frac{6n-1}{2(2n+1)} = \frac{3}{2} > 1.$$

Donc, d'après le théorème d'Abel (**114**), l'équation subsiste et représente arc sin 1, donc

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2.3} + \frac{1.3}{2.4.5} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7} + \cdots$$

326. Comme exemple d'intégrales qu'on ne sait pas exprimer sous forme finie, considérons, k étant une constante comprise entre zéro et 1, l'intégrale finie et déterminée

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

On a, par la formule du binôme,

$$(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}k^2\sin^2\varphi + \frac{1.3}{2.4}k^4\sin^4\varphi + \frac{1.3.5}{2.4.6}k^6\sin^6\varphi + \cdots,$$

et cette série est équiconvergente dans tout intervalle, comme il est facile de le voir. On a donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}k^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\, d\varphi + \frac{1.3}{2.4}k^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\varphi\, d\varphi + \cdots,$$

ou, en remplaçant les intégrales définies du second membre par leurs valeurs (**320**),

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 k^6 + \cdots\right].$$

Si l'on remplace $\sin\varphi$ par x dans l'intégrale, on voit que la série obtenue donne le développement de l'intégrale définie

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

qu'on appelle l'*intégrale elliptique complète* de première espèce.

Soit encore l'intégrale ($a > 0$, $x > 0$)

$$\int_a^x \frac{e^x\,dx}{x} = \int_a^x \frac{dx}{x} + \int_a^x dx + \frac{1}{1.2}\int_a^x x\,dx + \frac{1}{1.2.3}\int_a^x x^2 dx + \cdots,$$

comme on le voit en développant e^x par la formule connue. On aura donc

$$\int_a^x \frac{e^x dx}{x} = \text{l.}\, x - \text{l.}\, a + (x-a) + \frac{x^2 - a^2}{1.2.2} + \frac{x^3 - a^3}{1.2.3.3} + \cdots,$$

ou, les termes constants formant une série convergente,

$$\int_a^x \frac{e^x dx}{x} = \text{l.}\, x + x + \frac{x^2}{1.2.2} + \frac{x^3}{1.2.3.3} + \cdots + \text{C},$$

C désignant une constante.

327. Le développement en série conduit parfois aux valeurs d'intégrales définies remarquables. Ainsi, on a, d'après une formule du n° **278**, a étant une constante positive,

$$e^{-a\cos x}\cos(a \sin x) = 1 - a\cos x + \frac{a^2}{1.2}\cos 2x - \frac{a^3}{1.2.3}\cos 3x + \cdots,$$

et cette série, qui se déduirait d'ailleurs de la formule de Maclaurin, est équiconvergente dans tout intervalle de la variable x. On a donc, par l'équation (2),

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-a\cos x}\cos(a\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2} - a + \frac{a^3}{1.2.3.3} - \frac{a^5}{1.2.3.4.5.5} + \cdots$$

D'autre part, développant $\sin z$ par la formule connue, on a, en vertu

du même théorème, pour toute valeur positive de a,

$$\int_0^a \frac{\sin z dz}{z} = a - \frac{a^3}{1.2.3.3} + \frac{a^5}{1.2.3.4.5.5} - \dots,$$

donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-a\cos x} \cos(a \sin x)\, dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^a \frac{\sin z}{z}\, dz.$$

Si l'on fait croître indéfiniment a, on reconnaît que l'intégrale du premier membre tend vers zéro, car le facteur $e^{-a\cos x}$ finit par devenir moindre que toute grandeur donnée dans l'intervalle $\left(0, \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$, ε étant une quantité fixe aussi petite qu'on le veut, tandis que $\cos(a \sin x)$ ne surpasse pas l'unité. D'autre part, la portion de l'intégrale comprise entre les limites $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$, $\frac{\pi}{2}$ est moindre en valeur absolue que

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} dx = \varepsilon.$$

Il résulte de là, nécessairement,

$$\int_0^\infty \frac{\sin z dz}{z} = \frac{\pi}{2}.$$

On trouve de même, l. $(1 + x)$ étant développable par la série équiconvergente

$$\text{l.}(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

pour toute valeur absolue de $x < 1$,

$$\int_0^x \frac{\text{l.}(1 + x)}{x}\, dx = x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} - \frac{x^4}{4^2} + \dots,$$

et comme la série reste convergente pour $x = 1$,

$$\int_0^1 \frac{\text{l.}(1 + x)}{x}\, dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{12},$$

d'après une formule numérique connue.

328. Comme dernier exemple de la détermination d'une intégrale

définie au moyen des séries, considérons

$$\int_0^x \frac{e^{-ax}\sin bx dx}{x}, \quad a > 0.$$

D'après la formule de Maclaurin, nous avons

$$\sin bx = bx - \frac{b^3x^3}{1.2.3} + \cdots \pm \frac{b^{2n-1}x^{2n-1}}{1.2\ldots(2n-1)} \pm \frac{b^{2n}x^{2n}}{1.2\ldots 2n}\sin(\theta bx),$$

θ étant > 0 et < 1. On en conclut, en posant

$$P_{2p} = \int_0^x e^{-ax}x^{2p}dx,$$

$$\int_0^x \frac{e^{-ax}\sin bxdx}{x} = bP_0 - \frac{b^3}{1.2.3}P_2 + \cdots \pm \frac{b^{2n-1}}{1.2\ldots(2n-1)}P_{2n-2}$$
$$\pm \frac{b^{2n}}{1.2\ldots 2n}\int_0^\infty e^{-ax}\,x^{2n}\sin(\theta bx)\,dx.$$

La dernière intégrale a une valeur absolue moindre que P_{2n}. Faisons tendre x xers ∞, observons que l'on a (**320**)

$$\lim_{x=\infty} P_{2p} = \int_0^\infty e^{-ax}x^{2p}\,dx = \frac{1.2\ldots 2p}{a^{2p+1}},$$

et il viendra

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}\sin bx\,dx}{x} = \frac{b}{a} - \frac{1}{3}\frac{b^3}{a^3} + \frac{1}{5}\frac{b^5}{a^5} - \cdots \pm \frac{1}{2n-1}\frac{b^{2n-1}}{a^{2n-1}} \pm \frac{\lambda}{2n}\frac{b^{2n}}{a^{2n}},$$

λ désignant un nombre moindre que l'unité. Ce dernier terme tend vers zéro lorsque n croît indéfiniment, si l'on a \A$b \leqq a$, et l'on reconnaît la série convergente qui a pour somme arc tg $(b : a)$. On a donc, pour toute valeur de b moindre numériquement que a,

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}\sin bx\,dx}{x} = \text{arc tg}\frac{b}{a}.$$

Exercices.

1. $$\int_0^x \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{3}\,\mathrm{l.}\,\frac{1+x}{\sqrt{1-x+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{arc tg}\,\frac{x\sqrt{3}}{2-x} = x - \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^{10}}{10} + \cdots$$
$$(-1 < x \leqq 1).$$

2. $\int_0^x \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} = x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \frac{x^{11}}{11} - \cdots,$

$$(-1 \leqslant x \leqslant 1).$$

3. $\int_0^x \frac{\operatorname{arc\,tg} x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}(\operatorname{arc\,tg} x)^2 = \frac{x^2}{2} - \left(1+\frac{1}{3}\right)\frac{x^4}{4} - \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\frac{x^6}{6} - \cdots,$

$$(-1 \leqslant x \leqslant 1).$$

4. $\int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg} x\,dx}{x} = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \cdots$

5. $\int_0^1 x^{ax}dx$. — *R.* On développe $x^{ax} = e^{ax\,\mathrm{l}.\,x}$ par la série exponentielle, on est ramené à des intégrales de la forme $\int x^p (\mathrm{l}.\,x)^p\,dx$ (**302**). On trouvera

$$\int_0^1 x^{ax}dx = 1 - \frac{a}{2^2} + \frac{a^2}{3^3} - \frac{a^3}{4^4} + \frac{a^4}{5^5} - \cdots$$

6. $\int_0^\pi e^{a\cos x}\cos(a\sin x)\,dx = \pi.$

7. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-ax}\,dx}{1+\cos^2 x} = \frac{1}{a}\left(e^{\frac{a\pi}{2}} - e^{-\frac{a\pi}{2}}\right)\left[1 - \frac{1.2}{a^2+2^2} + \frac{1.2.3.4}{(a^2+2^2)(a^2+4^2)} - \cdots\right]$

8. $\int_0^1 (1-x)^{z-1}e^{ax}\,dx = \frac{1}{z} + \frac{a}{z(z+1)} + \frac{a^2}{z(z+1)(z+2)} + \cdots$

On obtient cette série au moyen de l'intégration par partie; l'expression du reste après le $n^{\text{ième}}$ terme résulte du calcul et montre la convergence de la série.

9. Démontrer la formule plus générale

$$\int_0^\infty e^{-zt} f(1-e^{-t})\,dt = \frac{f(0)}{z} + \frac{f'(0)}{z(z+1)} + \frac{f''(0)}{z(z+1)(z+2)}$$

$$+ \cdots + \frac{f^{n-1}(0)}{z(z+1)\ldots(z+n-1)} + \frac{1}{z(z+1)\ldots(z+n-1)}\int_0^\infty e^{-(z+n)t} f^n(1-e^{-t})\,dt.$$

CHAPITRE XXXIV.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DU CALCUL INTÉGRAL.

329. Le calcul intégral s'applique avec succès à un grand nombre de problèmes importants de la géométrie, tels que la quadrature des aires planes, la rectification des courbes, etc. En effet, ces problèmes se ramènent à trouver la limite d'une somme d'infiniment petits, et en s'appuyant sur les principes de la méthode infinitésimale (**47**, **48**) et sur les propriétés des fonctions continues, on parvient à mettre l'élément infinitésimal de la grandeur cherchée sous la forme simplifiée d'une fonction d'une certaine variable multipliée par l'accroissement infiniment petit de cette variable. La limite de la somme de ces éléments sera donc une intégrale définie et au moyen du théorème du n° **313**, il suffira de calculer l'intégrale indéfinie de la fonction sous le signe $\int$ pour obtenir la valeur de la grandeur cherchée.

§ 1. QUADRATURE DES COURBES PLANES.

330. *Coordonnées rectilignes.* — Soient $y = f(x)$ l'équation d'une courbe plane BM (fig. 48) rapportée aux axes OX, OY se coupant sous un angle γ, et S = ABMP l'aire comprise entre cette courbe, l'axe des x et deux ordonnées AB, MP qui correspondent aux abscisses x_0 et x. Décomposons cette aire en segments infiniment petits $mpp'm'$ par des parallèles à l'axe des y; soient x_{i-1}, x_i les abscisses Op, Op', $\delta_i = x_i - x_{i-1}$ la distance pp'. L'aire du segment $mpp'm'$ étant évidemment comprise entre celles des deux parallélogrammes de même base pp', construits sur la plus petite et la plus grande des ordonnées de la courbe dans l'intervalle δ_i, si l'on désigne par ξ_i une certaine valeur de x prise dans cet intervalle, on pourra poser

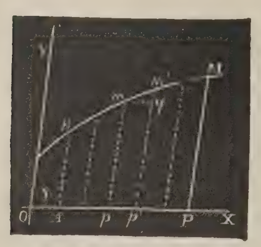


Fig. 48.

$$\text{aire } mpp'm' = f(\xi_i)\, \delta_i \sin\gamma,$$

$$\text{aire ABMP} = \sin\gamma \sum f(\xi_i)\, \delta_i,$$

et en faisant tendre vers zéro les éléments δ_i, on aura à la limite

(1) $$S = \sin\gamma \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx.$$

Si les axes sont rectangulaires, $\sin\gamma = 1$, donc

(2) $$S = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx.$$

On conclut de là que l'aire comprise entre une ordonnée fixe et une ordonnée variable, considérée comme fonction de l'abscisse de celle-ci, a pour différentielle $f(x)\,dx$ ou $y\,dx$, les axes étant rectangulaires.

331. *Parabole.* — La parabole, rapportée à un diamètre OX et à la tangente OY (fig. 49) à l'origine de ce diamètre, a pour équation $y^2 = 2bx$, d'où

$$f(x) = \sqrt{2b}.x^{\frac{1}{2}}.$$

L'aire OMP entre la courbe, l'abscisse $\mathrm{OP} = x$ et l'ordonnée $\mathrm{MP} = y$, est donc, d'après (1),

$$S = \sqrt{2b}\sin\gamma \int_0^x x^{\frac{1}{2}}\,dx = \sqrt{2b}\sin\gamma.\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$$

ou, en vertu de l'équation de la courbe,

$$S = \frac{2}{3}xy\sin\gamma.$$

Fig. 49.

Cette aire vaut donc les deux tiers de celle du parallélogramme OPMQ construit sur OP et MP. Si l'on prolonge MP jusqu'à sa rencontre en M′ avec la courbe, on verra que l'aire OPM′ est exprimée, abstraction faite du signe, par la même intégrale, puisque OX est un diamètre des cordes parallèles à OY. Il en résulte que *le segment* MOM′ *entre la parabole et une corde quelconque* MM′ *vaut les deux tiers du parallélogramme* MQ Q′M′ *construit sur cette corde et sur sa flèche* OP.

332. *Segment circulaire.* — L'équation du cercle rapporté à deux diamètres rectangulaires est $x^2 + y^2 = a^2$; le segment compris entre les deux ordonnées positives qui répondent à $x = 0$ et $x = x$, a donc pour valeur

$$S = \int_0^x dx\sqrt{a^2 - x^2}.$$

On trouve facilement, par la substitution $x = a \sin z$, que cette intégrale a pour expression

$$\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a},$$

et si l'on y fait $x = a$, d'où $y = 0$, on aura pour l'aire du quart de cercle

$$S = \frac{\pi a^2}{4}.$$

L'ordonnée de l'ellipse qui a pour demi-axes a et b, a pour expression

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2};$$

elle se déduit de celle du cercle de rayon a par l'introduction du facteur constant $b : a$; il en sera donc de même pour les aires correspondant à une même abscisse. Il s'ensuit que l'aire du quart de l'ellipse est

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{\pi a^2}{4} = \frac{\pi ab}{4},$$

et l'aire totale de l'ellipse égale πab.

333. *Hyperbole rapportée à ses asymptotes.* — L'équation de la courbe, c designant l'excentricité, est

$$xy = \frac{c^2}{4} \quad \text{ou} \quad y = \frac{c^2}{4x}.$$

Donc, γ étant l'angle des asymptotes,

$$S = \frac{c^2}{4} \sin \gamma \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = \frac{c^2}{4} \sin \gamma \, \mathrm{l.} \left(\frac{x}{x_0}\right).$$

On remarquera que S deviendrait infini si l'on faisait $x_0 = 0$, c'est-à-dire si l'on comptait l'aire à partir de l'asymptote OY.

334. *Cycloïde.* — Si l'on prend pour variable d'intégration l'angle ω (**184**), on aura

$$y dx = a^2 (1 - \cos \omega)^2 d\omega,$$

et l'on trouvera

$$\int (1 - \cos \omega)^2 d\omega = \frac{3}{2}\omega - 2 \sin \omega + \frac{1}{2} \sin \omega \cos \omega + C.$$

Donc, si l'on compte l'aire de la cycloïde à partir de l'origine O pour

laquelle $\omega = 0$, jusqu'à une ordonnée MP qui répond à une valeur ω de l'angle variable, on aura

$$S = a^2\left(\frac{3}{2}\omega - 2\sin\omega + \frac{1}{2}\sin\omega\cos\omega\right).$$

Retranchons cette aire OMP (fig. 50) de celle du rectangle OPFG qui a pour valeur $2ax = 2a^2(\omega - \sin\omega)$, le reste, c'est-à-dire l'aire OMFG, sera égal à

$$\frac{a^2}{2}(\omega - \sin\omega\cos\omega),$$

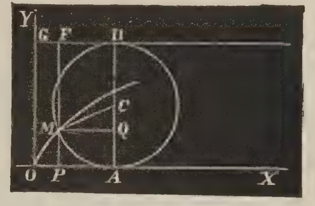


Fig. 50.

ce qui est précisément l'aire du segment AMQ déterminé, dans le cercle générateur, par la perpendiculaire MQ sur le diamètre AB. On a donc

$$surf.\ \text{OMFG} = surf.\ \text{AMQ}.$$

Pour $\omega = 2\pi$, on trouve $S = 3\pi a^2$: *L'aire totale entre une arcade de cycloïde et sa base est triple de l'aire du cercle générateur.*

335. La *cissoïde* est représentée par l'équation

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x} = \frac{x^4}{2ax - x^2},$$

a étant le rayon du cercle générateur. Cette courbe, symétrique par rapport à l'axe des x, a une asymptote parallèle à l'axe des y, représentée par $x = 2a$. L'aire comprise entre la courbe, l'axe des x et cette asymptote a donc pour expression

$$S = \int_0^{2a} \frac{x^2 dx}{\sqrt{2ax - x^2}}.$$

Si, dans la formule du n° **320**,

$$\int_0^2 \frac{x^m\,dx}{\sqrt{ax - x^2}} = \frac{1.3\ldots(2m-1)}{2.4\ldots 2m}\pi a^m,$$

on remplace a par $2a$ et m par 2, on aura

$$S = \frac{3\pi a^2}{2},$$

et en doublant cette valeur, on trouvera $3\pi a^2$ pour l'espace indéfini

compris entre la cissoïde et son asymptote. Cette aire est donc égale à celle de l'arcade de cycloïde engendrée par le cercle de rayon a.

C'est là un premier exemple d'un espace non fermé qui possède une aire finie et déterminée.

336. Considérons encore la courbe représentée par l'équation

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1,$$

m, n étant des constantes positives, et cherchons l'aire S entre cette courbe et les axes positifs. Cette aire est finie, car on a

$$y = b\left(1 - \frac{x^m}{a^m}\right)^{\frac{1}{n}},$$

et pour $x = 0$, $y = b$; pour $x = a$, $y = 0$. On a donc

$$S = b\int_0^a \left(1 - \frac{x^m}{a^m}\right)^{\frac{1}{n}} dx,$$

ou, en posant $x = az^{\frac{1}{m}}$, substituant, et faisant pour abréger $1 : m = \mu$, $1 : n = \nu$,

$$(\alpha) \qquad S = ab\mu \int_0^1 z^{\mu-1}(1-z)^\nu\, dz.$$

Nous désignerons cette intégrale par $B_{\nu,\,\mu-1}$. Si dans les équations (7) et (8) du nº **303** nous faisons $a = 1$, $b = -1$, $p = \nu$, $q = \mu - 1$ pour les accommoder au problème actuel, elles donneront, puisque ν et μ sont des quantités positives,

$$B_{\nu,\,\mu-1} = \frac{\nu}{\mu+\nu} B_{\nu-1,\,\mu-1}, \qquad B_{\nu,\,\mu-1} = \frac{\mu-1}{\mu+\nu} B_{\nu,\,\mu-2}.$$

On déduira d'abord de la seconde, en supposant $\mu \geqslant k+1$, k étant entier et positif,

$$(\beta) \qquad B_{\nu,\,\mu-1} = \frac{(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-k)}{(\mu+\nu)(\mu+\nu-1)\ldots(\mu+\nu-k+1)} B_{\nu,\,\mu-k-1}.$$

Puis, en supposant $\nu \geqslant k'$, k' entier et positif, la première donnera

$$B_{\nu,\,\mu-k-1} = \frac{\nu(\nu-1)\ldots(\nu-k'+1)}{(\mu+\nu-k)(\mu+\nu-k-1)\ldots(\mu+\nu-k-k'+1)} B_{\nu-k',\,\mu-k-1}.$$

Substituant dans (β), on aura

$$(\gamma)\quad B_{\nu,\,\mu-1} = \frac{(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-k)\,\nu(\nu-1)\ldots(\nu-k'+1)}{(\mu+\nu)(\mu+\nu-1)\ldots(\mu+\nu-k-k'+1)}\,B_{\nu-k',\,\mu-k-1}.$$

On ramènera ainsi les exposants de z et de $1-z$ à être compris entre zéro et l'unité.

Si μ est un nombre entier $k+1$, et si l'on observe que

$$B_{\nu,\,0} = \int_0^1 (1-z)^\nu\,dz = \left[-\frac{(1-z)^{\nu+1}}{\nu+1}\right]_0^1 = \frac{1}{\nu+1},$$

on aura par les formules (β) et (α),

$$(\delta)\qquad S = ab\,\frac{1.2\ldots(\mu-1)\,\mu}{(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\mu+\nu)}.$$

Si μ est > 0 et < 1, et si $\mu+\nu$ est un nombre entier, on fera, dans l'équation (γ), $k=0$ et $k'=\mu+\nu$, et l'on aura

$$B_{\nu,\,\mu-1} = \frac{\nu(\nu-1)\ldots(1-\mu)}{(\mu+\nu)(\mu+\nu-1)\ldots 2.1}\cdot\int_0^1 z^{\mu-1}(1-z)^{-\mu}\,dz.$$

Mais la substitution

$$z = \frac{u}{1+u},\quad 1-z = \frac{1}{1+u},\quad dz = \frac{du}{(1+u)^2},$$

transforme cette intégrale en celle-ci

$$\int_0^1 z^{\mu-1}(1-z)^{-\mu}\,dz = \int_0^\infty \frac{u^{\mu-1}\,du}{1+u} = \frac{\pi}{\sin\mu\pi},$$

d'après la formule du n° **322**, puisque μ est une fraction moindre que l'unité. On a donc, dans ce cas

$$S = ab\,\frac{\mu\nu(\nu-1)\ldots(1-\mu)}{1.2\ldots(\mu+\nu)}\cdot\frac{\pi}{\sin\mu\pi}.$$

Dans le cas de l'ellipse, on a $\mu=\nu=1:2$, $\mu+\nu=1$,

$$S = \frac{\pi ab}{4}.$$

Pour la courbe

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

on aura

$$\mu = \nu = \frac{3}{2}, \quad \mu + \nu = 3, \quad k = 1,$$

$$S = \frac{3\pi ab}{32}.$$

337. Les équations (1) et (2) donnent nécessairement, lorsque $f(x)$ est négatif dans l'intervalle (x_1, x), des valeurs négatives pour S, en sorte que les aires situées au-dessous de l'axe des x sont négatives. S'il arrive que la courbe traverse cet axe plusieurs fois, les aires comprises entre cette courbe et l'axe OX, seront tantôt d'un coté, tantôt de l'autre par rapport à OX, l'intégrale définie fournira l'excès des aires situées du côté des y positifs sur les aires situées du côté des y négatifs.

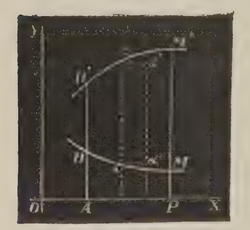


Fig. 51.

Il arrive fréquemment que l'aire S à évaluer est comprise entre deux courbes BM, B'M' (fig. 51) et deux parallèles AB', PM' à l'axe des y. Or, si l'on décompose l'aire BB'M'M en segments infiniment petits par des parallèles à l'axe des y, on verra, comme au n° **330**, que si l'on désigne par $f_1(x)$, $f_2(x)$ les ordonnées respectives des courbes BM, B'M', le segment compris entre deux parallèles $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ à OY correspondant aux abscisses x_{i-1}, x_i sera représenté, les axes étant rectangulaires, par une expression de la forme

$$[f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)]\,\delta_i,$$

et l'on aura encore

$$(3) \qquad S = \int_{x_0}^{x} [f_2(x) - f_1(x)]\,dx.$$

S'il s'agit, par exemple, d'évaluer l'aire comprise dans une courbe fermée que les parallèles à l'axe des y ne coupent qu'en deux points, on emploiera la formule (3), en prenant pour $f_1(x)$ et $f_2(x)$ respectivement la plus petite et la plus grande valeur de y tirées de l'équation de la courbe, et pour x_0, x respectivement la plus petite et la plus grande valeur de x auxquelles répondent des points de la courbe.

338. *Coordonnées polaires.* — Soit $r = f(\theta)$ l'équation d'une courbe en coordonnées polaires. Pour évaluer l'aire S du secteur compris entre cette courbe et deux rayons vecteurs OA, OM (fig. 52), on la partagera en secteurs infiniment petits par des rayons vecteurs. L'aire du secteur mOm' entre deux rayons Om, Om' qui comprennent un angle $\Delta\theta$ sera comprise entre celles des deux secteurs circulaires de même ouverture, ayant pour rayons le plus petit et le plus grand des rayons vecteurs de la courbe entre Om et Om'. Elle s'exprimera donc par

$$\frac{1}{2}\rho^2\Delta\theta,$$

Fig. 52.

ρ étant une moyenne entre ces rayons, et l'on aura, par suite,

$$(4) \qquad S = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta} r^2 d\theta,$$

θ_0, θ se rapportant aux rayons OA, OM. On remplacera r par sa valeur $f(\theta)$, on effectuera l'intégration, et l'on aura l'aire cherchée.

339. *Exemples.* — 1° *Folium de Descartes.* — L'équation de cette courbe,

$$y^3 - 3axy + x^3 = 0,$$

transformée en coordonnées polaires, prend la forme

$$r = \frac{3a \sin\theta \cos\theta}{\sin^3\theta + \cos^3\theta}.$$

L'aire du secteur compris entre l'axe polaire ($\theta_0 = 0$) et un rayon vecteur quelconque a pour valeur

$$S = \frac{9a^2}{2}\int_0^{\theta} \frac{\sin^2\theta \cos^2\theta \, d\theta}{(\sin^3\theta + \cos^3\theta)^2}.$$

Pour intégrer, on divise haut et bas par $\cos^6\theta$, on pose $z = \mathrm{tg}^3\theta$ et l'on a

$$S = \frac{3a^2}{2}\int_0^{z} \frac{dz}{(1+z)^2} = -\frac{3a^2}{2}\left[\frac{1}{1+z}\right]_0^{z} = \frac{3a^2 \,\mathrm{tg}^3\theta}{2(1+\mathrm{tg}^3\theta)}.$$

Si l'on fait $\theta = \pi : 2$, on obtient pour l'aire totale de la *feuille* $3a^2 : 2$.

2° *Secteur elliptique.* — $OA = a$, $OB = b$ étant les deux demi-axes (fig. 53), sur le grand axe comme diamètre décrivons un cercle; soit N le point de ce cercle qui a même projection P sur OA que le point M (r, θ) de l'ellipse; posons $BON = u$. Nous aurons

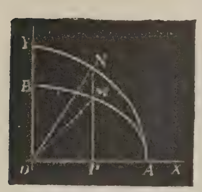


Fig. 53.

$$x = r\cos\theta = a\sin u,\quad y = r\sin\theta = \frac{b}{a}NP = b\cos u,$$

d'où

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{b}{a}\cot u,\quad \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = -\frac{b}{a}\frac{du}{\sin^2 u},\quad r^2\,d\theta = -ab\,du.$$

L'aire du secteur elliptique BOM a donc pour expression

$$S = \frac{1}{2}\int_\theta^{\frac{\pi}{2}} r^2\,d\theta = -\frac{ab}{2}\int_u^0 du = \frac{abu}{2}.$$

340. On verrait de même que l'aire comprise entre deux courbes AM, A'M', ayant respectivement pour équations

$$r_1 = f_1(\theta),\quad r_2 = f_2(\theta),\quad r_1 < r_2,$$

et deux rayons vecteurs OAA', OMM' s'exprime par l'intégrale

(5) $$S = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta} (r_2^2 - r_1^2)\,d\theta.$$

Exercices.

1. Aire de l'hyperbole entre la courbe, l'axe réel et une ordonnée quelconque y.

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},\quad S = \frac{xy}{2} - \frac{ab}{2}\,\mathrm{l.}\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right).$$

2. Aire de la chaînette, comptée de l'axe de la courbe.

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right);\quad x_1 = 0,\quad S = \frac{a^2}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

3. Aire comprise entre l'axe des x, la courbe $y\,(2ax - x^2)^{\frac{1}{2}} = bx$, et son asymptote $x = 2a$.

$$S = \pi ab.$$

4. La courbe

$$y = \frac{x^2}{a^2}(a - x)$$

passe par l'origine O, présente un point d'inflexion A pour $x = a : 3$, $y = 2a : 27$; un point B d'ordonnée maximum pour $x = 2a : 3$, $y = 4a : 27$, de sorte que les points O, A, B sont en ligne droite; enfin, elle coupe l'axe des x en C pour $x = a$. L'aire OABC entre la courbe et l'axe des x est égale à $a^2 : 12$; l'aire OMAP terminée au point d'inflexion $= a^2 : 12 \cdot 9$; l'aire OABQ terminée au point $B = 4a^2 : 92$ et vaut le triangle OBQ. Les aires comprises entre la courbe et la sécante OAB, de part et d'autre, sont égales entr'elles (de Sluse).

5. *Lemniscate de Bernoulli;* secteur compté de l'axe polaire.

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta, \quad S = \frac{a^2}{2} \sin 2\theta.$$

Aire totale comprise dans la courbe : a^2.

6. *Spirale logarithmique.*

$$r = ae^{m\theta}, \quad S = \frac{a^2}{4m}(e^{2m\theta} - e^{2m\theta_0}).$$

7. *Développante du cercle.* (Ch. XIV, ex. **11**.)

$$r^2 = a^2(1 + \omega^2), \quad \theta = \omega - \text{arc tg}\, \omega; \quad \theta_0 = 0.$$

$$S = \frac{a^2 \omega^3}{6}.$$

8. *Podaire de l'ellipse* par rapport à son centre.

$$r^2 = a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta; \quad \theta_0 = 0, \quad S = \frac{a^2 + b^2}{4}\theta + \frac{a^2 - b^2}{4}\sin\theta\cos\theta.$$

Aire totale de la courbe fermée = la moitié du cercle qui a pour rayon $\sqrt{a^2 + b^2}$.

9. Aire de la courbe fermée qui a pour équation

$$r = 2a \cos 2\theta \cos\theta. \qquad R. \quad S = a^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\right).$$

10. *Lieu des projections du centre de l'ellipse sur les normales.*

$$r = \frac{(a^2 - b^2)\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}}; \quad \theta_0 = 0,$$

$$S = \frac{a^2 + b^2}{4}\theta + \frac{a^2 - b^2}{4}\sin\theta\cos\theta - \frac{ab}{2}\text{arc tg}\left(\frac{b}{a}\text{tg}\,\theta\right).$$

Aire totale de la courbe, composée de quatre feuilles égales $= \pi(a - b)^2 : 2$.

11. Une corde de longueur constante $c + c'$ se meut en appuyant ses extrémités sur une courbe fermée donnée. L'aire comprise entre la courbe et le lieu du point M qui partage la corde en deux segments c et c' a pour expression $\pi cc'$, quelle que soit la courbe donnée.

§ 2. RECTIFICATION DES COURBES PLANES.

341. L'équation d'une courbe plane étant donnée en coordonnées rectangulaires, $y = f(x)$, la longueur de l'arc de cette courbe, depuis un point A pour lequel $x = x_0$ jusqu'à un point variable M (x,y), est d'après la formule du n° **201**, une fonction continue s de x qui a pour dérivée

$$\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}.$$

D'après cela, on a immédiatement

$$(1) \qquad s = \int_{x_0}^{x} dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = \int_{x_0}^{x} dx \sqrt{1 + f'(x)^2}.$$

Si l'équation de la courbe est donnée en coordonnées polaires, $r = f(\theta)$, on verra par un raisonnement semblable que l'on a

$$(2) \qquad s = \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta \sqrt{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}} = \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2},$$

θ_0 et θ se rapportant aux deux extrémités de l'arc. Dans ces formules, s est supposé croître dans le sens où la variable indépendante, x ou θ, est elle-même croissante.

342. *Exemples.* — 1° *Parabole.* — L'arc est compté du sommet de la courbe, l'axe étant pris pour axe des y. On a $x_0 = 0$, $x^2 = 2py$, d'où

$$f(x) = y = \frac{x^2}{2p}, \quad f'(x) = \frac{x}{p}, \quad s = \frac{1}{p}\int_0^x dx \sqrt{p^2 + x^2}.$$

Mais on sait que

$$\int dx \sqrt{p^2 + x^2} = p^2 \int \frac{dx}{\sqrt{p^2 + x^2}} + \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{p^2 + x^2}} = p^2 \int \frac{dx}{\sqrt{p^2 + x^2}}$$
$$+ x\sqrt{p^2 + x^2} - \int dx \sqrt{p^2 + x^2},$$

d'où, d'après une formule du n° **297**,

$$\int dx \sqrt{p^2 + x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{p^2 + x^2} + \frac{p^2}{2} \text{l.}\left(x + \sqrt{p^2 + x^2}\right) + \text{C}.$$

Retranchant de cette intégrale sa valeur pour $x = 0$, on trouve pour l'arc de parabole

$$s = \frac{x}{2p}\sqrt{p^2 + x^2} + \frac{p}{2} \text{l.}\left(\frac{x + \sqrt{p^2 + x^2}}{p}\right),$$

2° *Ellipse.* — On exprime les coordonnées de la courbe au moyen de l'angle u du n° **339**,

$$x = a \sin u,\ y = b \cos u,$$

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = du \sqrt{a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u} = adu \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 u},$$

en posant $a\varepsilon = \sqrt{a^2 - b^2}$. Si l'arc est compté du sommet B du petit axe, on aura

$$s = a \int_0^u du \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 u}.$$

Cette intégrale, qu'on appelle l'*intégrale elliptique de seconde espèce*, ne peut s'exprimer sous forme finie, mais comme on a $\varepsilon < 1$, on peut développer le radical en série équiconvergente et l'on a

$$(1 - \varepsilon^2 \sin^2 u)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sin^2 u - \frac{1}{2.4} \varepsilon^4 \sin^4 u - \frac{1.3}{2.4.6} \varepsilon^6 \sin^6 u + \cdots,$$

d'où, par le thérorème du n° **323**,

$$s = a \left[u - \frac{\varepsilon^2}{2} \int_0^u \sin^2 u du - \frac{\varepsilon^4}{2.4} \int_0^u \sin^4 u du - \frac{1.3\ \varepsilon^6}{2.4.6} \int_0^u \sin^6 u du + \cdots \right].$$

Toutes ces intégrales se calculent sans peine (**307**). Pour avoir le quart du périmètre de l'ellipse, on fera $u = \pi : 2$, et en appliquant la formule

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} u du = \frac{1.3 \ldots (2n - 1)}{2.4 \ldots 2n} \frac{\pi}{2},$$

on aura en série convergente l'expression demandée,

$$s = \frac{\pi a}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \varepsilon^2 - \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \frac{\varepsilon^4}{3} - \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \frac{\varepsilon^6}{5} - \cdots \right].$$

3° *Cycloïde.* — On prendra l'angle ω (**184**) pour variable d'intégration. On trouvera

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = ad\omega \sqrt{(1 - \cos \omega)^2 + \sin^2 \omega} = 2a \sin \tfrac{1}{2}\omega\, d\omega.$$

On en déduit, pour la longueur d'un arc de cycloïde commençant à $\omega = 0$ et se terminant au point ω,

$$s = 4a (1 - \cos \tfrac{1}{2} \omega),$$

et pour la longueur d'une arcade entière,

$$s = 8a,$$

résultat connu (**213**, IV).

4° *Cardioïde.* $r = 2a(1 + \cos\theta)$, $\theta_0 = 0$.

On a

$$\frac{dr}{d\theta} = -2a\sin\theta, \quad s = 4a\int_0^\theta \cos\frac{1}{2}\theta d\theta = 8a\sin\frac{1}{2}\theta.$$

Le périmètre entier de la courbe a pour mesure $16a$.

5° *Lemniscate.* $r^2 = a^2\cos 2\theta$, $\theta_0 = 0$.

On trouve

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{a^2}{r}\sin 2\theta, \quad s = \int_0^\theta d\theta\sqrt{a^2\cos 2\theta + \frac{a^4}{r^2}\sin^2 2\theta}$$

ou

$$s = a\int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}.$$

On ramène cette intégrale à une intégrale elliptique de première espèce en posant

$$\sqrt{2}\sin\theta = \sin u, \quad \sqrt{2}\cos\theta d\theta = \cos u du,$$

$$\sqrt{\cos 2\theta} = \sqrt{1 - 2\sin^2\theta} = \sqrt{1 - \sin^2 u} = \cos u,$$

$$s = \frac{a}{\sqrt{2}}\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 u}}.$$

Exercices.

1. *Chaînette* (Ch. XVII, ex. **1**). — On trouve pour l'arc, compté à partir du point le plus bas ($x_0 = 0$) jusqu'au point (x, y),

$$s = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) = \sqrt{y^2 - a^2}.$$

2. *Hyperbole.* — L'équation de la courbe est

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Posant $a\varepsilon = \sqrt{a^2 + b^2}$ ($\varepsilon > 1$), $x = a : \cos u$, on trouve pour la longueur de l'arc compté du sommet

$$s = a\varepsilon\int_0^u \frac{du}{\cos^2 u}\left(1 - \frac{\cos^2 u}{\varepsilon^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

et en développant en série,

$$s = a\varepsilon \operatorname{tg} u - \frac{a}{\varepsilon}\left[\frac{u}{2} + \frac{1}{2.4\varepsilon^2}\int_0^u \cos^2 u\,du + \frac{1.3}{2.4.6\varepsilon^4}\int_0^u \cos^4 u\,du + \cdots\right].$$

La différence entre l'arc et l'asymptote terminés à la même valeur de x a une limite finie pour $x = \infty$, savoir

$$\frac{\pi a}{4\varepsilon}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{2\varepsilon^2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \frac{1}{3\varepsilon^4} + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \frac{1}{4\varepsilon^6} + \cdots\right].$$

3. *Sinusoïde.* — $y = \sin x$, $x_0 = 0$. On trouve

$$s = \sqrt{2}\int_0^x dx \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 x}.$$

L'arc compris entre deux rencontres de la courbe avec l'axe des x égale le quart du contour de l'ellipse qui a pour demi-grand axe $\sqrt{2}$, pour excentricité 1.

4. *Spirale logarithmique.* $r = ae^{m\theta}$, $\theta_0 = -\infty$, l'arc compté du pôle asymptote.

$$s = \frac{a\sqrt{1+m^2}}{m}e^{m\theta} = \frac{\sqrt{1+m^2}}{m}r.$$

5. *Développante du cercle* (Ch. XIV, Ex. **13**).

$$r^2 = a^2(1+\omega^2), \quad d\theta = \frac{\omega^2 d\omega}{1+\omega^2}, \quad s = \frac{a\omega^2}{2}.$$

6. *Spirale d'Archimède.* $r = a\theta$, $\theta_0 = 0$.

$$s = \frac{a}{2}[\theta\sqrt{1+\theta^2} + \mathrm{l.}\,(\theta + \sqrt{1+\theta^2})].$$

7. $r = \frac{a}{2}(\theta^2 - 1)$, $\theta_0 = 0$. — On a $s = \frac{a\theta}{2}\left(\frac{\theta^2}{3} + 1\right)$.

8. Démontrer que, dans la lemniscate, les arcs comptés de $\theta = 0$ à $\theta = \theta'$, et de $\theta = \frac{\pi}{4}$ à $\theta = \theta''$, sont égaux entr'eux si les angles θ' et θ'' vérifient la relation

$$\sqrt{2}\cos\theta'\cos\theta'' = 1.$$

9. Démontrer que dans la courbe $3y = x^3$, si l'on appelle s, s', s'', s''' les arcs comptés de l'origine aux points qui ont respectivement pour abscisses x, x', x'', x''', et t, t', t'', t''' les longueurs des tangentes correspondant à ces points, et si l'on pose les relations

$$x'x'' = 1, \quad xx''' = 1,$$

on aura

$$(s''' - s'') - (s' - s) = (t''' - t'') - (t' - t).$$

10. Démontrer que si l'on prend sur l'ellipse deux points M et M′, tels que les angles u correspondants (**339**, 2°) satisfassent à la relation

$$\operatorname{tg} u \operatorname{tg} u' = \frac{a}{b},$$

1° la distance l du point de contact à la projection du centre sur la tangente aura la même valeur pour ces deux points; 2° les arcs BM, AM′ compris respectivement entre ces points et les sommets de l'ellipse satisferont à la relation BM — AM′ $= l$; 3° on aura enfin l'équation

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2 u}} + \int_0^{u'} \frac{du'}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2 u'}} = const.$$

343. Pour obtenir l'expression de la longueur s de l'arc dans une courbe à double courbure, soient

$$x = f(t),\quad y = f_1(t),\quad z = f_2(t)$$

les équations de la courbe en fonction d'une variable auxiliaire t; x', y', z' les dérivées de x, y, z par rapport à t. On a établi au N° **226** que s est une fonction de t dont la différentielle a pour expression

$$ds = dt\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2},$$

donc

(3) $$s = \int_{t_0}^t dt\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2},$$

t_0 et t se rapportant aux extrémités de l'arc.

On pourra prendre pour variable t l'une des variables x, y, z.

344. Considérons la courbe, passant par l'origine,

$$x = a \sin\frac{y}{a},\quad z = \frac{a}{4}\,\mathrm{l.}\,\frac{a+x}{a-x},$$

qui est l'intersection de deux cylindres, l'un parallèle à l'axe des z, l'autre parallèle à l'axe des y. On a ici, en faisant $t = x$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}},\quad \frac{dz}{dx} = \frac{a^2}{2}\,\frac{1}{a^2 - x^2},\quad t_0 = 0,\quad t = x,$$

$$s = \int_0^x dx\sqrt{1 + \frac{a^2}{a^2 - x^2} + \frac{a^4}{4(a^2 - x^2)^2}} = \int_0^x \left[1 + \frac{a^2}{2(a^2 - x^2)}\right] dx$$

$$= x + \frac{a^2}{2}\int_0^x \frac{dx}{a^2 - x^2} = x + \frac{a}{4}\,\mathrm{l.}\left(\frac{a+x}{a-x}\right) = x + z.$$

Exercices.

1. Intersection de la sphère et du cylindre droit ayant pour base le cercle décrit sur un rayon de la sphère comme diamètre (Ch. XXIII, ex. **2**).

$$x = \sin^2\omega,\quad y = \sin\omega\cos\omega,\quad z = \cos\omega.$$

$$s = \sqrt{2}\int_0^\omega d\omega\sqrt{1 - \frac{1}{2}\cos^2\omega}.$$

La longueur de la branche fermée AMXA (fig. 54), qui est la moitié du périmètre de la courbe, est égale à celle d'une arcade de la sinusoïde (§ 2, ex. 3).

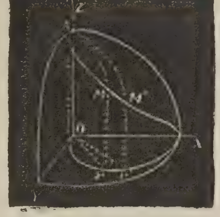


Fig. 54.

2. Arc de la courbe

$$y = \frac{x^2}{2a}, \quad z = \frac{x^3}{6a^2}$$

compté de l'origine. — *R.* $s = x + z$.

3. Intersection des deux cylindres

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad x = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

l'arc étant compté du sommet de l'hyperbole représentée par la première équation.

R. $$s = \varepsilon\sqrt{x^2 - a^2}, \quad a\varepsilon = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

4. L'équation d'une courbe sphérique est donnée en coordonnées ρ et ω (Ch. XXI, ex. 11); trouver l'expression de l'arc compté de $\omega = 0$, et appliquer à la *loxodromie* qui a pour équation

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\rho = e^{k\omega}.$$

R. $$s = \int_0^\omega d\omega\sqrt{\sin^2\rho + \frac{d\rho^2}{d\omega^2}}, \quad s = \frac{\sqrt{1 + k^2}}{k}(\rho - \rho_0).$$

§ 3. VOLUME D'UN SOLIDE.

345. Considérons une surface dont les sections, parallèles à un plan fixe, sont des courbes fermées dont l'aire est une fonction donnée $\varphi(x)$ de la distance du plan sécant au plan fixe. Le volume V compris sous cette surface, entre un plan donné $x = x_0$ et un plan variable quelconque x, est une fonction $F(x)$ de l'abscisse x de ce dernier, fonction dont l'accroissement $\Delta F(x)$, pour un accroissement Δx de la variable, est égal au volume de la tranche infiniment mince MPNM'P'N' (fig. 55) comprise entre les plans x, $x + \Delta x$. Projetons chacun des points de la surface latérale de la tranche MPNM'P'N' sur le plan de la section MPN, ces projections tomberont dans un certain espace qui sera limité extérieurement par un contour RSQ, intérieurement par un contour R'S'Q', et le volume de la tranche $\Delta F(x)$ sera évidemment compris entre ceux des cylindres qui ont pour bases respectives les aires limitées par les contours RSQ, R'S'Q', et pour hauteur commune l'épaisseur MK $= \Delta x$ de la tranche. Or, le rapport du volume de l'un quelconqne de ces deux cylindres, au volume

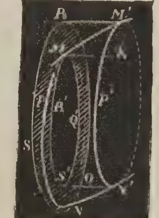


Fig. 55.

du cylindre de hauteur MK qui a pour base la section MPN, a pour limite l'unité, car ces trois cylindres ont même hauteur MK, et les aires limitées par les contours RSQ, R'S'Q' ont l'une et l'autre pour limite l'aire de la section MPN lorsque MK tend vers zéro. Il en est de même, par suite, du rapport des volumes de la tranche MPN M'P'N' et du dernier cylindre.

Or, le volume du cylindre qui a pour base MPN a pour expression $\varphi(x)\,\Delta x$, donc le volume V dont il s'agit est une fonction $F(x)$ de x qui a pour dérivée $\varphi(x)$, qui s'annule pour $x = x_0$; il a donc pour expression

$$(1) \qquad V = \int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx.$$

Toutes les fois que la fonction $\varphi(x)$ qui représente l'aire de la section sera donnée, la formule (1) ramènera à une simple intégration la détermination du volume V.

346. 1° *Ellipsoïde.* — L'ellipsoïde qui a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

a pour section par un plan x quelconque, une ellipse dont les demi-axes sont donnés par les expressions

$$b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Donc, d'après la valeur connue de l'aire de l'ellipse (**332**), nous aurons

$$\varphi(x) = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right),$$

et en prenant $x_0 = 0$,

$$V = \pi bc \int_0^x \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi bc\left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right).$$

Si l'on fait $x = a$, on a la moitié du volume total de l'ellipsoïde, qui est symétrique par rapport au plan YZ. Ce volume total est donc

$$\frac{4}{3}\pi abc.$$

Construisons le cylindre qui a pour base l'ellipse dont les axes sont $2a$, $2b$, dont la hauteur est égale au troixième axe $2c$. Son volume sera $2\pi abc$; *le volume de l'ellipsoïde en vaut les deux tiers.*

2° *Paraboloïde elliptique.* — La surface a pour équation

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=2x,$$

la section faite par un plan x est une ellipse dont les demi-axes sont $b\sqrt{2x}$, $c\sqrt{2x}$, et l'aire

$$\varphi(x)=2\pi bcx.$$

Le volume du paraboloïde entre la surface et un plan x normal à l'axe est donc

$$V=2\pi bc\int_0^x xdx=\pi bcx^2.$$

C'est la moitié du volume du cylindre qui a pour base la section faite par le plan x et pour hauteur la distance de ce plan au sommet.

347. Volume compris entre le plan XY, le plan $z=\alpha$, et la surface qui a pour équation

$$(x^2+y^2)^2(a^2+z^2)-(y^2-x^2)(z^2-a^2)z^2-4axyz^3=0.$$

La section faite par un plan z quelconque, projetée en vraie grandeur sur le plan XY, est une courbe dont l'équation est

$$(x^2+y^2)^2\left(1+\frac{a^2}{z^2}\right)-z^2(y^2-x^2)\left(1-\frac{a^2}{z^2}\right)-4xyz^2\frac{a}{z}=0.$$

Posant $a:z=\operatorname{tg}\zeta$, cette équation devient

$$(x^2+y^2)^2-z^2(y^2-x^2)\cos 2\zeta-2xyz^2\sin 2\zeta=0.$$

ou, en coordonnées polaires,

$$r^2-z^2\cos 2(\theta-\zeta)=0.$$

C'est une lemniscate dont z est le demi-axe, et dont l'aire totale (Ch. XXXIII, § 1, ex. **6**) est z^2.

On a donc ici

$$\varphi(z)=z^2,\quad V=\int_0^\alpha z^2dz=\frac{\alpha^3}{3}.$$

C'est le tiers du volume du cube de hauteur α.

348. *Solides de révolution.* — Une courbe plane BM (fig. 56), qui a pour équation $y=f(x)$, tourne autour de l'axe OX situé dans son plan; elle engendre une surface de révolution. La section faite par un plan normal à l'axe OX est un cercle dont

Fig. 56.

le rayon est l'ordonnée y de la courbe; on a ici $\varphi(x) = \pi y^2 = \pi f(x)^2$; le volume V entre le plan x_0 et un plan arbitraire x est donné par la formule

$$V = \pi \int_{x_0}^{x} y^2\, dx. \tag{2}$$

C'est la formule pour la cubature des solides de révolution.

Si la courbe génératrice est une cycloïde, on a

$$y^2 dx = a^3 (1 - \cos\omega)^3\, dx,$$

et en prenant $x_0 = 0$, d'où $\omega_0 = 0$,

$$V = \pi a^3 \int_0^{\omega} (1 - 3\cos\omega + 3\cos^2\omega - \cos^3\omega)\, d\omega$$

$$= \pi a^3 \left(\frac{5\omega}{2} - 4\sin\omega + \frac{3}{2}\sin\omega\cos\omega + \frac{\sin^3\omega}{3} \right).$$

$\omega = 2\pi$ donne, pour le volume engendré par une arcade entière, $5\pi^2 a^3$.

Si l'aire génératrice du volume est comprise entre deux courbes BM, B'M', situées d'un même côté de l'axe des x, et ayant pour équations

$$y_1 = f_1(x), \quad y_2 = f_2(x), \quad (y_1 < y_2),$$

la section normale à l'axe sera un anneau circulaire compris entre deux cercles de rayons y_1 et y_2; on aura $\varphi(x) = \pi(y_2^2 - y_1^2)$, et

$$V = \pi \int_{x_0}^{x} (y_2^2 - y_1^2)\, dx$$

exprimera le volume compris entre les plans x_0 et x normaux à l'axe.

Supposons que l'on prenne pour courbe génératrice le cercle

$$x^2 + (y - c)^2 = a^2, \quad c > a,$$

dont l'équation nous donne

$$y_1 = c - \sqrt{a^2 - x^2}, \quad y_2 = c + \sqrt{a^2 - x^2}, \quad y_2^2 - y_1^2 = 4c\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Le volume du *tore* engendré par la révolution de ce cercle autour de l'axe des x, entre les plans $x = 0$ et x, sera

$$V = 4\pi c \int_0^{x} dx \sqrt{a^2 - x^2} = 2\pi c \left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a} \right),$$

et le volume total sera, comme on le voit sans peine, égal à $2\pi^2 c a^2$.

Si c était $< a$, le cercle générateur serait coupé par l'axe OX; le

volume à évaluer se composerait de deux parties, l'une dont la section $\varphi(x)$ est un cercle ayant son centre sur l'axe et son rayon égal à $c+\sqrt{a^2-x^2}$; l'autre dont la section est un anneau circulaire, et qui se calculerait comme ci-dessus.

Dans tout ce qui précède, on a supposé que la fonction $\varphi(x)$ qui exprime l'aire de la section de la surface normalement à l'axe des x, était donnée d'avance. S'il en était autrement, le problème de la cubature exigerait une double intégration, comme on le verra plus loin.

Exercices.

1. Volume de l'hyperboloïde gauche

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

entre les plans $z=0$, $z=c$. *R.* $V=4\pi abc:3$.

2. Volume compris entre le paraboloïde $xy=az$, le plan $x+y+z=a$, et le plan XY.

R. $$\varphi(x)=\frac{x(a-x)^2}{2(a+x)},\quad V=a^3\left(\frac{17}{12}-\mathrm{l}.\,4\right).$$

3. Volume compris entre le plan XY et le conoïde qui a pour base l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

pour directrice rectiligne la droite $y=0$, $z=c$, la génératrice étant parallèle au plan YZ.

R. $$\varphi(x)=\frac{bc}{a}\sqrt{a^2-x^2},\quad V=\frac{\pi}{2}abc.$$

4. On prend pour directrices l'ellipse construite sur les demi-axes $OA=a$, $OC=c$ (fig. 57) dans le plan XZ, et une droite AB coupant les axes OX, OY aux distances respectives $OA=a$, $OB=b$; pour génératrice une ellipse MN dont le centre est sur OX et les axes parallèles à OY, OZ. Trouver le volume compris entre la surface et les trois plans coordonnés.

R. $$\varphi(x)=\frac{\pi bc}{4a^2}(a-x)\sqrt{a^2-x^2},\quad V=\frac{\pi abc}{4}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\right).$$

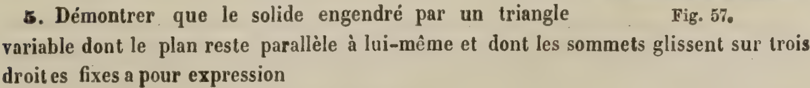


Fig. 57.

5. Démontrer que le solide engendré par un triangle variable dont le plan reste parallèle à lui-même et dont les sommets glissent sur trois droites fixes a pour expression

$$\frac{h}{6}(S_0+4S_1+S_2),$$

S_0, S_1, S_2 étant respectivement les aires des sections extrêmes et de la section moyenne, h la distance des sections extrêmes.

6. Volume engendré par la révolution de la chaînette (Ch. XVII, ex. **1**) autour de l'axe des x, entre le plan $x = 0$ et un plan x quelconque.

R.
$$V = \frac{\pi a^3}{4}\left(\frac{e^{\frac{2x}{a}} - e^{-\frac{2x}{a}}}{2} + \frac{2x}{a}\right).$$

7. Même problème, la courbe génératrice étant la logarithmique $y = a\,\mathrm{l}.\,x$.

R. $V = \pi a^2 x\,[(\mathrm{l}.x)^2 - 2\,\mathrm{l}.x + x]$.

8. Volume engendré par la révolution de la développée de l'ellipse (**223**, III) autour de l'axe des x.

R.
$$V = \frac{32}{105}\pi AB^2.$$

9. L'aire comprise entre la courbe qui a pour équation en coordonnées polaires $r = f(\theta)$ et deux rayons vecteurs définis par les angles θ_0 et θ, tourne autour de l'axe polaire. Prouver que le volume engendré a pour expression

$$V = \frac{2}{3}\pi\int_{\theta_0}^{\theta} f(\theta)^3 \sin\theta d\theta.$$

10. Volume total engendré par la révolution de la cardioïde $r = 2a(1 + \cos\theta)$ autour de l'axe polaire.

R.
$$V = \frac{4^3}{3}\pi a^3.$$

11. Volume engendré par la révolution de l'aire de la spirale logarithmique (Ch. XIV, ex. **8**) comprise entre les angles $\theta_0 = 0$, $\theta = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{m}{3}$.

R.
$$V = \frac{2}{3}\frac{\pi a^3}{9m^2 + 1}.$$

12. Volume engendré par la révolution de la lemniscate $r^2 = a^2\cos 2\theta$ autour de l'axe polaire.

R.
$$V = \frac{2}{3}\pi a^3\left[\frac{3}{4\sqrt{2}}\,\mathrm{l}.\,(1 + \sqrt{2}) - 1\right].$$

§ 4. QUADRATURE DES SURFACES DE RÉVOLUTION.

349. Nous appellerons *aire d'une portion de surface courbe* la limite de la somme des aires des facettes d'un polyèdre inscrit dans cette portion de surface, lorsque ces facettes décroissent indéfiniment dans tous les sens (V. plus loin, n° **375**). Nous admettrons que l'on soit parvenu, en partant de cette définition, à l'expression connue de la surface latérale du tronc de cône droit.

D'après cela, supposons qu'on ait à évaluer l'aire S de la surface engendrée par une courbe plane BM (fig. 58) tournant autour d'un axe OX, entre deux plans menés normalement à l'axe par les points $A(x = x_0)$ et $P(x = x)$. Si nous décomposons cette surface en *bandes* infiniment étroites $mpp'm'$... par des plans perpendiculaires à l'axe OX, puis ces bandes en éléments $\alpha\beta\delta\gamma$ par un second système de plans, infiniment rapprochés, passant par l'axe OX, nous prendrons pour facette élémentaire du polyèdre inscrit le trapèze $\alpha\beta\gamma\delta$ qui a mêmes sommets

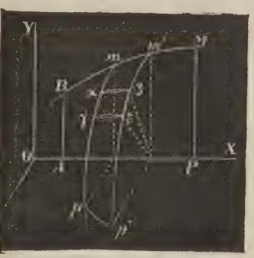


Fig. 58.

que cet élément de surface, et la somme des aires de ces facettes, prise à la limite, nous donnera l'aire de la surface proposée. Or, la somme des aires des facettes comprises dans une même bande $mpp'm'$ a pour limite, lorsque tous les côtés $\alpha\gamma$ tendent vers zéro, la surface latérale du tronc de cône qui a pour bases les cercles $mp, \ldots, m'p', \ldots$ engendrés par les ordonnées y, $y + \Delta y$ des points m et m', surface donnée par l'expression $\pi(2y + \Delta y)\delta$, δ désignant la corde de l'arc mm'. Nous aurons donc, en désignant par Σ une somme qui s'étend à toutes les bandes,

$$S = 2\pi \lim \Sigma(y + \tfrac{1}{2}\Delta y)\delta.$$

On peut prendre les éléments mm' assez petits pour que Δy soit moindre, en valeur absolue, qu'une quantité arbitrairement petite σ pour l'un quelconque de ces éléments, et comme $\Sigma\delta$ a pour limite l'arc BmM, $\Sigma\Delta y.\delta$ aura pour limite zéro. Donc

$$S = 2\pi \lim \Sigma y\delta = 2\pi \lim \Sigma y \Delta x \sqrt{1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}},$$

ou enfin, en exprimant $\Delta y : \Delta x$ par le théorème de M. Bonnet et ayant égard à la définition de l'intégrale définie (**306**),

$$(1) \qquad S = 2\pi \int_{x_0}^{x} y dx \sqrt{1 + f'(x)^2},$$

$y = f(x)$ étant l'ordonnée de la courbe génératrice. On écrit cette formule d'une manière abrégée

$$(2) \qquad S = 2\pi \int_{x_0}^{x} y ds,$$

ds désignant la différentielle de l'arc.

L'équation de la courbe fait connaître y et ds, et une simple quadrature suffit pour obtenir l'aire cherchée.

350. Prenons comme exemple l'ellipsoïde de révolution autour de son grand axe. L'ordonnée de la courbe génératrice a pour expression

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

d'où, posant $a^2 - b^2 = a^2\varepsilon^2$, on tire

$$ds = dx\sqrt{1 + \frac{b^2x^2}{a^2(a^2 - x^2)}} = \frac{dx\sqrt{a^2 - \varepsilon^2x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

et en substituant dans l'équation (2), posant $x_0 = 0$,

$$S = \frac{2\pi b}{a}\int_0^x dx\sqrt{a^2 - \varepsilon^2x^2} = \frac{2\pi b\varepsilon}{a}\int_0^x dx\sqrt{\frac{a^2}{\varepsilon^2} - x^2},$$

ou enfin, d'après une formule déjà établie (**332**),

$$S = \frac{\pi b}{a}\left(x\sqrt{a^2 - \varepsilon^2x^2} + \frac{a^2}{\varepsilon}\arcsin\frac{\varepsilon x}{a}\right).$$

Si l'on fait ici $x = a$ et que l'on double la valeur de S, on aura pour la surface totale de l'ellipsoïde

$$S_1 = 2\pi ab\left(\sqrt{1 - \varepsilon^2} + \frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}\right).$$

On en déduit la surface de la sphère en faisant $b = a$, d'où $\varepsilon = 0$: $S_1 = 4\pi a^2$.

S'il s'agissait d'un ellipsoïde *aplati*, ou de révolution autour de son petit axe $2b$, on aurait

$$y = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - x^2}, \quad a^2 - b^2 = b^2\varepsilon^2,$$

$$S = \frac{2\pi a}{b}\int_0^x dx\sqrt{b^2 + \varepsilon^2x^2},$$

et en cherchant l'intégrale indéfinie, puis déterminant la constante de façon que l'intégrale soit nulle pour $x = 0$,

$$S = \frac{\pi a}{b}\left[x\sqrt{b^2 + \varepsilon^2x^2} + \frac{b^2}{\varepsilon}\,\mathrm{l.}\left(\frac{\varepsilon x + \sqrt{b^2 + \varepsilon^2x^2}}{b}\right)\right].$$

En posant $x = b$ et doublant le résultat, on trouvera pour la surface de l'ellipsoïde aplati

$$S_2 = 2\pi ab\left[\sqrt{1+\varepsilon^2} + \mathrm{l}.\,\frac{\varepsilon + \sqrt{1+\varepsilon^2}}{\varepsilon}\right].$$

351. On tire des équations de la cycloïde (**342**)

$$yds = 2a^2(1 - \cos\omega)\sin\frac{1}{2}\omega d\omega.$$

L'aire de la surface engendrée par un arc de cycloïde commençant à $\omega = 0$ aura pour expression

$$S = 4\pi a^2\int_0^\omega (1 - \cos\omega)\sin\frac{1}{2}\omega d\omega = 8\pi a^2\int_0^\omega \sin^3\frac{1}{2}\omega d\omega$$

$$= 8\pi a^2\int_0^\omega\left(1 - \cos^2\frac{1}{2}\omega\right)\sin\frac{1}{2}\omega d\omega = 16\pi a^2\left(\frac{2}{3} - \cos\frac{1}{2}\omega + \frac{1}{3}\cos^3\frac{1}{2}\omega\right).$$

Pour $\omega = 2\pi$, on a l'aire engendrée par une arcade entière de la courbe. Sa valeur est

$$S = \frac{64}{3}\pi a^2.$$

Exercices.

1. *Paraboloïde de révolution :* $y^2 = 2px$, $x_0 = 0$.

$$S = \frac{2\pi}{3p}\left[(p^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} - p^3\right].$$

2. Surface engendrée par la révolution, autour de l'axe des x, de la chaînette, (Ch. XVII, Ex. **1**).

$$S = \frac{\pi a^2}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}} - e^{-\frac{2x}{a}} + \frac{4x}{a}\right), \quad (x_0 = 0).$$

V étant le volume de révolution correspondant, $aS = 2V$.

3. Surface totale engendrée par la cardioïde $r = 2a(1 + \cos\theta)$, tournant autour de son axe.

R. $$S = \frac{2^5}{5}\pi(2a)^2.$$

4. Même problème pour la podaire de l'ellipse $r^2 = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta$.

R. $$S = 2\pi\int_0^{2\pi}\sin\theta d\theta\sqrt{a^4\cos^2\theta + b^4\sin^2\theta} = 2\pi\left(a^2 + \frac{b^4}{\sqrt{a^4 - b^4}}\,\mathrm{l}.\,\frac{a^2 + \sqrt{a^4 - b^4}}{b^2}\right).$$

5. Même problème pour la lemniscate $r^2 = a^2 \cos 2\theta$.

R.
$$S = 4\pi a^2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

6. Surface du tore engendré par le cercle $x^2 + (y - c)^2 = a^2$ tournant autour de l'axe des x $(c > a)$.

R. Cette surface se compose 1° d'une partie qui répond à l'ordonnée $y = c + \sqrt{a^2 - x^2}$, et qui a pour valeur

$$2\pi a \int_{-a}^{a} \frac{y\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 4\pi a \int_0^a \left(1 + \frac{c}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right) dx = 4\pi a\left(a + \frac{\pi c}{2}\right).$$

2° d'une partie dont l'ordonnée génératrice est $c - \sqrt{a^2 - x^2}$ et qui a pour valeur

$$2\pi a \int_{-a}^{a} \left(\frac{c}{\sqrt{a^2 - x^2}} - 1\right) dx = 4\pi a\left(\frac{\pi c}{2} - a\right).$$

Ajoutant pour avoir l'aire totale, on trouve $S = 4\pi^2 ac = 2\pi a . 2\pi c$.

7. Démontrer que si une courbe tracée dans le plan XZ, $z = f(x)$, engendre une surface de révolution en tournant autour de l'axe des x, la portion de cette surface entre le plan XZ, un cylindre vertical $y = \varphi(x)$, et deux plans x_0, x, a pour expression

$$S = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx \sqrt{1 + f'(x)^2} . \operatorname{arc\,sin} \frac{\varphi(x)}{f(x)}.$$

CHAPITRE XXXV.

CALCUL APPROCHÉ DES INTÉGRALES DÉFINIES.

352. Un grand nombre de problèmes de mécanique et de physique conduisent à chercher la valeur d'intégrales définies dont l'expression rigoureuse ne peut être obtenue sous forme finie. On doit recourir aux méthodes d'approximation, et l'on a établi dans ce but des formules où l'on se propose d'obtenir une approximation suffisante avec le moins de calculs possible.

L'intégrale définie

$$\int_a^b f(x)dx$$

représente, comme on l'a vu, $f(x)$ étant > 0 et $b > a$, l'aire S de la courbe qui a pour équation $y = f(x)$ entre les ordonnées qui répondent aux abscisses a et b. Le problème est donc le même, d'évaluer approxi-

mativement l'intégrale définie, ou de trouver approximativement la valeur de l'aire S, et c'est sous cette dernière forme que nous allons traiter la question, en donnant le moyen d'assigner une limite supérieure de l'erreur que comporte chaque formule approchée.

353. Le principe de la méthode est celui-ci : 1° Si l'on sait qu'une quantité inconnue S est comprise entre une limite inférieure l et une limite supérieure L, $l < S < L$, l'erreur ε commise en attribuant à S la valeur moyenne

$$S = \frac{L + l}{2}$$

sera moindre que $\frac{L - l}{2}$; 2° si l'on sait, de plus, que S est plus rapproché de la limite supérieure L que de la limite inférieure l, on pourra poser

$$S = l + \frac{2}{3}(L - l) = \frac{2L + l}{3}, \quad \text{avec} \quad \varepsilon < \frac{L - l}{3}.$$

Cela posé, soit AN (fig. 59) un arc de courbe, que nous supposerons en tous ses points tournant sa concavité vers l'axe des x; $aANn = S$ l'aire à évaluer, comprise entre la courbe, l'axe des x, et deux ordonnées aA,

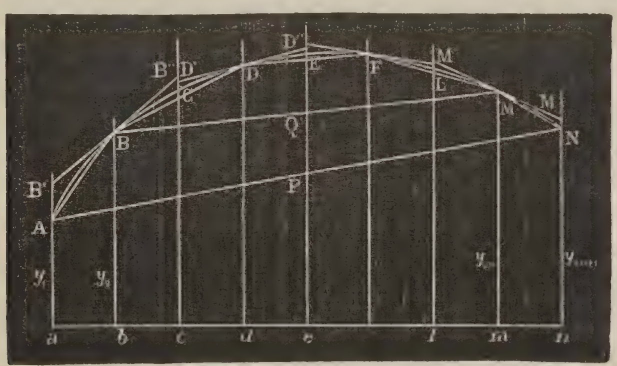


Fig. 59.

nN. Nous la partageons en un nombre pair $2n$ de parties par des ordonnées équidistantes Aa, Bb, Cc,... Mm, Nn, et soient y_1, y_2,... y_{2n}, y_{2n+1} ces ordonnées, h la distance ab entre deux ordonnées consécutives. Nous poserons

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} E = y_1 + y_{2n+1}, \quad P = y_2 + y_4 + \cdots + y_{2n}, \\ I = y_3 + y_5 + \cdots + y_{2n-1}, \quad d = \frac{y_2 + y_{2n}}{2} - \frac{y_1 + y_{2n+1}}{2}, \end{array} \right.$$

E est la somme des ordonnées extrêmes, P la somme des ordonnées de rang pair, I des ordonnées de rang impair, moins les deux extrêmes.

Pour trouver une limite inférieure de l'aire S, menons les cordes AB, BC,... LM, MN qui joignent deux à deux les sommets des ordonnées consécutives; la somme l des aires des trapèzes inscrits aABb, bBCc,... mMNn, qui a pour expression

$$\frac{h}{2}[(y_1+y_2)+(y_2+y_3)+\cdots+(y_{2n}+y_{2n+1})],$$

sera évidemment moindre que S. Nous aurons donc, comme première limite inférieure,

$$(2) \qquad l=\frac{h}{2}(\mathrm{E}+2\mathrm{I}+2\mathrm{P}).$$

Cette limite l fournit d'ailleurs une première valeur approchée de l'aire S; c'est la *formule des trapèzes*, qui a l'avantage de s'appliquer avec un nombre pair ou un nombre impair de divisions h.

354. Pour obtenir une limite supérieure L, nous menons par les sommets B, D, ... M des ordonnées de rang pair des tangentes à la courbe, en les terminant chacune aux deux ordonnées voisines. L'aire aABCc de la courbe est plus petite que celle du trapèze aB′B″c compris entre la tangente en B et les ordonnées y_1 et y_3 prolongées; de même pour les segments cCDEe, ... lLMNn. Or, la somme des aires de ces trapèzes est

$$\mathrm{L}=2h(y_2+y_4+\cdots+y_{2n})=2h\mathrm{P},$$

donc

$$(3) \qquad \mathrm{L}=2h\mathrm{P}$$

est une limite supérieure de l'aire S.

Enfin, nous aurons une seconde limite inférieure en prenant le polygone aABDF...MNn formé en joignant deux à deux les sommets de rang pair du premier polygone inscrit, et conservant le premier et le dernier côté de celui-ci.

L'aire l' de ce polygone a pour expression

$$l'=h\left[\frac{y_1+y_2}{2}+(y_2+y_4)+(y_4+y_6)+\cdots+(y_{2n-2}+y_{2n})+\frac{y_{2n}+y_{2n+1}}{2}\right]$$
$$=h\left[2y_2+2y_4+\cdots+2y_{2n}+\frac{y_1+y_{2n+1}}{2}-\frac{y_2+y_{2n}}{2}\right],$$

d'où enfin

(4) $$l' = h(2P - d), \quad \text{et} \quad S > l'.$$

Toute quantité comprise dans l'intervalle (l, L) ou (l', L) fournira une valeur approchée de S, mais du choix de cette quantité dépend, pour un même nombre $2n$ de divisions de l'intervalle (a, b), le degré de l'approximation. Indiquons les principales combinaisons.

355. Si l'on choisit, conformément au principe 1°,

$$S = \frac{L + l'}{2}, \quad \text{d'où} \quad \varepsilon < \frac{L - l'}{2},$$

on aura la formule d'approximation

(5) $$S = h\left(2P - \frac{d}{2}\right), \quad \text{avec} \quad \varepsilon < \frac{hd}{2}.$$

C'est la *formule de Poncelet*, fort simple pour le calcul et d'une exactitude remarquable. La limite de l'erreur peut se représenter géométriquement, car si l'on joint les sommets extrêmes A et N, puis les sommets suivants B et M, les droites AN, BM couperont respectivement en deux points P et Q l'ordonnée du milieu Ee ou y_{n+1}, et nous aurons

$$PQ = \frac{y_2 + y_{2n}}{2} - \frac{y_1 + y_{2n+1}}{2} = d,$$

donc ε sera moindre que la moitié du rectangle construit sur PQ et sur la distance h entre deux ordonnées consécutives. On devra donc choisir h assez petit ou n assez grand pour que cette quantité ne surpasse pas l'erreur que l'on peut admettre.

La tangente se rapprochant de la courbe plus que la corde, on doit supposer que, *généralement*, l'aire S se rapproche plus de sa limite supérieure L que de sa limite inférieure l', et l'on est ainsi conduit, d'après le principe 2°, à poser

$$S = \frac{2L + l'}{3},$$

ce qui donnera

(6) $$S = h\left(2P - \frac{d}{3}\right), \quad \text{avec}\ \varepsilon < \frac{hd}{3}.$$

C'est la *formule de Parmentier*, qui comporte, dans l'hypothèse admise, une erreur maximum moindre que la formule (5).

356. On peut aussi combiner la limite L avec l, mais pour procéder rationnellement dans le choix de la combinaison, nous considérons d'abord un seul segment $a\mathrm{AIB}b = \Sigma$ (fig. 60), le trapèze intérieur $a\mathrm{AB}b = t$, et le trapèze extérieur $a\mathrm{AA}''b = \mathrm{T}$ compris entre la tangente en A et les deux ordonnées.

Cherchons l'expression du rapport de l'aire $\mathrm{AIBA} = \Sigma - t$ entre la courbe et la corde, à l'aire $\mathrm{AIBA}''\mathrm{A} = \mathrm{T} - \Sigma$ entre la courbe, la tangente en A et l'ordonnée $\mathrm{A}''\mathrm{B}b$. Nous admettrons que la fonction $f(x)$ qui représente l'ordonnée soit continue ainsi que ses dérivées jusqu'au troisième ordre, et nous désignerons par $\mathrm{F}(x)$ la fonction qui a pour dérivée $f(x)$; par x_0 l'abscisse du point A. Nous aurons alors

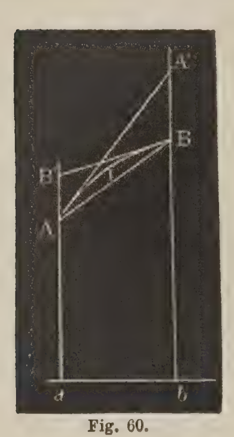


Fig. 60.

$$\Sigma = \mathrm{F}(x_0 + h) - \mathrm{F}(x_0) = hf(x_0) + \frac{h^2}{2} f'(x_0) + \frac{h^3}{6} f''(x_0) + h^4\mathrm{R},$$

$$\mathrm{T} = \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_0) + hf'(x_0)]$$

d'après l'équation de la tangente,

$$t = \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_0 + h)] = \frac{h}{2}\left[2f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h}{2} f''(x_0) + h^3\mathrm{R}_1\right],$$

R, R_1 étant des quantités finies. Il suit de là que l'on a, en supprimant le facteur h^3,

$$\frac{\Sigma - t}{\mathrm{T} - \Sigma} = \frac{\dfrac{f''(x_0)}{12} - h\left(\mathrm{R} - \dfrac{\mathrm{R}_1}{2}\right)}{\dfrac{f''(x_0)}{6} - h\mathrm{R}} = \frac{1}{2}\,\frac{f''(x_0) - 6h(2\mathrm{R} - \mathrm{R}_1)}{f''(x_0) - 6h\mathrm{R}},$$

et que le rapport de l'aire AIBA à $\mathrm{AIBA}''\mathrm{A}$ tendrait vers 1 : 2 si h tendait vers zéro. On devra donc, si h est supposé assez petit, considérer 1 : 2 comme la valeur la plus convenable à adopter pour ce rapport, et l'on est amené ainsi à poser

$$\Sigma = t + \frac{\mathrm{T} - t}{3} = \frac{\mathrm{T} + 2t}{3}.$$

On arriverait au même résultat en prenant, au lieu du trapèze $a\mathrm{AA}''b$, le trapèze $a\mathrm{B}'\mathrm{B}b$, entre les deux ordonnées et la tangente en B. Donc, si

nous revenons au problème proposé et à la figure 59, et si nous appliquons ce qui vient d'être établi à chacun des segments $aABb$, $bBCc$, ..., $mMNn$ compris entre deux ordonnées consécutives, comparé au trapèze formé par la corde et au trapèze formé par la tangente à l'une des extrémités de l'arc correspondant, nous serons conduit à poser la formule suivante comme offrant le maximum d'approximation pour h très petit :

$$S = \frac{L + 2l}{3},$$

ce qui donnera l'équation

(7) $$S = \frac{h}{3}(E + 2I + 4P).$$

C'est la *formule* dite *de Simpson*, qui présente en effet une exactitude remarquable, même pour un nombre restreint de divisions h. Elle donne un résultat rigoureusement exact, lorsqu'on l'applique à une parabole du deuxième ou du troisième degré.

En combinant différemment les limites L et l ou l', on obtient d'autres formules connues, mais les précédentes suffisent dans la pratique.

Si la courbe ABC ... N tournait, dans toute son étendue, sa convexité vers l'axe des x, la même méthode s'appliquerait à l'évaluation de l'aire $aANn$, et conduirait aux mêmes formules, mais la limite supérieure deviendrait une limite inférieure et *vice versa*. Enfin, si la courbe tournait sa concavité, tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre, on partagerait l'aire à évaluer en plusieurs parties, dont chacune satisferait à l'une des conditions ci-dessus.

Exercices.

1. Calculer, avec dix divisions, l'intégrale

$$S = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{4} = 0,7853981\ldots$$

On a ici $h = 0,1$; $y_1 = 1,0$; $y_2 = 0,99010$; $y_3 = 0,96514$; $y_4 = 0,91743$; $y_5 = 0,86207$; $y_6 = 0,80000$; $y_7 = 0,73529$; $y_8 = 0,67114$; $y_9 = 0,60976$; $y_{10} = 0,55249$; $y_{11} = 0,5$.

$E = 1,50000$; $I = 3,17226$; $P = 3,93116$; $d = 0,02129$.

On trouve 1° par la formule des trapèzes : $S = 0,78534$; 2° par la formule de Poncelet : $S = 0,78517$; par la formule de Parmentier : $S = 0,78552$; 4° par la formule de Simpson : $S = 0,78540$. L'erreur, par cette dernière formule, est donc inférieure à 0,000002.

2. Calculer, avec dix divisions, l'intégrale

$$S = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = l.\,2 = 0{,}693147.$$

R. Formule des trapèzes : 0,69377; formule de Poncelet : 0,69352; formule de Parmentier : 0,69298; formule de Simpson : 0,69315; erreur $<$ 0,00001.

3. Calculer, avec 10 divisions, l'intégrale

$$\int_{10}^{20} \log x\, dx = 11{,}6776552.$$

R. La formule de Simpson donne 11,67765, erreur $<$ 0,00001.

4. Calculer avec dix divisions l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{l.\,(1+x)}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{8}\, l.\,2 = 0{,}27219826.$$

R. La formule de Simpson donne 0,27220, erreur $<$ 0,000002.

CHAPITRE XXXVI.

DES INTÉGRALES DOUBLES.

357. Soit $f(x, y)$ une fonction simple, finie et continue de x, y dans une région déterminée T (**130**). Partageons cette région, par deux systèmes de lignes droites ou courbes, en un nombre arbitraire de régions infiniment petites dans tous les sens, et soit $\Sigma f(\xi, \eta)\,\omega$ la somme, faite pour tous ces éléments de la région T, de la valeur $f(\xi, \eta)$ de la fonction en un point arbitraire (ξ, η) de l'élément multipliée par l'aire ω de celui-ci. On peut démontrer, comme nous l'avons fait pour les fonctions d'une seule variable, que *la somme $\Sigma f(\xi, \eta)\omega$ tend vers une limite finie et déterminée, indépendante du mode de décomposition de la région* T *et du choix du point (ξ, η), lorsque tous les éléments ω décroissent indéfiniment.*



Fig. 61.

D'après une propriété établie au n° **138**, il est permis de supposer que les éléments ω soient pris assez petits pour que les oscillations de la fonction $f(x, y)$, dans l'un quelconque de ces éléments, soit moindre, qu'un nombre donné σ arbitrairement petit. Subdivisons un élément ω_i en éléments plus petits suivant une loi quelconque; soit ω' l'aire de l'un de

ces sous-éléments, $f(\xi', \eta')$ la valeur de la fonction en un de ses points, $\Sigma_i f(\xi',\eta')\,\omega'$ la somme des produits correspondants pour tous les éléments ω' de ω_i. D'après la remarque ci-dessus, on aura

$$\text{VA}\,[f(\xi',\eta') - f(\xi_i, \eta_i)] < \sigma,$$
$$\text{VA}\Sigma_i\,[f(\xi',\eta') - f(\xi_i,\eta_i)]\,\omega' = \text{VA}\,[\Sigma_i f(\xi',\eta')\,\omega' - f(\xi_i,\eta_i)\,\omega_i] < \sigma\omega_i,$$

et en raisonnant de même pour chacun des éléments ω_i, désignant par $\Sigma f(\xi',\eta')\,\omega'$ la somme, analogue à $\Sigma f(\xi, \eta)\,\omega$, étendue à tous les éléments ω' compris dans la région T, on aura évidemment

$$(\alpha) \qquad \Sigma f(\xi',\eta')\,\omega' = \Sigma f(\xi,\eta)\,\omega + \eta\sigma T,$$

T étant l'aire totale et η une quantité > -1 et < 1. Comme T a une valeur fixe, que σ peut décroître autant qu'on le veut en prenant les ω suffisamment petits, il suit de l'équation (α) que $\Sigma f(\xi', \eta')\,\omega'$ et $\Sigma f(\xi, \eta)\,\omega$ finissent par différer aussi peu qu'on le veut et que ces sommes ont une limite S (**18**).

Cette limite est indépendante du mode de division de la région T en éléments indéfiniment décroissants, car si l'on compare les sommes $\Sigma f(\xi, \eta)\,\omega$, $\Sigma f(\xi', \eta')\,\omega'$ qui se rapportent à deux modes de division différents, les éléments ω et ω' étant assez petits pour que, dans l'un quelconque d'entr'eux, l'oscillation de $f(x,y)$ soit moindre que σ, on considèrera un troisième mode de division résultant de la *superposition* des deux premiers, ou de la combinaison des systèmes de lignes qui les déterminent. Tout élément ω'' de ce troisième mode sera donc une subdivision d'un élément ω du premier mode et d'un élément ω' du second; soit (ξ'',η'') un point qui appartient à ω'', $\Sigma f(\xi'',\eta'')\omega''$ la somme correspondant à ce troisième mode de division. En la comparant successivement aux deux premières et ayant égard à l'équation (α), on aura

$$\Sigma f(\xi'',\eta'')\,\omega'' = \Sigma f(\xi,\eta)\,\omega + \eta\sigma T,$$
$$\Sigma f(\xi'',\eta'')\,\omega'' = \Sigma f(\xi',\eta')\,\omega' + \eta'\sigma T,$$

η et η' étant compris entre -1 et $+1$; donc

$$\Sigma f(\xi', \eta')\,\omega' - \Sigma f(\xi, \eta)\,\omega = (\eta - \eta')\,\sigma T$$

aura une valeur absolue plus petite que $2\sigma T$ et qui décroîtra indéfiniment lorsque ω et ω' tendront vers zéro. On a donc

$$\lim \Sigma f(\xi', \eta')\,\omega' = \lim \Sigma f(\xi, \eta)\,\omega = S.$$

Comme aucune supposition n'a été faite sur le choix du point (ξ, η)

dans l'élément ω, il suit de la démonstration que S ne dépend pas non plus de ce choix.

La limite S dont l'existence vient d'être établie s'appelle une *intégrale double* étendue à la région T, et nous la désignerons par la notation

$$\int_T f(x, y)\, dT\,;$$

T se nomme le *champ* d'intégration.

358. Le théorème s'étend au cas où la fonction $f(x, y)$, tout en restant numériquement moindre qu'un nombre fixe M, deviendrait discontinue en un nombre fini de *points* ou sur un nombre fini de *lignes* dans le champ d'intégration T. Supposons que $f(x, y)$ devienne discontinue en un point (x_1, y_1) de la région T. Décomposons, comme ci-dessus, T en éléments ω tels que l'oscillation de la fonction f soit moindre que σ dans chacun d'eux; il n'y aura d'exception que pour l'élément (ou les éléments) ω_1 auquel appartiendra le point (x_1, y_1). Si l'on subdivise les éléments ω en éléments plus petits ω', l'oscillation de $f(x, y)$ sera encore moindre que σ pour chacun de ceux-ci, à l'exception des éléments ω' auxquels appartiendrait le point (x_1, y_1); donc, la différence absolue des sommes $\Sigma f(\xi', \eta)\,\omega'$ et $\Sigma f(\xi, \eta)\,\omega$ sera moindre (**357**) que σT pour l'ensemble des éléments ω qui ne renferment pas (x_1, y_1), et moindre que $2M\varepsilon$ pour les autres, ε désignant la somme des aires de ceux-ci; comme ε et σ peuvent être rendus aussi petits qu'on le veut, la différence des deux sommes ci-dessus aura pour limite zéro. La seconde partie de la démonstration s'étendra sans difficulté de la même manière.

S'il y avait plusieurs points de discontinuité de la fonction f dans la région T, le même raisonnement s'appliquerait à chacun d'eux et la conclusion serait la même.

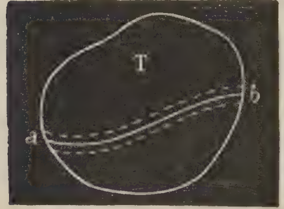


Fig. 62.

Supposons que $f(x, y)$ devienne discontinue, tout en restant finie, en tous les points d'une ligne *ab* (fig. 62) comprise dans la région T, et susceptible d'être renfermée dans un espace plan aussi petit qu'on le voudra; on raisonnera de même. Il ne sera plus possible de décomposer T en régions infiniment petites dans tous les sens, telles que l'oscillation de la fonction y soit moindre qu'une quantité donnée σ, mais la portion de la région T dans laquelle cela ne pourra avoir lieu, ou la somme des aires des éléments ω

dans lesquels l'oscillation surpasserait σ, pourra, d'après l'hypothèse, être rendue plus petite que tout nombre donné, et le raisonnement fait plus haut sera encore rigoureusement applicable. En sorte que $\Sigma f(\xi, \eta)\,\omega$ finira par ne plus éprouver que des variations insensibles lorsque tous les éléments ω tendront vers zéro d'une manière quelconque, et cela quelle que soit la détermination du point (ξ, η) dans chaque élément correspondant.

359. Le même mode de raisonnement permet encore de montrer que la limite vers laquelle tend la somme $\Sigma f(\xi, \eta)\omega$, étendue à tous les éléments ω d'une région T, ou l'intégrale $\int_T f(x, y)dT$, n'est nullement altérée si, dans les termes de cette somme, on augmente ou diminue un nombre fini ou indéfiniment croissant des éléments ω de portions infiniment petites ω', même non comprises dans la région T; il suffit toujours que la somme s des aires de ces éléments ω' finisse par décroître au-dessous de toute grandeur donnée, lorsque les éléments ω tendent vers la limite zéro. Cette remarque nous sera fort utile.

Enfin, la région T pourra être composée de plusieurs régions distinctes dans le plan : il suffira de regarder l'intégrale

$$\int_T f(x, y)\,dT$$

comme la somme des intégrales étendues à chacune des parties.

360. Il suit immédiatement de la définition de l'intégrale double que si L et l sont respectivement les limites maximum et minimum de $f(x, y)$ dans la région T, on aura toujours

$$(1) \qquad \int_T f(x, y)dT = T\mu,$$

μ étant une certaine quantité comprise entre l et L.

Si la fonction f est continue dans la région T, on conclura de là et du théorème du n° **137** que

$$\int_T f(x, y)dT = Tf(\xi, \eta),$$

(ξ, η) désignant un point de la région T, mais qui n'appartient pas à son contour.

361. L'évaluation d'une intégrale double se ramène à deux intégrations successives par rapport à deux variables. Pour le démontrer, nous établirons le principe suivant.

Soient $y_1, y_2 (y_1 < y_2)$ deux fonctions de x, continues dans un intervalle

(a, b); $f(x, y)$ une fonction de (x, y) continue dans la région T limitée par le contour $(y = y_1,\ y = y_2,\ x = a,\ x = b)$ (**130**). L'intégrale

$$\int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy,$$

dans laquelle x est traité comme constant, est une fonction $\varphi(x)$ de cette quantité : cette fonction $\varphi(x)$ est continue dans l'intervalle (a, b). En effet, soit h un accroissement infiniment petit de x ; on aura

$$\varphi(x + h) - \varphi(x) = \int_{y_1 + \Delta y_1}^{y_2 + \Delta y_2} f(x + h, y)\, dy - \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy$$

$$= \int_{y_1}^{y_2} [f(x+h,y) - f(x,y)]dy + \int_{y_2}^{y_2+\Delta y_2} f(x+h,y)dy - \int_{y_1}^{y_1+\Delta y_1} f(x+h,y)dy.$$

D'après ce qu'on a vu au chapitre XXXII, si l'on prend h assez petit pour que l'on ait, quel que soit y,

$$\mathrm{M}\,[f(x + h, y) - f(x, y)] < \varepsilon,$$

ce qui est possible en vertu du théorème V du n° **139**, et si y', y'' désignent des quantités respectivement comprises entre y_1 et $y_1 + \Delta y_1$; y_2 et $y_2 + \Delta y_2$, on aura

$$\mathrm{M}[\varphi(x+h) - \varphi(x)] < \varepsilon(y_2 - y_1) + \mathrm{M}f(x+h, y'')\,\Delta y_2 + \mathrm{M}f(x+h, y')\,\Delta y_1.$$

D'après notre hypothèse, ε, Δy_2 et Δy_1 tendent vers zéro lorsque h tend vers zéro, quel que soit son signe ; donc $\varphi(x + h) - \varphi(x)$ sera infiniment petit avec h.

Plus généralement, si y_1 et y_2 sont des fonctions *intégrables* de x (**307**, 1°) et si la fonction $f(x, y)$ ne devient discontinue qu'en un nombre fini de points de la région T, ou sur un nombre fini de lignes pouvant être renfermées chacune dans une aire aussi petite qu'on le veut, la fonction $\varphi(x)$ sera intégrable dans l'intervalle (a, b). En effet, $\varphi(x)$ a une valeur finie ; de plus, d'après ce qui vient d'être établi, cette fonction est continue dans l'intervalle (a, b), ou bien l'on peut décomposer l'intervalle (a, b) en un certain nombre d'autres, dans chacun desquels elle jouit de cette propriété.

362. Cela posé, reprenons l'intégrale double

$$\mathrm{I} = \int_{\mathrm{T}} f(x, y) d\mathrm{T},$$

et supposons que le contour de la région T ne puisse être rencontré par une droite en plus de deux points, que a et b soient respectivement la plus petite et la plus grande valeur de x appartenant à ce contour. Décomposons la région T en *bandes* par des parallèles à l'axe des y, et soient $mnn'm'$ une de ces bandes, comprise entre les valeurs x_i, x_{i+1} de x, $\delta_i = x_{i+1} - x_i$ sa largeur. Par les points de la droite mn, menons des parallèles à OX; soit $y_{k+1} - y_k = \gamma_k$ la distance entre deux parallèles consécutives. En opérant de même pour toutes les bandes, l'aire T sera décomposée en éléments infiniment petits en tous sens si δ_i, γ_k peuvent décroître indéfiniment, et nous prendrons pour l'élément ω l'un quelconque de ces rectangles compris entre deux parallèles à l'axe des y et deux parallèles à l'axe des x, d'où $\omega = \delta_i\gamma_k$; pour le point (ξ, η) de cet élément, le sommet (x_i, y_k) le plus rapproché de l'origine.

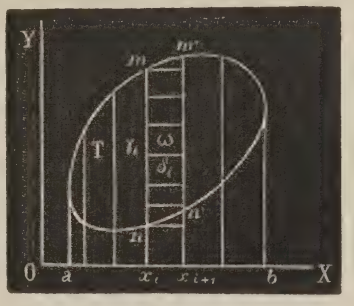


Fig. 63.

Nous aurons donc

$$\Sigma f(\xi, \eta)\,\omega = \Sigma f(x_i, y_k)\,\delta_i\gamma_k.$$

Il est vrai que, de cette façon, nous ajoutons généralement à la région T, ou nous en retranchons, des éléments ω', en nombre indéfiniment croissant, situés le long du contour de cette région; mais on voit sans peine que la somme des aires de ces éléments ω' finira par devenir moindre que toute grandeur donnée lorsque les δ_i tendront vers zéro, puisque la somme des rectangles de hauteur mn et de base δ_i a pour limite l'aire de la région T (**337**); l'intégrale double n'en sera donc pas altérée.

Groupons d'abord les éléments de la somme ci-dessus qui appartiennent à une même bande $mnn'm'$; nous aurons pour résultat

$$\delta_i \Sigma_i f(x_i, y_k)\gamma_k,$$

et lorsque les éléments γ_k tendront vers zéro, le coefficient de δ_i aura pour limite l'intégrale définie

$$\int_{y_1}^{y_2} f(x_i, y)dy,$$

y_1 et y_2 désignant respectivement les ordonnées des points n et m $(y_1 < y_2)$. On peut donc poser

$$\Sigma_i f(x_i, y_k)\gamma_k = \int_{y_1}^{y_2} f(x_i, y)dy + \mathrm{H}_i,$$

H_i désignant une fonction de x_i qui a pour limite zéro lorsque les intervalles γ_k tendent vers zéro. En répétant ce raisonnement pour toutes les bandes, on trouvera

$$\Sigma f(x_i, y_k)\,\delta_i\gamma_k = \Sigma\delta_i \int_{y_1}^{y_2} f(x_i, y)\,dy + \Sigma \mathrm{H}_i\delta_i.$$

Mais, d'une part, les δ_i et les γ_k étant indépendants, on peut faire décroître les intervalles γ_k pour toutes les bandes simultanément, jusqu'à ce que la quantité H_i soit moindre qu'une fraction arbitrairement petite ε dans chacune d'elles, en sorte que l'on ait

$$\Sigma \mathrm{H}_i\delta_i < (b - a)\,\varepsilon.$$

D'autre part, y_1 et y_2 sont des fonctions de x déterminées par le contour de la région T, et nous supposerons que ces fonctions, ainsi que $f(x, y)$, satisfassent aux conditions d'intégrabilité indiquées au numéro précédent. Dans ce cas, l'intégrale

$$\int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\,dy$$

sera une fonction intégrable $\varphi(x)$ de x dans l'intervalle (a, b), (**361**) et nous aurons

$$\lim \Sigma\delta_i \int_{y_1}^{y_2} f(x_i, y)\,dy = \int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

donc, définitivement,

$$(2) \qquad \int_{\mathrm{T}} f(x, y)d\mathrm{T} = \int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)dy.$$

Ainsi l'intégrale double est obtenue par deux intégrations successives, l'une par rapport à y, x étant invariable, entre deux limites qui dépendent généralement de x; l'autre par rapport à x, entre deux limites constantes.

363. Il est clair que l'on aurait pu procéder dans l'ordre inverse, décomposer T en bandes par des parallèles à l'axe des x, et chaque bande en éléments ω par des parallèles à l'axe des y. Dans ce cas, si l'on désigne par x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ les valeurs de x qui se rapportent, sur le

contour de T, à une même valeur de y quelconque et qui sont des fonctions données de y, par c, d ($c < d$) les valeurs extrêmes de y qui appartiennent à la région T, on aura de même

$$(3) \qquad \int_T f(x, y) dT = \int_c^d dy \int_{x_1}^{x_2} f(x, y) dx.$$

Tout cela suppose que le contour de T soit continu et ne puisse être coupé par une droite en plus de deux points. Si ce contour était d'une nature plus complexe, on pourrait décomposer la région T en plusieurs autres dont chacune satisfasse à ces conditions; on appliquerait alors le théorème précédent à chacune des régions partielles, et la somme des intégrales qui s'y rapportent donnerait, comme on le voit facilement, l'intégrale double $\int_T f(x, y)\, dT$ étendue à toute la région T.

364. Un cas très simple est celui où la région T se réduit au rectangle compris entre deux droites $x = a$, $x = b$ parallèles à OY, et deux droites $y = c$, $y = d$ parallèles à OX. On a, dans ce cas, y_1 et y_2 se réduisant à c, d, et x_1, x_2 à a, b,

$$\int_T f(x, y)\, dT = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx.$$

Il en résulte que *si l'on a à intégrer une fonction $f(x, y)$, satisfaisant aux conditions du n° **361**, successivement par rapport à x et par rapport à y, entre des limites constantes données, l'ordre des intégrations est indifférent.*

365. Supposons maintenant que $f(x, y)$ soit une fonction continue des variables dans le voisinage d'un point (x, y) de la région T (**135**), limitée par le contour rectangulaire (a, b, c, d), et considérons l'intégrale suivante, qui est évidemment une fonction de x et de y,

$$\int_a^x dx \int_c^y f(x, y)\, dy = F(x, y).$$

Si h, k désignent des accroissements infiniment petits de x, y, on a

$$F(x+h, y+k) - F(x, y) = \int_a^{x+h} dx \int_c^{y+k} f(x, y)\, dy - \int_a^x dx \int_c^y f(x, y)\, dy$$

$$= \int_a^x dx \int_y^{y+k} f(x, y)\, dy - \int_x^{x+h} dx \int_c^{y+k} f(x, y)\, dy,$$

d'après la décomposition établie au n° **310**. Si M désigne la limite maximum des valeurs absolues de $f(x, y)$ dans la région T, on voit sans

peine que les deux intégrales dans le second membre sont numériquement moindres que $4kM(x-a)$ et $4hM(y+k-c)$; elles tendent donc vers zéro en même temps que h et k et $F(x, y)$ est une fonction continue de (x, y).

De plus on a

$$\frac{F(x+h, y)-F(x, y)}{h}=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} dx \int_c^y f(x, y)\, dy=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} \varphi(x)\, dx,$$

$\varphi(x)$ désignant la fonction intégrable de x

$$\int_c^y f(x, y)\, dy.$$

Mais $\varphi(x)$ étant continue dans le voisinage du point considéré, on peut mettre le dernier terme sous la forme $\varphi(\xi)$, ξ étant compris entre x et $x+h$, (**309**), et en faisant tendre h vers zéro, on aura

$$\lim \frac{F(x+h, y)-F(x, y)}{h}=\varphi(x),$$

ou

$$D_x \int_a^x dx \int_c^y f(x, y)\, dy=\int_c^y f(x, y)\, dy.$$

On trouverait de même, en intervertissant l'ordre des intégrations,

$$D_y \int_a^x dx \int_c^y f(x, y)\, dy=\int_a^x f(x, y)\, dx,$$

et enfin, de l'une de ces deux équations, on tirera

$$D_x D_y \int_a^x dx \int_c^y f(x, y)\, dy=f(x, y).$$

366. Pour ramener l'intégrale double à deux intégrales successives, nous avons décomposé la région T en éléments ω par deux systèmes de droites respectivement parallèles à deux axes coordonnés rectangulaires, mais on pourrait adopter d'autres modes de décomposition.

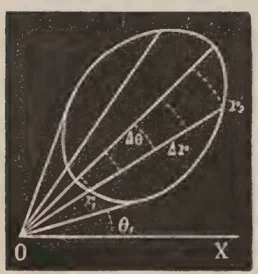


Fig. 64.

Par exemple, si l'on prend pour lignes de décomposition des droites partant d'une origine O (fig. 64) et des cercles ayant ce point pour centre, un point quelconque de la région T sera déterminé par l'intersection d'un cercle de rayon r et d'une droite

d'argument θ, et aura pour coordonnées polaires r et θ; l'élément ω, compris entre deux cercles de rayons r, $r+\Delta r$, et deux droites d'arguments θ, $\theta+\Delta\theta$, aura pour expression

$$\tfrac{1}{2}[(r+\Delta r)^2 - r^2]\,\Delta\theta = (r+\tfrac{1}{2}\Delta r)\,\Delta r\,\Delta\theta,$$

et l'on aura, en substituant à x et à y leurs valeurs en r et θ,

$$\int_T f(x, y)\,dT = \lim \Sigma f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,(r+\tfrac{1}{2}\Delta r)\,\Delta r\,\Delta\theta.$$

Comme $f(x, y)\,\Delta r$ peut être supposé moindre qu'une fraction donnée ε pour tous les éléments simultanément, et que l'on sait déjà que $\Sigma\Delta r\Delta\theta$ tend vers une limite finie et déterminée (**357**), on peut négliger dans la somme Σ les termes en $\Delta r^2\Delta\theta$, leur somme ayant pour limite zéro, et l'on a

$$\int_T f(x, y)\,dT = \lim \Sigma f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\Delta r\Delta\theta.$$

Donc, si l'on désigne par r_1 et r_2, $r_1 < r_2$, les valeurs de r qui se rapportent à une valeur quelconque de θ sur le contour de T et qui sont des fonctions de θ données par ce contour, par θ_1 et θ_2 la plus petite et la plus grande valeur de θ qui répondent à la région T, on aura

$$\int_T f(x, y)\,dT = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{r_1}^{r_2} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,rdr.$$

367. La théorie des intégrales doubles présentée ci-dessus suppose essentiellement 1° que la fonction $f(x, y)$ ne puisse croître numériquement au-dessus de toute grandeur dans la région d'intégration T; 2° que cette région elle-même ne s'étende pas à l'infini. Dans le cas où ces conditions ne seraient pas remplies, l'existence même de la limite de somme cesserait d'être établie, et il faudrait des définitions nouvelles et un examen spécial que nous ferons plus loin.

368. *Des intégrales triples.* — Les considérations développées dans ce chapitre peuvent être généralisées sans difficulté et étendues à des fonctions de trois variables x, y, z. La marche à suivre étant la même, nous nous bornerons à indiquer les résultats.

Soit $f(x, y, z)$ une fonction que, pour éviter toute difficulté, nous supposerons finie et continue dans une région U à trois dimensions. Nous décomposerons l'espace U en éléments infiniment petits dans tous les sens par trois systèmes de surfaces, planes ou courbes, et soit ω le volume d'un de ces éléments, (ξ, η, ζ) un point quelconque appartenant

à cet élément. Désignons par $\Sigma f(\xi, \eta, \zeta)\,\omega$ la somme, étendue à tous les éléments de la région U, du volume de chaque élément multiplié par la valeur correspondante $f(\xi, \eta, \zeta)$ de la fonction. On fera voir :

1° Que cette somme tend vers une limite finie et déterminée, indépendante du mode de décomposition de la région U comme de la loi suivant laquelle le point (ξ, η, ζ) est choisi dans chaque élément ω, lorsque tous ces éléments ω décroissent indéfiniment dans tous les sens.

2° Que cette propriété subsisterait même si la fonction $f(x, y, z)$ devenait discontinue, sans surpasser une valeur absolue donnée, en certains points, sur certaines lignes ou sur certaines surfaces appartenant à la région U, pourvu qu'on puisse circonscrire chacune de ces lignes ou de ces surfaces dans une région d'un volume aussi petit qu'on le voudra.

3° Que cette limite d'une somme d'éléments, qu'on appelle une *intégrale triple* et que l'on désigne par la notation conventionnelle

$$\int_{\mathrm{U}} f(x, y, z)\, d\mathrm{U},$$

a une valeur égale à $\mathrm{U} f(\xi, \eta, \zeta)$, U représentant le volume de la région U et (ξ, η, ζ) un certain point de cette région.

4° Que l'intégrale triple se ramène à trois intégrales successives par rapport à x, y, z, dans l'hypothèse où la surface S qui limite la région U est telle qu'une droite quelconque ne la coupe pas en plus de deux points. Dans ce cas, désignons par

$$z_1 = \varphi_1(x, y), \quad z_2 = \varphi_2(x, y), \quad (z_1 < z_2),$$

les valeurs de z qui correspondent à un même système de valeurs quelconques de x, y, sur la surface S, valeurs qui sont évidemment des fonctions de (x, y) définies par cette surface; par $y_1 = \psi_1(x)$, $y_2 = \psi_2(x)$ les deux valeurs extrêmes de y $(y_1 < y_2)$ qui se rapportent à une même valeur de x dans la région U, et qui sont des fonctions déterminées de x; enfin, par x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ les valeurs extrêmes de x qui appartiennent à la région d'intégration. On démontrera que

$$\int_{\mathrm{U}} f(x, y, z)\, d\mathrm{U} = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_1}^{z_2} f(x, y, z)\, dz,$$

x et y étant regardés comme invariables dans l'intégration par rapport à z; x dans l'intégration par rapport à y.

5° Que lorsque les limites d'intégration par rapport à z et à y sont constantes; en d'autres termes, lorsque la région U est limitée par un

parallélipipède rectangle dont les faces sont parallèles aux plans coordonnés, l'ordre dans lequel on effectue les trois intégrations successives est indifférent, la valeur de l'intégrale triple n'en est pas modifiée.

6° Que l'on peut employer, pour ramener l'intégrale triple à trois intégrales successives, au lieu de la décomposition en éléments par des plans parallèles aux plans coordonnées, une décomposition en éléments par tout autre système triple de surfaces infiniment voisines, par exemple, le système qui correspond aux coordonnées sphériques, etc. etc...

CHAPITRE XXXVII.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DES INTÉGRALES DOUBLES.

§ 1. CUBATURE DES SOLIDES EN GÉNÉRAL.

369. Nous reprenons le problème de l'évaluation du volume compris sous une surface donnée (Ch. XXXIV), et d'abord, nous chercherons l'expression du volume V compris entre une surface EFGH (fig. 65) dont on a l'équation

(1) $$z = f(x, y),$$

le plan XY, deux plans AEDH, BFGC parallèles au plan XZ, et deux autres plans ABFE, DCGH parallèles au plan YZ.

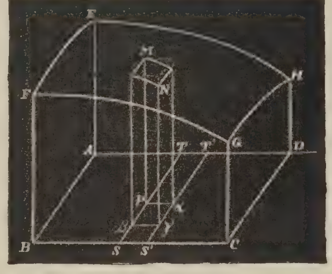


Fig. 65.

Pour cela, nous décomposerons le volume à évaluer en *filets* prismatiques par deux systèmes de plans infiniment voisins, les uns parallèles au plan YZ, les autres parallèles au plan XZ; soit MNP$\alpha\beta\gamma$ un de ces éléments prismatiques. Son volume est compris entre les volumes des deux prismes qui ont pour base commune le rectangle P$\alpha\beta\gamma$, et pour hauteurs respectives la plus petite et la plus grande valeur de z dans ce rectangle; il est donc égal au produit de l'aire ω du rectangle P$\alpha\beta\gamma$ par la valeur $f(\xi,\eta)$ de z qui répond à un certain point (ξ, η) de ce rectangle. Donc, si l'on désigne par Σ une somme qui s'étend à tous les éléments ω de l'aire ABCD ou T, on aura

(2) $$V = \lim \Sigma f(\xi, \eta)\,\omega = \int_T f(x,y)\,dT.$$

Cette formule se transforme par le théorème du n° **362**. Soient x_1, x_2, les valeurs de x qui déterminent les plans ABFE, DCGH, ou leurs traces AB, DC sur le plan XY ; y_1, y_2 les valeurs de y relatives aux traces AD, BC. On aura donc, soit

$$(3) \qquad V = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy,$$

soit

$$(4) \qquad V = \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\, dx,$$

suivant qu'on commencera par l'intégration relative à y ou l'intégration relative à x.

370. Comme exemple, cherchons le volume du solide entre les plans coordonnés et la surface engendrée par une droite MN (fig. 66) qui se meut en restant parallèle au plan YZ et s'appuyant sur deux droites fixes, AC dans le plan XZ, BD parallèle à OX dans le plan XY.

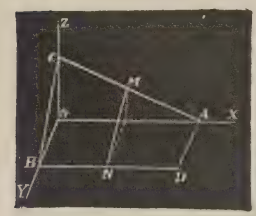


Fig. 66.

Posant $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, on trouve pour l'équation de la surface

$$z = \frac{c}{ab}(a - x)(b - y),$$

et les limites d'intégration sont $y_1 = 0$, $y_2 = b$, $x_1 = 0$, $x_2 = a$. Donc

$$V = \frac{c}{ab}\int_0^a dx \int_0^b (a - x)(b - y)\, dy = \frac{c}{ab}\int_0^a (a - x)\, dx \int_0^b (b - y)\, dy$$

$$= \frac{c}{ab}\int_0^a (a - x)\left[by - \frac{y^2}{2}\right]_0^b dx = \frac{bc}{2a}\int_0^a (a - x)\, dx = \frac{abc}{4}\cdot$$

Le volume cherché OADBC est donc le quart du volume du parallélipipède construit sur OA, OB, OC.

371. Reprenons le problème du n° **369**, mais en supposant que le solide à évaluer, au lieu d'être limité en avant et en arrière par des plans parallèles au plan XZ, soit limité par deux cylindres CBFG, ADHE, (fig. 67) dont la génératrice est parallèle à l'axe des z, et dont les traces sur le plan XY sont deux courbes données AD, BC, ayant pour équations respectives

$$y_1 = \varphi_1(x), \quad y_2 = \varphi_2(x), \quad y_1 < y_2.$$

Nous décomposerons encore le solide en filets prismatiques par deux systèmes de plans parallèles à YZ et à XZ, et si MNP$\alpha\beta\gamma$ représente un de ces filets, ω l'aire de sa base P$\alpha\beta\gamma$, on verra comme dans le premier cas que le volume du filet est $f(\xi,\eta)\,\omega$, le point (ξ,η) appartenant à l'élément ω. Il y aura dans chaque tranche STT'S' du solide entre deux plans consécutifs parallèles à YZ, deux filets extrêmes ayant pour bases les éléments curvilignes SsS', TtT', que l'on pourra négliger dans la sommation, parce qu'ils ont un volume moindre que les prismes rectangulaires construits sur leurs dimensions maximum parallèlement aux axes, et que la somme des aires des bases de tous ces prismes a pour limite zéro. On aura donc, d'après la remarque faite au N° **359** sur les intégrales doubles,

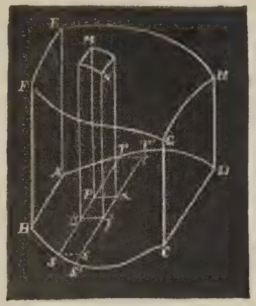


Fig. 67.

$$V = \lim \Sigma f(\xi,\eta)\,\omega,$$

la somme Σ s'étendant à tous les éléments rectangulaires ω compris dans l'aire ABCD ou T, d'où

$$V = \int_T f(x,y)\,dT.$$

Ramenant cette intégrale double à deux intégrations par rapport à x et à y, on a

$$(5) \qquad V = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dy.$$

C'est la même expression que (3), mais les limites y_1, y_2, constantes dans le premier cas, représentent ici des fonctions de x.

Calculons, par exemple, le volume compris entre la surface OCDC'D' (fig. 68) du paraboloïde elliptique

$$z = \alpha x^2 + \beta y^2,$$

le cylindre vertical qui a pour base l'ellipse ABA'B' dont l'équation est

Fig. 68.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

et le plan XY.

Nous trouverons immédiatement, par l'équation de l'ellipse,

$$y_1 = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad y_2 = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

et pour les limites d'intégration par rapport à x, $x_1 = -a$, $x_2 = +a$. Donc

$$V = 2\int_0^a dx \int_{y_1}^{y_2} (\alpha x^2 + \beta y^2)\, dy = 2\int_0^a \left[\alpha x^2 (y_2 - y_1) + \frac{\beta}{3}(y_2^3 - y_1^3)\right] dx.$$

On a d'ailleurs

$$y_2 - y_1 = \frac{2b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad y_2^3 - y_1^3 = \frac{2b^3}{a^3}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}},$$

ou, en introduisant une variable auxiliaire φ par l'équation $x = a \sin\varphi$, ce qui donnera $\varphi = 0$ et $\varphi = \frac{\pi}{2}$ pour $x = 0$, $x = a$,

$$y_2 - y_1 = 2b\cos\varphi, \quad y_2^3 - y_1^3 = 2b^3 \cos^3\varphi,$$

donc

$$V = 4\alpha b a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi \cos^2\varphi\, d\varphi + \frac{4\beta}{3} a b^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi\, d\varphi.$$

Mais, d'après les formules du n° **320**, on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi \cos^2\varphi\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\, d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{4^2},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi\, d\varphi = \frac{3}{4^2}\pi,$$

d'où, réductions faites,

$$V = \frac{\pi}{4} ab(\alpha a^2 + \beta b^2) = \frac{\pi}{4} abc,$$

si l'on désigne par c le z du paraboloïde qui correspond à $x = a$, $y = b$.

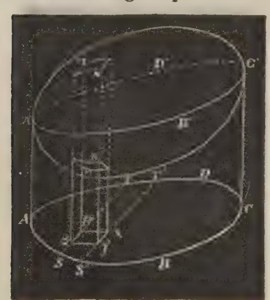


Fig. 69.

372. Ce qui précède conduit à l'évaluation du volume compris sous une surface fermée $F(x, y, z) = 0$, que nous supposerons d'ailleurs ne pouvoir être coupée en plus de deux points par les parallèles à l'axe des z. L'équation de la surface, résolue par rapport à z, donnera deux valeurs

$$z_1 = f_1(x, y), \quad z_2 = f_2(x, y), \quad z_1 < z_2,$$

qui se rapporteront aux deux points M' et M (fig. 69) projetés en un même point $P(x, y)$ sur le plan XY. Traçons

sur le plan XY le contour fermé ABCD qui renferme les projections de tous les points de la surface, élevons sur ce contour une surface cylindrique parallèle à l'axe des z, A′AB′BC′CD′D, A′B′C′D′ étant la courbe commune à ce cylindre et à la surface donnée. Cette courbe séparera, sur la surface, la partie supérieure S_2 qui répond à l'ordonnée z_2, de la partie inférieure S_1 qui répond à z_1, et le volume cherché sera la différence des volumes compris entre la surface S_2 et la surface cylindrique d'une part; entre la surface S_1 et la surface cylindrique d'autre part. On aura donc, en appliquant l'équation (5),

$$(6) \qquad V = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} [f_2(x, y) - f_1(x, y)]\, dy,$$

y_1, y_2 étant les fonctions de x qui représentent les deux ordonnées de la courbe ABCD pour un même x; x_1 et x_2 les valeurs extrêmes de x dans le champ d'intégration T, limité par ABCD.

Il est bon d'observer que l'intégrale

$$\int_{y_1}^{y_2} [f_2(x, y) - f_1(x, y)]\, dy$$

n'est autre chose que l'aire $\varphi(x)$ de la section faite dans le solide par le plan x, ce qui ramène à la formule (1) du n° **345**.

On peut aussi se servir de l'équation

$$V = \int_T [f_2(x, y) - f_1(x, y)]\, dT,$$

à laquelle on arriverait d'ailleurs en décomposant le volume V en filets verticaux par des plans ou des surfaces cylindriques parallèles à l'axe des z.

373. Habituellement, la ligne ABCD, qui forme le *contour apparent* de la surface sur le plan XY, est la trace sur ce plan d'un cylindre vertical circonscrit à celle-ci, et la ligne A′B′C′D′ est la *courbe de contact* du cylindre et de la surface. Le plan tangent, commun à la surface et au cylindre, est donc parallèle à l'axe des z en tous les points de A′B′C′D′, ce qui donne, pour ces points, les deux équations

$$F(x, y, z) = 0, \quad F'_z(x, y, z) = 0.$$

Éliminant z entre ces deux équations, on aura, entre x et y, une équation $\varphi(x, y) = 0$ qui sera celle du contour ABCD et qui fournira y_1 et y_2.

Quant aux valeurs x_1 et x_2 qui se rapportent aux limites du contour

ABCD dans le sens de l'axe des x, dans les cas ordinaires, elles répondent aux points A et C pour lesquels la tangente à ABCD est parallèle à l'axe des y, et le plan tangent à la surface normal à l'axe des x. Ces points sont caractérisés par les équations

$$F(x, y, z) = 0, \quad F'_y(x, y, z) = 0, \quad F'_z(x, y, z) = 0.$$

L'élimination de y et de z donnera les valeurs de x_1 et x_2.

374. La décomposition du volume en éléments prismatiques par des plans parallèles aux plans coordonnés se présente naturellement, mais elle n'est pas toujours celle qui conduit aux intégrations les plus simples. Soit à chercher le volume V entre la sphère

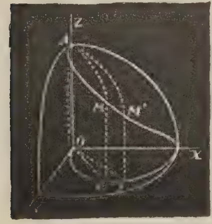


Fig. 70.

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

le plan XY, et le cylindre vertical OPXMA (fig. 70) qui a pour base un demi-cercle T décrit sur le rayon OX comme diamètre dans le plan XY. En décomposant T en éléments ω par des droites partant du point O et par des cercles ayant ce point pour centre, comme on l'a vu au n° **366**, on aura

$$V = \int_T f(x, y)\, dT = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} r dr \sqrt{a^2 - r^2},$$

car on a, par l'équation de la surface,

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{a^2 - r^2},$$

et les valeurs de r qui se rapportent aux extrémités O et P d'un même rayon vecteur du cercle sont $r = 0$ et $r = a\cos\theta$. On a d'ailleurs

$$\int_0^{a\cos\theta} r dr \sqrt{a^2 - r^2} = \left[-\frac{(a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \right]_0^{a\cos\theta} = \frac{a^3\,(1 - \sin^3\theta)}{3},$$

d'où

$$V = \frac{a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3\theta)\, d\theta = \frac{a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin\theta + \cos^2\theta \sin\theta)\, d\theta,$$

ou, calcul fait,

$$V = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right) \frac{a^3}{3}.$$

En quadruplant, on aura le volume total compris entre le cylindre complet et la surface de la sphère.

Exercices.

1. Calculer le volume V compris entre le conoïde dont l'équation est

$$cz = y\sqrt{a^2 - x^2},$$

le plan XY, et les plans $x = 0$, $x = a$; $y = 0$, $y = b$.

R. $$V = \frac{\pi a^2 b^2}{8c}.$$

2. Volume compris entre la surface gauche qui a pour équation

$$z = c \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x},$$

le plan XY, et les plans $x = 0$, $x = a$; $y = 0$, $y = b$.

R. $V = abc \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a} + \frac{c}{4}[(b^2 - a^2)\,\mathrm{l}.(a^2 + b^2) + a^2\,\mathrm{l}.a^2 - b^2\,\mathrm{l}.b^2 - 2b^2]$.

Si $a = b = c$, on a

$$V = \frac{a^3}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

3. Volume compris entre la surface

$$e^{-z} = \cos x \cos y,$$

le plan XY, et les plans $x = 0$, $x = \pi : 2$; $y = 0$, $y = \pi : 2$.

R. On est ramené à chercher l'intégrale de $\mathrm{l}.\cos x\,dx$ entre 0 et $\pi : 2$, et l'on y arrive en observant que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{l}.\cos x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{l}.\sin x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{l}.\frac{\sin 2x}{2}\,dx;$$

que, d'autre part,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{l}.\sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \mathrm{l}.\sin x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{l}.\sin x\,dx.$$

On trouve ainsi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{l}.\cos x\,dx = -\frac{\pi}{2}\,\mathrm{l}.2, \quad V = \frac{\pi^2}{2}\,\mathrm{l}.2.$$

4. Volume V compris entre la surface

$$z = e^{x-y}\cos(x + y),$$

le plan XY, et les quatre plans verticaux représentés par l'équation

$$y = \pm x \pm \frac{\pi}{2}.$$

R. $$V = e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}}.$$

5. Volume OADBC (fig. 71) compris, dans l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

entre la surface, les plans coordonnés, et le plan ABD mené par les sommets A et B parallèlement à OZ.

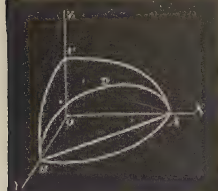


Fig. 71.

R. On a ici $x_1=0$, $x_2=a$; $y_1=0$, $y_2=\frac{bx}{a}-b$.

$$V=\frac{\pi abc}{24}(5\sqrt{2-4}).$$

C'est la huitième partie du volume qui reste lorsqu'on coupe un ellipsoïde par quatre plans parallèles à un même axe et passant chacun par deux sommets adjacents non situés sur cet axe. La somme des quatre solides retranchés a pour valeur

$$\frac{\pi abc}{3}(8-5\sqrt{2}).$$

6. Volume total compris sous la surface qui a pour équation

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}.$$

R. La partie comprise dans le trièdre des coordonnées positives est le huitième du volume total. On a

$$x_1=0,\quad x_2=a;\quad y_1=0,\quad y_2=(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$$

Pour faciliter la première intégration on pose

$$y=(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}\sin^3\varphi.$$

On trouve $V=4\pi a^3:35$.

7. Volume V compris entre la sphère de rayon a qui a l'origine pour centre, le plan XY et le cylindre vertical qui a pour équation

$$x^2(x^2+y^2)-a^2(x^2-y^2)=0.$$

R. On emploie la décomposition du n° **374**, et l'on a

$$V=\frac{a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-1+1.2\right).$$

8. Une surface gauche est engendrée par une droite PQ coupant l'axe OZ sous un angle constant μ, à une distance du point O proportionnelle à l'angle θ que fait le plan (OZ, PQ) avec le plan XZ. Trouver l'équation de la surface et le volume compris entre cette surface, le plan XY et un plan ZOA qui fait avec XZ l'angle $\theta_1 < 2\pi$.

R. On trouve pour l'équation de la surface entre les coordonnées (z, r, θ), a étant constant,

$$z=a\theta-r\cot\mu.$$

et pour le volume

$$V=\frac{1}{24}a^3\operatorname{tg}^2\mu\,.\,\theta_1^4.$$

9. Démontrer que, si l'on rapporte les points de l'espace à un système de coordonnées sphériques (r, θ, ψ), le volume compris sous une surface fermée $r = f(\theta, \psi)$, le pôle étant pris à l'intérieur de la surface, aura pour expression

$$V = \tfrac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} f(\theta, \psi)^3 \sin\theta \, d\theta.$$

§ 2. QUADRATURE DES SURFACES COURBES EN GÉNÉRAL.

375. De même que la longueur d'un arc de courbe, l'aire d'une portion de surface courbe doit être définie. Soit (C′) un contour fermé A′B′C′D′ (fig. 72) tracé sur une surface courbe : *l'aire* de la portion de surface renfermée dans ce contour (C′) est *la limite* S *vers laquelle tend l'aire d'une surface polyédrique à facettes triangulaires infiniment petites* MNM′, *inscrite dans cette portion de surface* et s'appuyant sur un contour polygonal inscrit dans le contour (C′). Mais il faut démontrer que cette limite existe et est indépendante de la loi qui détermine les facettes indéfiniment décroissantes.

Fig. 72.

Projetons le contour A′B′C′D′ sur un plan convenablement choisi XOY, en ABCD, et soit T la région limitée par ce contour (C). Nous admettrons 1° que les angles des facettes triangulaires ne puissent pas tendre vers zéro; 2° que, l'équation de la surface étant

$$z = f(x, y),$$

la fonction f et ses dérivées partielles $p = f'_x(x, y)$, $q = f'_y(x, y)$ soient des fonctions simples, continues de x, y dans la région T, ce qui entraîne la conséquence qu'en aucun point de la portion de surface à évaluer le plan tangent ne soit normal au plan XY. Prenons une facette MNM′ du polyèdre, ayant pour sommets

$$M(x, y, z); \quad M'(x+h, y+k, z+l); \quad N(x+h', y+k', z+l');$$

son aire ω' sera donnée par l'équation

$$\begin{aligned} 2\omega' &= MM' \cdot MN \cdot \sin NMM' = MM' \cdot MN \cdot \sqrt{1 - \cos^2 NMM'} \\ &= \sqrt{(h^2+k^2+l^2)(h'^2+k'^2+l'^2) - (hh'+kk'+ll')^2} \\ &= \sqrt{(hk'-kh')^2 + (kl'-lk')^2 + (lh'-hl')^2}, \end{aligned}$$

et sa projection $P\alpha\beta = \omega$ sur le plan XY sera exprimée par la même formule en faisant $l = l' = 0$,

$$2\omega = \sqrt{(hk' - kh')^2}.$$

Mais la formule de Taylor donne, θ étant > 0 et < 1,

$$l = f(x+h, y+k) - f(x,y) = hf'_x(x+\theta h, y+\theta k) + kf'_y(x+\theta h, y+\theta k),$$

et comme les triangles $P\alpha\beta$ décroissent indéfiniment, que les fonctions f'_x et f'_y sont continues dans la région T, on peut (**138**) supposer que l'oscillation de chacune de ces fonctions soit moindre qu'une quantité arbitrairement petite σ dans chacun des triangles $P\alpha\beta$; les coefficients de h et de k différeront donc respectivement de $f'_x(x, y)$ et de $f'_y(x, y)$, en valeur absolue, d'une quantité moindre que σ. En désignant donc, dans tout ce qui suit, par la lettre η affectée de divers accents ou indices, une quantité comprise entre -1 et $+1$, nous pourrons poser

$$l = h\,[f'_x(x, y) + \eta\sigma] + k\,[f'_y(x, y) + \eta_1\sigma].$$

Soient ρ et ρ' les côtés $P\alpha$, $P\beta$ du triangle projeté, ϖ l'angle $\alpha P\beta$ qu'ils comprennent; h et k étant numériquement moindres que ρ, on peut écrire encore

$$l = ph + qk' + 2\sigma\eta_2\rho,$$

et de même

$$l' = ph' + qk' + 2\sigma\eta'_2\rho',$$

d'où l'on tire, en observant encore que h, k sont moindres que ρ; h' et k' que ρ' en valeur absolue,

$$kl' - lk' = p(kh' - hk') + 4\sigma\eta''\rho\rho',$$
$$lh' - hl' = q(kh' - hk') + 4\sigma\eta'''\rho\rho'.$$

Substituons dans l'expression de ω', mettons en facteur sous le radical

$$(kh' - hk')^2 = 4\omega^2 = \rho^2\rho'^2 \sin^2\varpi,$$

il viendra

$$\omega' = \omega\sqrt{1 + (p + 4\sigma\eta'' \operatorname{cosec} \varpi)^2 + (q + 4\sigma\eta''' \operatorname{cosec} \varpi)^2}.$$

On voit sans peine que la valeur du radical est comprise entre les deux quantités

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} + 4\sigma \operatorname{cosec}\varpi \sqrt{\eta''^2 + \eta'''^2},$$
$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} - 4\sigma \operatorname{cosec}\varpi \sqrt{\eta''^2 + \eta'''^2},$$

car si on élève ces trois expressions au carré et qu'on les compare, on reconnaît que cela revient à l'inégalité

$$\sqrt{1+p^2+q^2}\sqrt{\eta''^2+\eta'''^2} > \text{VA}\,(p\eta''+q\eta''')$$

qui est évidente en vertu du théorème (1, II).

Il s'ensuit que ω' peut être représenté par une expression de la forme suivante $(-1 < \lambda < 1)$:

$$\omega' = \omega(\sqrt{1+p^2+q^2} + 8\lambda\sigma \operatorname{cosec} \varpi).$$

Nous aurons donc, Σ désignant une somme qui s'étend à toutes les facettes,

$$\Sigma\omega' = \Sigma\omega\sqrt{1+p^2+q^2} + 8\sigma\Sigma\lambda\omega \operatorname{cosec} \varpi.$$

D'après les suppositions faites sur les limites de grandeur des angles des facettes MNM' et d'inclinaison du plan tangent à la surface sur le plan XOY, nous devons admettre que, pour aucune des facettes, VA $\sin\varpi$ ne devient plus petit qu'une fraction déterminée; $\operatorname{cosec}\varpi$ admet donc une limite supérieure H; λ est compris entre -1 et $+1$, donc $\Sigma\lambda\omega \operatorname{cosec}\varpi$ est, en valeur absolue, moindre que HT, T désignant l'aire comprise dans le contour (C). Comme σ est abitrairement petit, on en conclut que le dernier terme a pour limite zéro lorsque les facettes MNM' tendent vers zéro. D'autre part, la somme des éléments $P\alpha\beta = \omega$ compose l'aire T si le contour (C) est polygonal, ou a pour limite l'aire T si ce contour est curviligne. On a donc, en général,

$$\lim \Sigma\omega\sqrt{1+p^2+q^2} = \int_T dT\sqrt{1+p^2+q^2},$$

d'où, S étant la limite de $\Sigma\omega'$,

$$(1) \qquad S = \int_T dT\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

Il est ainsi démontré que la surface du polyèdre inscrit tend vers une limite déterminée, et que cette limite est la même, quelle que soit la loi de détermination de ses faces, pourvu qu'elles soient toutes infiniment petites et satisfassent aux conditions indiquées.

On remarque que, d'après les formules des cosinus directeurs de la normale à une surface (**238**), le radical représente $1 : \cos\nu$, ν étant

l'angle aigu de la normale à la surface au point (x, y, z) avec l'axe des z positifs. On peut donc écrire aussi

$$(2) \qquad S = \int_T \frac{dT}{\cos \nu}.$$

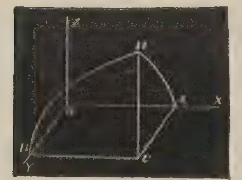
Nous avons supposé dans notre démonstration 1° que la fonction $f(x, y)$ était une fonction simple dans la région T ; 2° que le plan tangent n'était, en aucun point de cette région, normal au plan XY. Si ces conditions n'étaient pas réalisées, on partagerait l'aire à évaluer en plusieurs parties dont chacune y satisferait, ou l'on changerait le plan de projection XY.

376. L'intégrale double (1) se ramène, comme d'habitude, à deux intégrales simples successives. Si l'on suppose que le contour (C) ne soit coupé en plus de deux points par aucune parallèle à l'axe des y, et si l'on désigne par $y_1 = \varphi_1(x)$, $y_2 = \varphi_2(x)$ les valeurs de y, fonctions de x $(y_1 < y_2)$, qui répondent à une même valeur quelconque de x sur ce contour, par x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$, les valeurs extrêmes de x dans le champ d'intégration, on aura

$$(3) \qquad S = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

Si le contour ABCD se réduit à un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes OX, OY, y_1 et y_2 seront des constantes données comme x_1 et x_2.

Si l'on a à évaluer l'aire d'une surface fermée $F(x, y, z) = 0$, que les parallèles à l'axe OZ coupent généralement en deux points, on opérera comme au n° **372**. On tracera sur le plan XY le contour ABCD qui renferme les projections de tous les points de la surface ; le cylindre vertical qui aura pour base ABCD déterminera sur la surface un contour A'B'C'D' qui partagera cette surface en une nappe supérieure S_2 dont l'ordonnée z_2 se déduira de l'équation $F(x, y, z) = 0$, et une nappe inférieure S_1. On évaluera séparément les portions S_1 et S_2 par la formule (2). Ordinairement, le contour ABCD se déterminera comme il a été expliqué au N° **372**.


Fig. 73.

377. Considérons, sur la surface conique $z^2 = 2xy$, l'aire OADB

(fig. 73) limitée par les intersections de la surface par les plans $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$. On a d'abord

$$p = \frac{y}{z}, \quad q = \frac{x}{z}, \quad 1 + p^2 + q^2 = \frac{(x+y)^2}{2xy},$$

en ayant égard à l'équation de la surface. Donc

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^a dx \int_0^b \frac{x+y}{\sqrt{xy}} dy = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^a x^{\frac{1}{2}} dx \int_0^b \frac{dy}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x}} \int_0^b y^{\frac{1}{2}} dy,$$

et si l'on effectue les intégrations,

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{4}{3} a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{3} a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{2^{\frac{2}{3}}}{3} \sqrt{ab}\,(a+b).$$

Si, sur cette même surface, on voulait évaluer l'aire délimitée par les axes OX, OY et par le cylindre vertical

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{2}} = 1,$$

dont la trace sur le plan XY est une parabole, tangente à OX pour $x = a$ et à OY pour $y = b$, on ferait, dans la formule (3),

$$x_1 = 0, \quad x_2 = a, \quad y_1 = 0, \quad y_2 = b \left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \right]^2.$$

On trouverait

$$\int_0^{y_2} \frac{dy}{\sqrt{y}} = 2b^{\frac{1}{2}} \left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \right], \quad \int_0^{y_2} y^{\frac{1}{2}} dy = \frac{2}{3} b^{\frac{3}{2}} \left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \right]^3,$$

et par suite

$$S = \sqrt{2b} \int_0^1 \left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \right] x^{\frac{1}{2}} dx + \frac{\sqrt{2}}{3} b^{\frac{3}{2}} \int_0^a \left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \right]^3 \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

On a, tout calcul fait,

$$S = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{ab}{2}}\,(a+b).$$

378. Comme nous l'avons exposé dans la théorie des intégrales doubles, on peut employer, pour évaluer l'intégrale (1) ou (2), tel mode de décomposition de la région T que l'on juge convenable. Ainsi, on

peut, comme au n° **366**, se servir des coordonnées polaires r et θ et l'on a

$$(4) \qquad S = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{r_1}^{r_2} \frac{r dr}{\cos \nu},$$

θ_1, θ_2, r_1, r_2 ayant la même signification que dans ce numéro.

Il suffira d'exprimer $1 : \cos \nu$ ou $\sqrt{1 + p^2 + q^2}$ en fonction des coordonnées r et θ, d'après les formules du n° **176**. On arrive souvent ainsi à des intégrations plus simples.

Soit, par exemple, à évaluer sur la surface sphérique

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

l'aire AMXA délimitée par le plan XZ, par le cylindre vertical OPXMA décrit sur le rayon a comme diamètre (**374**, fig. 68). La normale se confondant ici avec le rayon de la sphère, on a

$$\cos \nu = \frac{z}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{a},$$

et en exprimant en coordonnées polaires l'équation du cercle de base, on voit que

$$r_1 = 0, \quad r_2 = a \cos\theta, \quad \theta_1 = 0, \quad \theta_2 = \pi : 2,$$

d'où

$$\int_0^{r_2} \frac{r dr}{\cos \nu} = a \int_0^{a \cos \theta} \frac{r dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = a^2 (1 - \sin\theta),$$

d'où l'on tire facilement

$$S = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin\theta)\, d\theta = a^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

En quadruplant, on aura, pour l'aire totale détachée de la surface sphérique par le cylindre prolongé dans les deux sens, $2a^2(\pi - 2)$.

379. Voici un exemple remarquable de l'avantage d'un mode de décomposition convenable, en ce que l'on ramène à des intégrales simples un problème qui dépend, généralement, des intégrales doubles. Considérons l'ellipsoïde à trois axes inégaux.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (a > b > c).$$

Cherchons sur la surface le lieu des points (x, y, z) pour lesquels $\cos\nu$ a une valeur constante u. D'après les formules du nº **238**, ces points vérifieront l'équation

$$\frac{z^2}{c^2} = u^2\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right),$$

et en éliminant z^2 entre cette équation et celle de la surface, on aura pour la projection du lieu cherché sur le plan XY, en posant $a^2 - c^2 = a^2k^2$, $b^2 - c^2 = b^2k'^2$, l'équation

$$\frac{x^2}{a^2}\frac{1 - k^2u^2}{1 - u^2} + \frac{y^2}{b^2}\frac{1 - k'^2u^2}{1 - u^2} = 1.$$

C'est une ellipse dont les demi-axes ont pour valeurs

$$\frac{a\sqrt{1 - u^2}}{\Delta}, \quad \frac{b\sqrt{1 - u^2}}{\Delta'},$$

si l'on fait $\Delta = \sqrt{1 - k^2u^2}$, $\Delta' = \sqrt{1 - k'^2u^2}$, et dont l'aire E est donnée par l'équation

$$E = \pi ab\frac{1 - u^2}{\Delta\Delta'}.$$

Cela posé, décomposons la région T, qui est ici limitée par l'ellipse principale située dans le plan XY, en éléments du second ordre ω au moyen des ellipses E et d'un système de rayons. Pour tous les éléments compris entre deux ellipses u et $u + \Delta u$, $\cos\nu$ ayant la même valeur, la somme $\Sigma\frac{\omega}{\cos\nu}$ se réduira à $\Delta E : u$, ΔE étant la différence des aires des deux ellipses.

On aura donc, u variant depuis 1 jusqu'à 0 dans l'intervalle de l'intégration pour la nappe supérieure de l'ellipsoïde, l'expression

$$S = -2\int_0^1 \frac{dE}{u}.$$

Pour transformer cette intégrale, observons que

$$\int\frac{dE}{u} = \frac{E}{u} + \int\frac{E\,du}{u^2},$$

et que

$$\frac{E\,du}{u^2} = \pi ab\frac{du}{u^2\Delta\Delta'} - \pi ab\frac{du}{\Delta\Delta'}.$$

D'autre part, par différentiation,

$$d.\frac{\Delta\Delta'}{u} = -\frac{k^2\Delta'}{\Delta}du - \frac{k'^2\Delta}{\Delta'}du - \frac{\Delta\Delta'}{u^2}du = -\frac{k^2\Delta'}{\Delta}du - \frac{\Delta}{u^2\Delta'}du$$
$$= -\frac{k^2\Delta'}{\Delta}du - \frac{du}{u^2\Delta\Delta'} + k^2\frac{du}{\Delta\Delta'},$$

d'où, en substituant,

$$\frac{\mathrm{E}du}{u^2} = \pi ab\left[-d\frac{\Delta\Delta'}{u} - \frac{k^2\Delta'}{\Delta}du - (1-k^2)\frac{du}{\Delta\Delta'}\right],$$

et par suite

$$\int\frac{d\mathrm{E}}{u} = \pi ab\left[\frac{1-u^2}{u\Delta\Delta'} - \frac{\Delta\Delta'}{u} - k^2\int\frac{\Delta'}{\Delta}du - (1-k^2)\int\frac{du}{\Delta\Delta'}\right].$$

D'après cela, on a pour l'expression de la surface totale de l'ellipsoïde

$$\mathrm{S} = -2\pi ab\left[\frac{1-u^2-\Delta^2\Delta'^2}{u\Delta\Delta'}\right]_0^1 + 2\pi ab\left[k^2\int_0^1\frac{\Delta'}{\Delta}du - (1-k^2)\int_0^1\frac{du}{\Delta\Delta'}\right].$$

En remplaçant $\Delta^2\Delta'^2$ par sa valeur et faisant $u=0$, $u=1$, on trouve pour le premier terme $2\pi ab\sqrt{(1-k^2)(1-k'^2)} = 2\pi c^2$, et enfin

$$\mathrm{S} = 2\pi c^2 + 2\pi ab\left[k^2\int_0^1\frac{\Delta'}{\Delta}du - (1-k^2)\int_0^1\frac{du}{\Delta\Delta'}\right].$$

Ces deux intégrales se ramènent aux intégrales elliptiques (**326**, **342**) en posant $ku = \sin\varphi$.

Exercices.

1. Calculer l'aire de la surface $z = c \operatorname{arc\,tg}(y:x)$ comprise entre les plans XZ, YZ et le cylindre vertical $x^2+y^2=a^2$.

R.
$$\mathrm{S} = \frac{\pi}{4}\left[a\sqrt{a^2+c^2} + c^2\,\mathrm{l.}\,\frac{a+\sqrt{a^2+c^2}}{c}\right].$$

2. Le paraboloïde à axe vertical

$$z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b} \qquad (\alpha)$$

est coupé par une sphère de rayon c qui touche, comme lui, le plan XY à l'origine des coordonnées. Evaluer la portion de surface sphérique limitée par la courbe d'intersection.

R. On trouve, par l'application de la formule (4),

$$\mathrm{S} = 4\pi c\sqrt{ab}.$$

3. Le même paraboloïde elliptique (α) est coupé, par le cylindre elliptique vertical

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

suivant une courbe. Trouver l'aire du paraboloïde limitée par la courbe d'intersection.

R.
$$S=\frac{2\pi ab}{3}\left(2^{\frac{3}{2}}-1\right).$$

4. Trouver, sur la surface du même paraboloïde (α), les courbes pour lesquelles $\cos\nu$ est constant, et l'aire limitée par une de ces courbes, $\nu=\nu_1$.

R. On emploiera le mode de décomposition du n° **228**, et l'on trouvera, pour l'équation des courbes projetées sur le plan XY,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\operatorname{tg}^2\nu,$$

et pour l'aire demandée

$$S=\frac{2\pi ab}{3}\left(\frac{1}{\cos^3\nu_1}-1\right).$$

5. Trouver l'expression de l'aire totale d'une surface fermée dont l'équation est donnée en coordonnées sphériques (r, θ, ψ) (**178**), le pôle O étant dans l'intérieur de la surface.

R.
$$S=\int_0^{2\pi}d\psi\int_0^{\pi}\frac{r^3\sin\theta\,d\theta}{P},$$

P étant la distance du pôle au plan tangent.

6. L'équation d'une surface étant donnée sous la forme

$$x=f(u,v),\quad y=f_1(u,v),\quad z=f_2(u,v),$$

où u, v sont des variables indépendantes, montrer que l'aire comprise dans un contour fermé (C′) sur la surface a pour expression

$$S=\int du\int dv\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2},$$

les limites des intégrales étant celles de la région déterminée sur le plan XY par la projection du contour (C′).

7. L'aire totale de la surface d'élasticité de Fresnel

$$(x^2+y^2+z^2)^2-(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)=0$$

est égale à celle de l'ellipsoïde qui a pour demi-axes $bc:a$, $ca:b$, $ab:c$.

R. Pour démontrer ce théorème, on calculera l'aire de la surface d'élasticité par la formule de l'ex. **5**, et celle de l'ellipsoïde par celle de l'ex. **6**, en posant

$$x=\frac{bc}{a}\sin u\cos v,\quad y=\frac{ca}{b}\sin u\sin v,\quad z=\frac{ab}{c}\cos u.$$

8. Une courbe tracée sur la sphère de rayon 1 est définie par une équation entre les coordonnées ρ et ω (Ch. XXI, ex. **11**). Montrer que l'aire sphérique entre cette courbe et deux rayons ρ_1 et ρ qui répondent aux angles $\omega = 0$ et ω, a pour expression

$$S = \omega - \int_0^\omega \cos\rho \, d\omega.$$

Si la courbe est fermée et le pôle placé à l'intérieur, $\omega = 2\pi$ donnera l'aire totale.

9. Appliquer cette formule à la *loxodromie sphérique* qui coupe le rayon ρ sous un angle constant.

R. On trouve, pour l'équation de la courbe et pour l'aire entre les angles 0 et ω,

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\rho = e^{k\omega}, \quad S = \omega + \frac{1}{k}\,\mathrm{l}.\,\frac{e^{k\omega} + e^{-k\omega}}{2}.$$

CHAPITRE XXXVIII.

DÉVELOPPEMENTS SUR QUELQUES POINTS DE LA THÉORIE DES INTÉGRALES DÉFINIES.

380. Nous avons vu (**317**) comment on définit une intégrale lorsqu'une des limites est infinie ou que la fonction sous le signe $\int$ passe par l'infini; cherchons comment on peut reconnaître, dans ces cas, lorsqu'on ne sait pas obtenir l'intégrale indéfinie, si l'intégrale définie a une valeur déterminée ou non. Nous examinerons la question d'abord pour les intégrales à limites infinies. Soit

$$u = \int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{x'=\infty} \int_a^{x'} f(x)\,dx,$$

a étant une constante donnée, $f(x)$ une fonction continue dans l'intervalle (a, ∞).

Pour que la valeur de cette expression soit finie et déterminée, la condition nécessaire et suffisante est que l'intégrale

$$(\alpha) \qquad \int_{x'}^{x''} f(x)\,dx,$$

x'' désignant une quantité arbitraire plus grande que x', *tende vers zéro lorsque x tend vers l'infini.*

C'est une conséquence immédiate des principes I et II de la théorie des limites (**18**). L'intégrale (α) est ce qu'on nomme une intégrale *singulière.*

381. On peut, dans un grand nombre de cas, s'assurer si la condition ci-dessus est vérifiée. Soit k une quantité constante. D'après le 1er théorème de la moyenne (**309**), si l'on désigne par ξ une quantité $> x'$ et $< x''$, on a

$$\int_{x'}^{x''} f(x)\,dx = \int_{x'}^{x''} x^{1+k} f(x) \frac{dx}{x^{1+k}} = \xi^{1+k} f(\xi) \int_{x'}^{x''} \frac{dx}{x^{1+k}}$$
$$= -\frac{1}{k}\xi^{1+k} f(\xi)\left(\frac{1}{x''^k} - \frac{1}{x'^k}\right).$$

Si k a une valeur positive, quelque petite qu'elle soit, le dernier facteur a pour limite zéro quand x' et x'' croissent indéfiniment. Si donc le facteur $\xi^{1+k} f(\xi)$ ne peut croître, en valeur absolue, au-dessus d'un nombre fixe, l'intégrale singulière aura pour limite zéro. Donc

I. *Pour que l'intégrale u ait une valeur finie et déterminée, il suffit que l'expression* $\mathrm{VA}\, x^{1+k} f(x)$ *ne puisse croître indéfiniment avec* x, k *étant un nombre positif, si petit qu'il soit.*

D'autre part, on peut mettre l'intégrale singulière sous la forme

$$\int_{x'}^{x''} f(x)\,dx = \xi f(\xi) \int_{x'}^{x''} \frac{dx}{x} = \xi f(\xi)\,\mathrm{l.}\left(\frac{x''}{x'}\right),$$

et comme le dernier facteur a une valeur indéterminée qui dépend du rapport $x'' : x'$, l'intégrale singulière ne peut tendre vers zéro, à moins que $\xi f(\xi)$ ne converge vers la limite zéro. De là cette seconde règle :

II. *L'intégrale u ne peut avoir une valeur finie et déterminée si l'expression* $\mathrm{VA}\, x f(x)$, *pour des valeurs indéfiniment croissantes de* x, *reste constamment supérieure à un nombre déterminé.*

Exemples : La règle I montre que les intégrales

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx, \quad \int_0^\infty \frac{\cos \alpha x\, dx}{a^2 + x^2}, \quad \int_1^\infty x^{-\frac{5}{4}} \mathrm{l}\, x dx$$

sont finies et déterminées; la règle II fait voir que les intégrales

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{a^2 + x^2}, \quad \int_0^\infty \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}\, dx$$

ne le sont pas.

382. Il est à remarquer que, si $f(x)$ ne cesse pas de changer de signe pour des valeurs croissantes de x et même, dans certains cas, sans que $f(x)$ change de signe, le produit $x f(x)$ pourra acquérir des valeurs

absolues quelconques sans que l'intégrale soit infinie ou indéterminée, parce que ξ suit une loi inconnue lorsque x', x'' croissent à l'infini. Considérons, par exemple, l'intégrale

$$\int_a^\infty x^{-\frac{1}{2}} \cos x \, dx,$$

dans laquelle $x f(x) = x^{\frac{1}{2}} \cos x$ peut surpasser tout nombre donné lorsque x croît indéfiniment. On a

$$\int_a^\infty x^{-\frac{1}{2}} \cos x \, dx = \left[x^{\frac{1}{2}} \sin x \right]_a^\infty + \frac{1}{2} \int_a^\infty x^{-\frac{3}{2}} \sin x \, dx,$$

et comme la dernière intégrale a une valeur finie et déterminée d'après la règle I, il en est de même de la première. On verrait qu'il en est de même pour les intégrales

$$\int_a^\infty x^{-\frac{1}{2}} \sin x \, dx, \quad \int_a^\infty \cos x^2 \, dx, \quad \int_a^\infty \sin x^2 \, dx,$$

dont les deux dernières se ramènent aux précédentes.

Les intégrales de la forme

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^\infty f(x) dx$$

se ramenant sans peine à la première, il est inutile de nous en occuper.

383. Considérons maintenant une intégrale prise entre des limites finies, mais dans laquelle la fonction sous le signe $\int$ passe par l'infini. Supposons que l'on ait

$$u' = \int_a^b f(x) dx, \quad f(b - 0) = \infty,$$

la fonction $f(x)$ étant d'ailleurs continue dans l'intervalle $(a, b - \varepsilon)$, où ε est une fraction aussi petite que l'on veut. *Pour que l'intégrale* (**317**)

$$u' = \lim_{\varepsilon = 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

ait une valeur finie et déterminée, il faut et il suffit, d'après les principes de la théorie des limites, *que l'intégrale singulière*

$$(\beta) \qquad \int_{b-\varepsilon}^{b-\varepsilon'} f(x) \, dx,$$

où ε' est un nombre arbitraire moindre que ε, *tende vers zéro lorsque* ε *tend vers zéro.* Ainsi, l'intégrale

$$\int_{1-\varepsilon}^{1-\varepsilon'} \frac{dx}{1-x} = \mathrm{l.}\,\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}$$

ayant une valeur indéterminée qui dépend du rapport $\varepsilon : \varepsilon'$, on peut en conclure que l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x}$$

ne saurait avoir une valeur finie et déterminée.

Or, on peut, au moyen du premier théorème de la moyenne et en désignant par k un nombre positif constant, par ξ une quantité comprise entre $b-\varepsilon$ et $b-\varepsilon'$, écrire

$$\int_{b-\varepsilon}^{b-\varepsilon'} f(x)\,dx = (b-\xi)^{1-k} f(\xi) \int_{b-\varepsilon}^{b-\varepsilon'} \frac{dx}{(b-x)^{1-k}} = (b-\xi)^{1-k} f(\xi)\,\frac{\varepsilon^k - \varepsilon'^k}{k}.$$

Le facteur $(\varepsilon^k - \varepsilon'^k)$ tendant vers zéro lorsque ε et ε' décroissent indéfiniment d'une manière quelconque, si $(b-\xi)^{1-k} f(\xi)$ ne croît pas indéfiniment, l'intégrale singulière (β) aura pour limite zéro. Donc

III. *Pour que l'intégrale u' ait une valeur finie et déterminée, lorsque $f(b-0)$ est infini, il suffit que l'expression $(b-x)^{1-k} f(x)$ ne puisse croître en valeur absolue au-dessus de toute limite lorsque x tend vers la limite b, k étant une constante positive, si petite qu'elle soit.*

D'autre part, l'intégrale singulière peut aussi s'écrire

$$\int_{b-\varepsilon}^{b-\varepsilon'} f(x)\,dx = (b-\xi)\,f(\xi) \int_{b-\varepsilon}^{b-\varepsilon'} \frac{dx}{b-x} = (b-\xi)\,f(\xi)\,\mathrm{l.}\,\frac{\varepsilon}{\varepsilon'};$$

le dernier facteur a une valeur indéterminée dépendant du rapport $\varepsilon : \varepsilon'$; u' ne pourra avoir un sens que si $(b-\xi) f(\xi)$ tend vers zéro. D'où cette règle :

IV. *L'intégrale u' ne peut avoir une valeur finie et déterminée si $(b-x) f(x)$ reste toujours supérieur à un nombre fixe, x tendant vers la limite b.*

Si, dans l'intégrale u', on avait $f(a+0)=\infty$, ou si la fonction $f(x)$ devenait infinie pour une valeur $x = a_1$, comprise entre a et b, on raisonnerait de même et l'on aurait des règles analogues faciles à énoncer; ces cas se ramènent d'ailleurs, comme on l'a vu, à celui que nous venons de traiter.

384. La règle III fait voir que les intégrales

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{99}{100}}}$$

sont déterminées, car les produits

$$(1-x)^{1-k}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}-k},$$

$$(1-x)^{1-k}(1-x^2)^{-\frac{99}{100}} = (1+x)^{-\frac{99}{100}}(1-x)^{\frac{1}{100}-k}$$

s'évanouissent pour $x=1$, si l'on prend $k < 1:2$ dans le premier cas; $k < 0{,}01$ dans le second. Mais on voit par la règle IV que l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{1-x^2}{dx}$$

n'existe pas, car $(1-x)(1-x^2)^{-1} = (1+x)^{-1}$ ne peut tendre vers zéro lorsque x tend vers l'unité. On sait en effet que cette intégrale est infinie.

L'intégrale

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx,$$

où $0 < p < 1$, $0 < q < 1$, a une valeur finie et déterminée, bien que la fonction sous le signe $\int$ devienne infinie pour $x=0$ et pour $x=1$.

L'intégrale importante

$$\Gamma(\mu) = \int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-x}dx$$

est déterminée si μ est > 0. En effet, d'une part, lorsque x tend vers zéro, le produit

$$x^{1-k}\, x^{\mu-1}e^{-x} = x^{\mu-k}e^{-x}$$

ne croîtra pas indéfiniment si l'on prend $k < \mu$. D'autre part, pour des valeurs indéfiniment croissantes de x, on aura

$$\lim_{x=\infty} x^{1+k}\, x^{\mu-1}\, e^{-x} = 0,$$

quelque grand que soit μ (**24**). D'ailleurs, pour toute valeur de x entre zéro et l'infini la fonction sous le signe $\int$ est continue.

385. *Remarque.* — Lorsque la fonction $f(x)$ devient infinie pour une valeur c de x comprise entre a et b, on sait que, par définition,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\eta}^b f(x)\,dx\right],$$

ε et η tendant vers zéro d'un manière quelconque, et les règles ci-dessus montreront dans quels cas l'intégrale existe. Dans certains cas, l'intégrale peut être indéterminée, mais elle acquiert une valeur déterminée lorsque l'on prend $\eta = \varepsilon$: cette valeur est dite alors la ***valeur principale*** de l'intégrale indéterminée. Ainsi, l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} = \lim \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\eta}^{1} \frac{dx}{x} \right) = \lim \mathrm{l.} \frac{\eta}{\varepsilon}$$

est indéterminée, mais elle a une valeur principale, qui est $\mathrm{l.}\, 1 = 0$.

Certains problèmes d'analyse et de mécanique conduisent à des intégrales définies dont la valeur principale fournit la solution véritable de la question.

386. Les intégrales singulières ne sont pas seulement utiles pour vérifier l'existence d'autres intégrales, comme on l'a vu plus haut, mais aussi pour trouver leurs valeurs. Considérons, par exemple, l'intégrale

$$u = \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x} dx, \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$

On peut poser

$$u = \lim_{\varepsilon=0} \left(\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{x} dx - \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\cos \beta x}{x} dx \right),$$

la décomposition étant permise, parce que chaque intégrale a une valeur déterminée, ce qui n'avait pas lieu lorsque sa limite inférieure était zéro. Mais en faisant $\beta x = \alpha z$ dans la seconde, on trouve

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\cos \beta x}{x} dx = \int_{\frac{\beta\varepsilon}{\alpha}}^{\infty} \frac{\cos \alpha z}{z} dz = \int_{\frac{\beta\varepsilon}{\alpha}}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{x} dx,$$

d'où

$$u = \lim_{\varepsilon=0} \int_{\varepsilon}^{\frac{\beta\varepsilon}{\alpha}} \frac{\cos \alpha x}{x} dx.$$

La valeur de cette intégrale singulière s'obtient sans difficulté ; elle est égale à

$$\cos \alpha\xi\, \mathrm{l.} \frac{\beta\varepsilon}{\alpha\varepsilon} = \cos \alpha\xi\, \mathrm{l.} \frac{\beta}{\alpha},$$

ξ étant compris entre les limites de l'intégrale, et ayant, par suite, zéro pour limite lorsque ε tend vers zéro. On a donc, à la limite,

$$\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x}\, dx = \mathrm{l}.\frac{\beta}{\alpha}.$$

387. *Différentiation sous le signe* $\int$. — Une intégrale définie, dans laquelle la fonction sous le signe $\int$ renferme un paramètre arbitraire α, est une fonction de ce paramètre et l'on peut se proposer d'en chercher la dérivée par rapport à α. Soit donc

$$(1) \qquad \varphi(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\, dx,$$

et nous supposons d'abord que a, b soient des constantes finies et indépendantes de α; que la dérivée partielle $f'_\alpha(x, \alpha)$ de $f(x, \alpha)$ soit continue par rapport à (x, α) dans l'intervalle (a, b) de x et $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ de α, ε étant une quantité constante, si petite qu'elle soit d'ailleurs. Donnons à α un accroissement infiniment petit h, positif ou négatif; nous aurons, θ étant > 0 et < 1,

$$\frac{\varphi(\alpha + h) - \varphi(\alpha)}{h} = \frac{1}{h}\int_a^b f(x, \alpha + h)dx - \frac{1}{h}\int_a^b f(x, \alpha)dx$$

$$= \int_a^b \frac{f(x, \alpha + h) - f(x, \alpha)}{h}\, dx = \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha + \theta h)\, dx.$$

On peut poser

$$f'_\alpha(x, \alpha + \theta h) = f'_\alpha(x, \alpha) + \mathrm{H},$$

H étant une fonction de x, α et h qui, pour toute valeur donnée de x, tend vers zéro en même temps que h, et l'on a, par conséquent,

$$\lim_{h=0} \frac{\varphi(\alpha + h) - \varphi(\alpha)}{h} = \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha)dx + \lim_{h=0} \int_a^b \mathrm{H}dx.$$

Mais, d'après l'hypothèse sur la continuité de $f'_\alpha(x, \alpha)$, on peut supposer $\mathrm{VA}\,h$ assez petit pour que H soit moindre qu'une quantité donnée σ, arbitrairement petite, pour toute valeur de x dans l'intervalle (a, b) (**139**), donc

$$\mathrm{VA} \int_a^b \mathrm{H}dx < \sigma(b - a)$$

peut être supposé aussi petit qu'on le veut, donc sa limite est zéro lorsque h tend vers zéro. On a donc

(2)
$$\varphi'(\alpha) = \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha)dx,$$

ou, sous une autre forme,

$$\frac{d}{d\alpha}\int_a^b f(x, \alpha)dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx.$$

Ainsi, quand les conditions énoncées sont vérifiées, *pour différentier une intégrale définie par rapport à un paramètre variable, il suffit de différentier la fonction sous le signe d'intégration.*

388. Cette règle de Leibnitz ne peut être étendue, sans restriction, aux intégrales dont une limite est infinie ou dont la fonction sous le signe $\int$ passe par l'infini. Soit

$$\varphi(\alpha) = \int_a^\infty f(x, \alpha)\, dx,$$

et admettons que cette intégrale ait toujours une valeur dans l'intervalle $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$; que $f'_\alpha(x, \alpha)$ soit toujours continue dans l'intervalle (a, ∞) de x et $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ de α. Désignons par x' une valeur de x, aussi grande que nous voulons, en sorte que

$$\varphi(\alpha) = \int_a^{x'} f(x, \alpha)\, dx + \int_{x'}^\infty f(x, \alpha)\, dx;$$

par suite, la règle de Leibnitz s'appliquant sans difficulté à la première de ces deux intégrales,

$$\varphi'(\alpha) = \int_a^{x'} f'_\alpha(x, \alpha)\, dx + \lim_{h=0}\int_{x'}^\infty \frac{f(x, \alpha + h) - f(x, \alpha)}{h} dx.$$

Si l'intégrale de $f'_\alpha(x, \alpha)\,dx$ entre a et ∞ a un sens, on voit sans peine que cette équation peut s'écrire

(3)
$$\varphi'(\alpha) = \int_a^\infty f'_\alpha(x, \alpha)\, dx + \lim_{h=0}\int_{x'}^\infty [f'_\alpha(x, \alpha + \theta h) - f'_\alpha(x, \alpha)]\, dx.$$

Dans le dernier terme, x' peut avoir une valeur aussi grande qu'on le veut; si donc on peut prouver que, pour des valeurs suffisamment grandes de x' et suffisamment petites de h, ce dernier terme devient aussi petit qu'on le veut, sa limite sera zéro et l'équation (2) subsistera pour le cas $b = \infty$.

C'est ce qui aura lieu, en général, si l'expression $\text{Va}\, x^{1+k} f'_\alpha(x, \alpha)$, où k est > 0, ne croît pas au-dessus de toute limite pour des valeurs arbitrairement grandes de x, et pour des valeurs quelconques de α dans l'intervalle $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$, car on prouvera sans peine comme au n° **381** que la dernière intégrale décroît indéfiniment en valeur absolue lorsque x' tend vers l'infini.

Ainsi, l'intégrale finie et déterminée

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos \alpha x dx$$

nous donne

$$x^{1+k} f'_\alpha(x, \alpha) = - x^{2+k} e^{-x^2} \sin \alpha x,$$

qui tend vers zéro avec $1 : x$, donc

$$\frac{d}{d\alpha}\int_0^\infty e^{-x^2} \cos \alpha x\, dx = -\int_0^\infty x e^{-x^2} \sin \alpha x\, dx.$$

389. Considérons encore le cas où dans l'équation (1), pour la valeur $x = b$, la fonction $f(x, \alpha)$ ou sa dérivée $f'_\alpha(x, \alpha)$ deviendrait infinie, ou discontinue, dans le voisinage de la valeur de α que l'on considère. En désignant par $x' < b$ une quantité aussi voisine de b que l'on voudra, on aura, comme ci-dessus,

$$\varphi(\alpha) = \int_a^{x'} f(x, \alpha)\, dx + \int_{x'}^b f(x, \alpha)\, dx,$$

et l'on suppose d'ailleurs que $\varphi(\alpha)$ a une valeur déterminée. On aura, d'après (2),

$$\varphi'(\alpha) = \int_a^{x'} f'_\alpha(x, \alpha)\, dx + \lim_{h=0} \int_{x'}^b \frac{f(x, \alpha + h) - f(x, \alpha)}{h}\, dx$$
$$= \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha) + \lim_{h=0} \int_{x'}^b [f'_\alpha(x, \alpha + \theta h) - f'_\alpha(x, \alpha)]\, dx,$$

et si l'on peut rendre le dernier terme aussi petit qu'on le veut, en faisant tendre h vers zéro et x' vers b, $\varphi'(\alpha)$ se réduira au premier terme et l'équation (2) subsistera. C'est ce qui aura lieu si, pour toute valeur de α entre $\alpha - \varepsilon$ et $\alpha + \varepsilon$, la quantité $\text{Va}(b - x)^{1-k} f'_\alpha(x, \alpha)$ reste inférieure à un nombre fixe.

Si la fonction $f'_\alpha(x, \alpha)$ devenait discontinue pour $x = a$, ou pour certaines valeurs de x dans l'intervalle (a, b), on traiterait la question par une voie analogue facile à trouver.

390. Il reste a examiner le cas où les limites a et b dépendent elles-mêmes de α. Nous supposons d'ailleurs que les fonctions $f(x, \alpha)$, $f'_\alpha(x, \alpha)$ vérifient les mêmes conditions qu'au nº **387**, et que a et b admettent des dérivées par rapport à α. En raisonnant comme au nº **361** et désignant par a_1, b_1 des quantités comprises respectivement entre a et $a + \Delta a$, entre b et $b + \Delta b$, nous aurons

$$\frac{\varphi(\alpha + h) - \varphi(\alpha)}{h} = \int_a^b \frac{f(x, \alpha + h) - f(x, \alpha)}{h} dx$$
$$+ f(b_1, \alpha + h)\frac{\Delta b}{h} - f(a_1, \alpha + h)\frac{\Delta a}{h},$$

d'où, faisant tendre h vers zéro et ayant égard à ce qui a été démontré ci-dessus pour le premier terme (**387**),

$$\varphi'(\alpha) = \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha)\, dx + f(b, \alpha)\frac{db}{d\alpha} - f(a, \alpha)\frac{da}{d\alpha}. \tag{4}$$

Cette formule fournit la solution du problème.

391. *Intégrales doubles*(1). — La définition des intégrales doubles (**357**) suppose que le champ d'intégration T soit limité dans tous les sens et que la foncton $f(x, y)$ sous le signe $\int$ reste finie dans toute la région T. Lorsque ces conditions ne sont plus vérifiées, il y a lieu de définir à nouveau l'intégrale double et de s'assurer si elle a encore un sens.

Supposons d'abord que le champ d'intégration T s'étende indéfiniment dans une ou plusieurs directions, la fonction f restant finie et continue dans toute son étendue. On limitera par une ligne arbitraire (C′) une portion T′ de la région T, et l'on fera varier cette ligne de manière que la portion T′ finisse par embrasser tous les points de la région T. Si l'intégrale

$$\int_{T'} f(x, y)\, dT'$$

tend vers une limite fixe, indépendante de la forme du contour arbitraire (C′), cette limite sera, par définition, la valeur de l'intégrale $\int_T f(x, y)\, dT$ étendue à la région indéfinie.

Par exemple, si la région T est la portion indéfinie du plan comprise

---

(1) Pour les cas où ces intégrales peuvent se réduire à deux intégrales simples successives, voir la note à la fin du volume.

dans l'angle des coordonnées positives XOY, 1° on prendra l'intégrale dans le rectangle T′ limité par les droites $x = 0$, $x = x'$, $y = 0$, $y = y'$, on fera croître x' et y' indéfiniment et l'on cherchera la limite de l'intégrale; d'ailleurs, l'intégrale prise dans la région T′ se calculera par deux intégrations par rapport à x et à y comme on l'a vu; 2° on s'assurera que la limite vers laquelle converge l'intégrale pour x' et y' infinis ne serait pas changée, si l'on substituait aux droites $x = x'$, $y = y'$ dans l'angle XOY un autre contour arbitraire, terminé aux axes OX, OY, et s'étendant indéfiniment dans toutes les directions à partir de l'origine O.

Si l'intégrale doit s'étendre à toute l'aire indéfinie de la parabole $y^2 = 2px$, on la prendra d'abord dans une région T′ limitée par la courbe et par la droite $x = x'$, en sorte qu'on aura à intégrer par rapport à y entre $-\sqrt{2px}$ et $+\sqrt{2px}$, et par rapport à x entre $x = 0$, $x = x'$, puis on fera croître x' indéfiniment; il faudra que l'intégrale tende vers une limite finie et déterminée. Puis, on devra démontrer que cette limite resterait la même si l'on remplaçait la droite $x = x'$ par un contour arbitraire *intérieur* à la courbe, terminé de part et d'autre à celle-ci, et s'éloignant indéfiniment dans tous ses points du sommet de la courbe.

392. Les règles générales manquent, mais pour tracer la marche à suivre, concevons que la région T comprenne l'angle des coordonnées positives XOY, et que $f(x, y)$, pour des valeurs indéfiniment croissantes de x et de y, *finisse par rester constamment de même signe.* 1° Prenons l'intégrale dans la région T′ limitée par les axes OX, OY et un cercle de rayon r' ayant pour centre l'origine; donc (**366**)

$$\int_{T'} f(x, y)\, dT' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{r'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr.$$

Pour que cette intégrale ait une limite, r' devenant infini, il sera nécessaire et suffisant que l'intégrale

$$p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{r'}^{r''} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr$$

ait pour limite zéro, r'' étant arbitraire, mais $> r'$.

Cette condition sera remplie si, pour toute valeur de r supérieure à un nombre fixe, on a

$$(\gamma) \qquad \text{VA}\, r^{2+k} f(r\cos\theta, r\sin\theta) < \text{M},$$

M étant fini, k une constante positive, si petite qu'elle soit. En effet, on aura

$$\text{VA} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{r'}^{r''} f \cdot r\,dr < 2\pi M \int_{r'}^{r''} \frac{dr}{r^{1+k}} = \frac{2\pi M}{k} \left(\frac{1}{r'^k} - \frac{1}{r''^k} \right)$$

et cette quantité aura pour limite zéro, r' et r'' devenant infinis.

La condition $\lim p = 0$ pourrait d'ailleurs être remplie sans que la condition (γ) le fût; mais on verrait de même que, si VA $r^2 f(x, y)$ finissait par rester supérieur à un nombre fixe lorsque r croît à l'infini, l'intégrale p ne tendrait pas vers zéro et l'intégrale proposée n'aurait aucun sens.

3° Si $\lim p = 0$, l'intégrale double aura un sens; car, quel que soit le contour (C') par lequel on remplace le cercle de rayon r', pourvu qu'il s'éloigne indéfiniment de l'origine, on pourra toujours le renfermer entre deux quarts de cercle de rayons r' et r'' indéfiniment croissants; $f(x, y)$ *étant partout de même signe*, l'intégrale étendue à la région limitée par (C') et le cercle de rayon r' sera, en valeur absolue, moindre que l'intégrale p dont le champ est limité par les cercles de rayons r' et r'', et tendra vers zéro en même temps que p.

Donc, l'intégrale entre les OX, OY et le contour (C') aura même limite que l'intégrale entre OX, OY et le cercle de rayon r'.

Mais il importe de remarquer que cette conclusion cesserait d'être légitime, si $f(x, y)$ ne finissait pas par être constamment de même signe lorsque r croit indéfiniment; dans ce cas, la condition *lim* $p = 0$ *est donc toujours nécessaire, mais elle n'est plus suffisante.*

Si le champ d'intégration était déterminé par des conditions différentes, s'il s'étendait, par exemple, à toute l'étendue du plan autour de l'origine, on procéderait par des voies analogues à la précédente.

393. Supposons maintenant que la région T étant limitée de toutes parts, la fonction $f(x, y)$ devienne infinie en un certain point (x_1, y_1) de l'intérieur de cette région, et qu'elle soit, partout ailleurs, finie et continue. On décrira autour du point (x_1, y_1) un cercle de rayon r_1 aussi petit qu'on voudra; l'intégrale double, étendue à la région T' comprise entre ce cercle et le contour de la région T, aura une valeur déterminée. Il *sera nécessaire*, pour que l'intégrale $\int_T f(x, y) dT$ existe, que cette valeur tende vers une limite déterminée lorsque r_1 tend vers zéro, et pour cela, il sera nécessaire et suffisant que l'intégrale double, étendue

à la couronne circulaire comprise entre deux cercles concentriques de rayons r_1 et r_2 ($r_2 < r_1$), ait pour limite zéro lorsque r_1 tend vers zéro. Cette condition sera exprimée par l'équation

$$(\theta) \qquad \lim q = \lim_{r_1=0} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{r_2}^{r_1} f(x_1 + r\cos\theta, y_1 + r\sin\theta)\, r dr = 0.$$

Mais cette condition nécessaire ne sera *pas suffisante :* il faudra prouver encore, pour que l'intégrale double étendue à la région T ait un sens, que l'intégrale converge vers la même limite déterminée lorsqu'on remplace le petit cercle de rayon r_1 par tout autre contour infiniment petit enveloppant le point (x_1, y_1).

Si la fonction $f(x, y)$ tend vers l'infini en *restant de même signe* lorsque r tend vers zéro, la condition (δ) entraînera celle-ci, car, soit (C) un contour fermé, arbitraire, circonscrivant une aire indéfiniment décroissante autour du point (x_1, y_1) ; on pourra toujours décrire autour de ce point deux cercles de rayons r_1 et r_2 indéfiniment décroissants, comprenant entr'eux le contour (C), et l'on verra comme plus haut que l'intégrale double, étendue à la région comprise entre le contour (C) et le cercle de rayon r_1, a pour limite zéro. Donc, etc...

Supposons, par exemple, que $f(x, y)$ restant toujours de même signe, on ait pour toute valeur de r inférieure à un certain nombre

$$\text{VA}\, r^{2-k} f(x_1 + r\cos\theta, y_1 + r\sin\theta) < \text{M},$$

M étant une quantité fixe et k une constante positive, qui peut être très petite. Nous aurons

$$\text{VA} q < \int_0^{2\pi} d\theta \int_{r_2}^{r_1} \frac{\text{M}dr}{r^{1-k}} = \frac{2\pi\text{M}}{k}(r_1^k - r_2^k),$$

et cette quantité tendant vers zéro en même temps que r_1 et r_2, l'intégrale q aura pour limite zéro et la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale $\int_{\text{T}} f(x, y)\, d\text{T}$ existe sera vérifiée.

Mais si la fonction $f(x, y)$, en devenant infinie au point (x_1, y_1), changeait de signe dans la plus petite région autour de ce point, on ne pourrait pas conclure de l'existence de la condition (δ), que l'intégrale double a une valeur déterminée.

Si l'on avait constamment, dans le voisinage du point (x_1, y_1),

$$r^2 f(x_1 + r\cos\theta, y_1 + r\cos\theta) > \text{M},$$

on verrait de même que l'intégrale double a une valeur infinie.

394. Si la fonction $f(x,y)$ devenait infinie en un point du contour qui limite la région T, il faudrait, dans l'intégrale q, modifier les limites d'intégration par rapport à θ. Par exemple, si la région T est limitée par un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes, et dont un sommet est à l'origine O, et si l'on a $f(0, 0) = \infty$, on voit sans peine que l'intégration par rapport à θ devra se faire entre $\theta = 0$ et $\theta = \pi : 2$.

395. Si la fonction $f(x,y)$ devenait infinie en plusieurs points (x_1, y_1), (x_2, y_2),... de la région T, il faudrait procéder pour chacun de ces points comme nous l'avons fait pour le premier.

Il peut encore arriver que la fonction $f(x,y)$ devienne infinie pour tous les points d'une ligne ab tracée dans la région T, ou pour un nombre indéfini de points de cette ligne (fig. 60, nº **358**). On prendra d'abord l'intégrale double dans une région T′ comprenant toute la région T, à l'exception d'une aire infiniment petite t enveloppant la ligne ab. On supposera que le contour de l'aire t se resserre de plus en plus en se rapprochant de ab, et si l'intégrale étendue à la région T′ tend alors vers une limite fixe S; si, de plus, on peut démontrer que cette limite reste la même de quelque manière que l'on fasse ainsi varier le contour de l'aire t, pourvu que cette aire décroisse indéfiniment, on dira que l'intégrale $\int_T f(x, y)\, dT$ existe, et sa valeur sera précisément cette limite S.

Des considérations analogues s'appliqueraient aux intégrales triples.

LIVRE QUATRIÈME.

CALCUL INTÉGRAL.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

CHAPITRE XXXIX.

DÉFINITION ET GÉNÉRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

396. Le calcul intégral, comme on l'a vu au n° **282**, a pour but de remonter, des relations données entre les variables et leurs différentielles, aux relations entre les variables seulement. On nomme *équations différentielles* ces équations qui renferment à la fois les variables et leurs différentielles; celles qu'on en déduit entre les seules variables sont les *intégrales* des premières.

Le problème de l'intégration présente différents cas que nous étudierons successivement : 1° Deux variables x et y sont liées entre elles par une équation qui renferme la dérivée de y par rapport à x,

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0;$$

c'est ce qu'on appelle une *équation du premier ordre*.

Elle est en même temps *du premier degré* si la dérivée n'y entre qu'à la première puissance, auquel cas on peut l'écrire

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Si, dans cette équation, $f(x, y)$ ne renferme pas y, la dérivée est exprimée en fonction de x seul, et l'on retombe sur le problème des *quadratures* (Livre troisième).

2° L'équation différentielle renferme les dérivées de y jusqu'à un certain ordre n inclusivement : l'équation est dite alors *de l'ordre n*. Elle a la forme

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0.$$

3° Plusieurs fonctions d'une même variable indépendante t sont liées à celle-ci par un nombre égal d'équations, où figurent en outre leurs dérivées par rapport à t jusqu'à un certain ordre. C'est un *système d'équations différentielles simultanées*.

Outre ces équations différentielles *ordinaires*, dans lesquelles il n'y a qu'une variable indépendante, on considère d'autres équations dans lesquelles une fonction de plusieurs variables indépendantes et déterminées par ses *différentielles totales* ou *partielles*. Nous ne les étudierons pas ici.

397. La génération des équations différentielles peut se concevoir d'une manière qui donne une idée de la nature de leurs intégrales. Soit

(1) $$F(x, y, C) = 0$$

une équation entre deux variables x, y, qui renferme en outre une constante arbitraire C. En la différentiant, on a

(2) $$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0,$$

et cette équation renfermera encore, en général, la constante C. Mais si l'on élimine C entre (1) et (2), on aura une troisième égalité

(3) $$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

ne renfermant plus cette constante, et qui, par suite, aura lieu entre x, y, $dy : dx$, quelle que soit la valeur particulière qu'on attribue à C. Cette équation (3) est une équation différentielle, exprimant une propriété commune à toutes les courbes qui résultent de l'équation (1) par la variation du paramètre C. Par exemple, l'équation

(α) $$y^2 - 2Cx - C^2 = 0$$

donne par différention

$$y\frac{dy}{dx} - C = 0,$$

et en éliminant C,

$$y^2 - 2xy\frac{dy}{dx} - y^2\frac{dy^2}{dx^2} = 0,$$

équation différentielle à laquelle satisfont toutes les paraboles que représente l'équation (α) lorsque le paramètre C reçoit toutes les valeurs possibles.

398. Supposons une équation avec deux constantes arbitraires

(4) $$F(x, y, C_1, C_2) = 0,$$

différentions-la deux fois de suite, éliminons C_1 et C_2 entre les trois équations ainsi obtenues ; nous aurons une équation

(5) $$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$$

à laquelle satisfera toute fonction y de x comprise dans l'équation (4), quels que soient C_1 et C_2.

Et, en général, si l'on a une équation à deux variables $F(x, y, C_1, C_2, \ldots C_n) = 0$, renfermant n constantes $C_1, C_2, \ldots C_n$, si l'on y joint les n équations obtenues en la différentiant n fois de suite, on aura un système de $n+1$ équations entre lesquelles, en général, on pourra éliminer les n constantes. Le résultat sera une équation différentielle de l'ordre n

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

débarrassée des constantes arbitraires, et à laquelle satisfera toute fonction y de x définie par l'équation $F = 0$, quelles que soient les valeurs particulières attribuées aux constantes $C_1, C_2, \ldots C_n$.

On arrive donc à cette conclusion importante, qu'une équation entre deux variables x et y, renfermant n constantes arbitraires, peut être comprise dans une équation différentielle d'ordre n qui a *au moins* la même généralité et ne renferme plus aucune de ces constantes. Si donc on parvient à remonter de l'équation différentielle à la relation entre x et y, il faudra que les constantes $C_1, C_2, \ldots C_n$ reparaissent dans l'intégrale.

399. De quelque manière qu'on fasse l'élimination entre l'équation $F(x, y, C_1, C_2, \ldots C_n) = 0$ et ses n premières dérivées, on trouvera la même équation différentielle d'ordre n. Supposons par exemple, $n = 2$, et soient

$$(4) \qquad F(x, y, C_1, C_2) = 0, \quad (5)\ f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$$

l'équation primitive et l'équation du second ordre. Si, dans la première, on attribue à x une valeur arbitraire, et si l'on peut disposer des constantes C_1 et C_2 de manière à attribuer à y et à sa dérivée des valeurs données pour cette valeur de x, la fonction y de x sera alors complètement déterminée, et par suite sa dérivée seconde. Ainsi $d^2y : dx^2$ peut être considéré comme une fonction déterminée, en vertu de l'équation (4), des quantités $x, y, dy : dx$ que l'on se donnera arbitrairement ; il en résulte que l'équation (5) est unique.

Le raisonnement serait le même dans le cas général.

Exercices.

1. $y = Cx + \sqrt{1 + C^2}$. *R.* $y = x\frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$.

2. $y = C_1x^2 + C_2x$. *R.* $x^2\frac{d^2y}{d^2x} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$.

3. Équation différentielle des cercles en cordonnées rectangulaires.

R. On a l'équation primitive

$$(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = C_3^2.$$

L'élimination de C_1, C_2, C_3 donne l'équation du troisième ordre

$$\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 0.$$

4. Équation différentielle des coniques homofocales

$$\frac{x^2}{a^2 + C} + \frac{y^2}{b^2 + C} = 1.$$

R. $$dy^2 + \frac{x^2 - y^2 - a^2 + b^2}{xy}\frac{dy}{dx} - 1 = 0.$$

5. Éliminer les constantes arbitraires C_1, C_2, a, b de l'équation

$$y = C_1e^{ax} + C_2e^{bx}.$$

R. On trouve l'équation du quatrième ordre

$$y\left[\frac{d^2y}{dx^2}\frac{d^4y}{dx^4}-\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2\right]+\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{dy}{dx}\frac{d^4y}{dx^4}\right)+\frac{d^2y}{dx^2}\left[\frac{dy}{dx}\frac{d^3y}{dx^3}-\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\right]=0.$$

6. Équation différentielle des sections coniques

$$y=ax+b\pm\sqrt{px^2+2qx+r},$$

a, b, p, q, r étant arbitraires (HALPHEN).

R. On a, en posant $\sqrt{px^2+2qx+r}=\mathrm{R}$,

$$\frac{dy}{dx}=a\pm\frac{px+q}{\mathrm{R}},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\pm\frac{p}{\mathrm{R}}\mp\frac{(px+q)^2}{\mathrm{R}^3}=\pm\frac{pr-q^2}{\mathrm{R}^3}.$$

$$\mathrm{R}^2=(pr-q^2)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{-\frac{2}{3}}$$

et enfin, pour l'équation cherchée,

$$\frac{d^3}{dx^3}\left[\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{-\frac{2}{3}}\right]=0.$$

On trouve, en la développant,

$$9\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\frac{d^5y}{dx^5}-45\frac{d^2y}{dx^2}\frac{d^3y}{dx^3}\frac{d^4y}{dx^4}+40\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^3=0.$$

Dans le cas de la parabole, $p=0$, l'équation se réduit au 4me ordre :

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{-\frac{2}{3}}\right]=0.$$

CHAPITRE XL.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE ET DU PREMIER DEGRÉ.

400. Au point de vue analytique, *intégrer* l'équation

$$\frac{dy}{dx}=f(x;y), \tag{1}$$

dans laquelle f est une fonction donnée des variables x et y, c'est trouver une fonction de x, la plus générale possible, qui substituée à y dans cette équation, y satisfasse quel que soit x. Au point de vue géométrique, c'est-à-dire en considérant x et y comme les coordonnées rectangulaires d'une courbe plane, il faut trouver une courbe telle que le coefficient

angulaire de la tangente en un point quelconque (x, y) de la courbe soit une fonction donnée $f(x,y)$ des coordonnées de ce point.

On appelle *intégrale générale* de l'équation (1) toute intégrale renfermant une *constante arbitraire* C non comprise dans l'équation, et dont il est possible de déterminer la valeur de façon que, pour une valeur donnée x_0 de x, la fonction y prenne une valeur y_0, assignée d'avance. L'équation (1) résulte de l'élimination de C entre l'intégrale générale et sa dérivée. Toute solution de l'équation (1) qui rentre dans l'intégrale générale par une détermination convenable de la constante arbitraire se nomme une *intégrale particulière.*

Une intégrale, au contraire, qu'on ne peut déduire de l'intégrale générale par aucune valeur constante attribuée à C, se nomme une *solution singulière* de l'équation différentielle.

401. Nous établirons plus loin d'une manière rigoureuse que si, dans une région déterminée T du plan, la fonction $f(x, y)$ satisfait à certaines conditions qui seront précisées, il existe dans cette région une fonction simple y de x qui vérifie l'équation (1), et qui prend pour une valeur donnée x_0 de x, une valeur arbitrairement donnée y_0. Par chaque point (x_0, y_0) de la région T passe donc une seule intégrale déterminée, ce qui ne peut avoir lieu que si l'expression de y, obtenue par l'intégration, renferme une constante arbitraire C qui permette de choisir à volonté la valeur y_0 de y qui répond à une valeur donnée x_0 de x.

Il existe donc une intégrale générale, au moins pour la région T.

Toute intégrale appartenant à cette région est une intégrale particulière, car, soit y_0 la valeur de y que donne cette intégrale pour $x = x_0$; on déterminera la constante C de l'intégrale générale de manière que celle-ci prenne aussi la valeur y_0 pour $x = x_0$ (**400**) ; on aura une intégrale particulière, vérifiant l'équation (1) quel que soit x et admettant la même valeur y_0 que l'intégrale donnée, pour une valeur particulière de x ; comme il n'existe qu'une seule fonction y de x qui vérifie ces deux conditions dans la région T, l'intégrale particulière se confondra avec l'intégrale donnée.

D'après cela, les conditions qui assurent l'existence de l'intégrale générale nous feront connaître dans quels cas exceptionnels l'équation (1) pourra admettre des intégrales non comprises dans l'intégrale générale, c'est-à-dire des solutions singulières. Mais on peut dès à présent reconnaître une propriété géométrique de ces solutions.

Si, dans une région T, l'équation (1) admet à la fois des intégrales particulières et une solution singulière, la courbe qui représente cette dernière devra toucher, en chaeun de ses point M, la courbe de l'intégrale particulière qui passe par ce point. Car l'équation (1) ne donne qu'une valeur pour le coefficient angulaire de la tangente en un point donné, et comme les deux courbes, solution singulière et intégrale particulière, vérifient cette équation (1) et passent par le point M, elles ont la même tangente en ce point.

Soit, par exemple, l'équation

$$\frac{dy}{dx} = 1 - (y - x)^{\frac{1}{3}}.$$

On vérifie sans peine que la fonction

$$y = x + \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} (C - x)^{\frac{3}{2}}$$

satisfait à l'équation quels que soient x et C.

C'est donc là l'intégrale générale. Mais l'équation est aussi vérifiée par l'hypothèse $y = x$, qui ne peut convenir à une intégrale particulière, puisqu'elle entraînerait l'équation $C = x$; C ne serait donc pas constant. L'équation $y = x$ représente donc une solution singulière.

On reconnaît facilement 1° que la droite $y = x$ est le lieu des points de rebroussement des courbes du troisième ordre qui figurent les intégrales particulières, et qu'elle les touche toutes en ces points; 2° que la relation $y = x$ rend infinie la dérivée partielle $f'_y(x, y)$, en sorte que l'une des conditions nécessaires, comme on le verra, pour qu'il y ait en chaque point une intégrale *unique*, n'est plus vérifiée. L'existence de la solution singulière est donc possible.

402. L'équation (1) est toujours réductible à la forme

$$(2) \qquad \qquad P dx + Q dy = 0,$$

P et Q étant, en général, des fonctions données de x, y. Cette équation s'intègre immédiatement lorsque $P dx + Q dy$ est la différentielle totale d'une fonction F (x, y) des variables x et y, considérées comme indépendantes. En effet, si l'on a

$$P dx + Q dy = d.F(x, y),$$

l'équation (2) se mettra sous la forme $d.F(x, y) = 0$, et la condition

nécessaire et suffisante pour qu'une telle relation ait lieu est que $F(x, y)$ soit constant. Donc

$$F(x, y) = C$$

sera l'intégrale générale de l'équation (2). On voit, de plus, qu'il n'y aura pas de solution singulière.

Ainsi, l'équation

$$\left(x - \frac{y}{x^2 + y^2}\right) dx + \left(y + \frac{x}{x^2 + y^2}\right) dy = 0,$$

étant écrite sous la forme

$$\frac{1}{2} d(x^2 + y^2) + \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} d.\left(\frac{y}{x}\right) = 0,$$

nous fait voir que son premier membre est une différentielle exacte, et qu'elle a pour intégrale générale

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right) = C.$$

403. On peut reconnaître dans quels cas $P dx + Q dy$ est une différentielle exacte, et ramener alors l'intégration à deux quadratures, comme il suit. Si $P dx + Q dy$ est la différentielle totale d'une fonction $F(x, y)$, on a, comme on sait,

$$P = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial},$$

et par suite

$$(3) \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

abstraction faite de toute relation entre x et y.

Supposons, réciproquement, que l'identité (3) soit vérifiée, et cherchons une fonction $F(x, y)$ qui ait pour différentielle totale $P dx + Q dy$. Sa dérivée partielle par rapport à x étant P, cette fonction F est comprise dans l'intégrale indéfinie $\int P dx$, y étant traité comme constant et la constante arbitraire de l'intégration étant, en général, une fonction $\varphi(y)$ de y seul. Nous avons donc, en posant $P_1 = \int P\, dx$,

$$F(x, y) = \int P\, dx + \varphi(y) = P_1 + \varphi(y),$$

et il reste à déterminer $\varphi(y)$ de manière à vérifier, s'il est possible, la

deuxième condition $F'_y(x, y) = Q$. On doit avoir, pour cela,

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} + \varphi'(y) = Q, \quad \text{ou} \quad \varphi'(y) = Q - \frac{\partial P_1}{\partial y},$$

et comme $\varphi'(y)$ ne dépend pas de x, cette égalité n'est possible que si le second membre est aussi indépendant de x. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que sa dérivée partielle par rapport à x soit nulle, ce qui donne

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}\left(Q - \frac{\partial P_1}{\partial y}\right) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P_1}{\partial y}\right) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P_1}{\partial x}\right) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}.$$

La relation (3) exprime donc la condition cherchée pour que $F(x, y)$ existe, et la fonction φ se trouvera alors par l'équation

$$\varphi(y) = \int\left(Q - \frac{\partial P_1}{\partial y}\right) dy,$$

la fonction sous le signe $\int$ ne renfermant pas x. On aura donc, en substituant et égalant $F(x, y)$ à une constante arbitraire, l'intégrale générale

$$(4) \qquad \int P\,dx + \int\left(Q - \frac{\partial P_1}{\partial y}\right) dy = C.$$

Ainsi, *la condition nécessaire et suffisante pour que* $P\,dx + Q\,dy$ *soit une différentielle exacte en* x *et* y *s'exprime par l'équation* (3), *et si* P *et* Q *y satisfont, l'équation* (4) *fournira l'intégrale générale de l'équation* (2).

Ainsi, l'équation

$$(x^2 - 4xy - 2y^2)\,dx + (y^2 - 4xy - 2x^2)\,dy = 0$$

nous donne

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -4x - 4y = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

$$\int P\,dx = \frac{x^3}{3} - 2x^2y - 2y^2x, \quad Q - \frac{\partial P_1}{\partial y} = y^2,$$

et l'intégrale générale est, d'après (4),

$$x^3 - 6x^2y - 6y^2x + y^3 = C.$$

404. Il est un cas remarquable où l'on reconnaît que le premier membre de (2) est une différentielle exacte, c'est celui où P est une fonc-

tion X de x seul, Q une fonction Y de y seul,

(5) $$X dx + Y dy = 0:$$

on dit alors que *les variables sont séparées.*

Dans ce cas, en effet, on a

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} = 0, \int P dx = \int X dx, Q - \frac{\partial P_1}{\partial y} = Y,$$

donc

$$\int X dx + \int Y dy = C$$

est l'intégrale générale, ce qui se voit d'ailleurs directement. Le problème est alors ramené immédiatement aux quadratures.

Lorsque les variables ne sont pas séparées dans l'équation différentielle même, il suffit quelquefois de la multiplier par un facteur convenable pour opérer la séparation. C'est ce qui a lieu pour toute équation de la forme

$$X_1 Y_1 dx + X_2 Y_2 dy = 0,$$

X_1, X_2 ne renfermant que x, Y_1 et Y_2 que y. Si l'on divise toute l'équation par $Y_1 X_2$, ce qui exclut l'hypotèse que X_2 ou Y_1 soit nul, on a

$$\frac{X_1}{X_2} dx + \frac{Y_2}{Y_1} dy = 0,$$

équation dans laquelle les variables sont séparées et l'intégration se fait comme plus haut.

Ainsi, on met l'équation

$$(1 + y^2)(1 + x) dx + (1 + x^2)(1 - y) dy = 0$$

sous la forme

$$\frac{1 + x}{1 + x^2} dx + \frac{1 - y}{1 + y^2} dy = 0,$$

et l'on a, par de simples quadratures,

$$\text{arc tg}\, x + \frac{1}{2} \mathrm{l}(1 + x^2) + \text{arc tg}\, y - \frac{1}{2} \mathrm{l}(1 + y^2) = C,$$

intégrale générale que l'on écrit aussi sous la forme

$$\text{arc tg} \frac{1 - xy}{x + y} = \mathrm{l}.\, C_1 \sqrt{\frac{1 + y^2}{1 + x^2}},$$

C_1 étant une nouvelle constante arbitraire.

405. *Intégration des équations homogènes.* — Si la séparation des variables ne s'obtient pas immédiatement, on cherche à la réaliser par *substitution*, en introduisant dans l'équation, au lieu des variables x, y, deux nouvelles variables convenablement choisies. Souvent, il suffit de changer l'une des variables.

Considérons l'équation *homogène*

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy = 0,$$

dans laquelle P, Q sont des fonctions homogènes de même degré m par rapport à x et à y (**144**). D'après la définition des fonctions homogènes, si l'on divise l'équation (2) par x^m, P et Q ne dépendront plus que du rapport $y : x$, et l'équation (2) prendra la forme

$$f\left(\frac{y}{x}\right) dx + f_1\left(\frac{y}{x}\right) dy = 0.$$

En posant

$$y = ux, \quad dy = udx + xdu,$$

il viendra pour l'équation entre u et x,

$$\text{(6)} \qquad [f(u) + uf_1(u)]\, dx + xf_1(u)\, du = 0,$$

et en divisant par x et par $f(u) + uf_1(u)$, *ce qui suppose que cette dernière expression ne soit pas nulle,*

$$\frac{dx}{x} + \frac{f_1(u)du}{f(u) + uf_1(u)} = 0.$$

L'intégrale de cette équation, où les variables sont séparées, est

$$\text{(7)} \qquad \mathrm{l}.\, x + \int \frac{f_1(u)du}{f(u) + uf_1(u)} = \mathrm{C},$$

et en effectuant la quadrature indiquée et remplaçant u par $y : x$, on trouvera l'intégrale de l'équation (2).

Quant à l'hypothèse $f(u) + uf_1(u) = 0$, elle fournira pour u un certain nombre de valeurs déterminées u_1, u_2, ..., que l'on peut regarder comme vérifiant l'équation (6), puisqu'elles annulent le coefficient de dx et donnent $du = 0$. On aura donc encore les intégrales particulières ou singulières

$$y = u_1 x, \quad y = u_2 x, \ldots$$

406. Prenons comme exemple, A, B, A′, B′ étant constants, l'équation

$$(\mathrm{A}x + \mathrm{B}y)dx + (\mathrm{A}'x + \mathrm{B}'y)dy = 0,$$

dans laquelle P et Q sont du premier degré. La transformation indiquée conduit à l'équation

$$[A + (B + A')u + B'u^2]\,dx + x(A' + B'u)\,du = 0.$$

L'intégrale générale est

$$l.\,x + \int \frac{A' + B'u}{A + (B + A')u + B'u^2}\,du = C,$$

et la fonction sous le signe $\int$ étant rationnelle, la quadrature s'effectuera sans peine. La forme de l'intégrale dépend de la nature des racines de l'équation

$$A + (B + A')u + B'u^2 = 0.$$

Supposons-les réelles et inégales, et soient a, b leurs valeurs, en sorte que l'on ait

$$A + (B + A')u + B'u^2 = B'(u - a)(u - b).$$

En décomposant la fraction rationnelle en fractions simples, on aura

$$\frac{A' + B'u}{A + (B + A')u + B'u^2} = \frac{m}{u - a} + \frac{n}{u - b},$$

avec les équations

$$A' = -B'(mb + na);\quad 1 = m + n,$$

pour déterminer m et n. L'intégrale générale sera donc

$$l.\,x + m\,l.\,(u - a) + n\,l.\,(u - b) = C,$$

ou

$$x(u - a)^m (u - b)^n = e^C,$$

ou encore, en mettant pour u sa valeur et posant $e^C = C_1$,

$$(y - ax)^m (y - bx)^n = C_1.$$

car x^{1-m-n} se réduit à l'unité, à cause de la relation $m + n = 1$.

Quant aux intégrales $y = ax$, $y = bx$, que l'on trouve en égalant à zéro le diviseur de l'équation en u, ce sont des intégrales particulières répondant à $C_1 = 0$ ou à $C_1 = \infty$ suivant les signes des exposants m et n.

407. L'équation

$$(Ax + By + D)\,dx + (A'x + B'y + D')\,dy = 0$$

sa ramène à la précédente par la substitution

$$x = \xi + \alpha,\quad y = \eta + \beta,$$

α et β étant des constantes que l'on détermine par les conditions

$$A\alpha + B\beta + D = 0, \quad A'\alpha + B'\beta + D' = 0,$$

ce qui conduit à l'équation entre ξ et η

$$(A\xi + B\eta)\, d\xi + (A'\xi + B'\eta)\, d\eta = 0,$$

qui vient d'être intégrée. Cette transformation serait impossible si l'on avait $AB' - BA' = 0$, car α et β seraient infinis ; mais, dans ce cas, le rapport de $A'x + B'y$ à $Ax + By$ serait constant, et l'on séparerait les variables en posant $Ax + By = z$.

408. *Équation linéaire du premier ordre.* — On appelle ainsi l'équation

(8) $$\frac{dy}{dx} + Xy = X_1,$$

X et X_1 étant des fonctions données de x seul.

On procède encore par substitution. On pose $y = uz$, u et z désignant deux nouvelles fonctions de x dont une pourra être choisie à volonté. On a donc

$$dy = udz + zdu,$$

$$u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx} + Xuz = X_1,$$

et si l'on détermine z de façon à annuler le coeffient de u dans cette équation,

(α) $$\frac{dz}{dx} + Xz = 0,$$

l'équation se réduira à

$$z\frac{du}{dx} = X_1.$$

On tire de la première

$$\frac{dz}{z} = -Xdx, \quad \text{l.}\, z = -\int X\, dx, \quad z = e^{-\int X dx},$$

et de la seconde

$$\frac{du}{dx} = X_1 e^{\int X dx}, \quad u = \int X_1 e^{\int X dx}\, dx + C,$$

d'où enfin, l'intégrale générale de l'équation (8),

(9) $$y = e^{-\int X dx}\left[C + \int X_1 e^{\int X dx}\, dx\right].$$

Nous remarquons qu'il est inutile de compléter par une constante l'intégrale $\int X dx$ dans la valeur de z, car il nous suffit de trouver une fonction particulière z qui vérifie la condition (α). D'ailleurs, cette constante disparaîtrait d'elle-même.

Soit, comme exemple,

$$\frac{dy}{dx} + y\cos x = \sin x \cos x.$$

On a ici $X = \cos x$, $X_1 = \sin x \cos x$, d'où

$$\int X dx = \sin x, \quad \int X_1 e^{\int X dx}\, dx = \int e^{\sin x} \sin x \cos x dx = e^{\sin x}(\sin x - 1),$$

et l'intégrale genérale est

$$y = Ce^{-\sin x} + \sin x - 1.$$

409. On appelle *équation de Bernoulli* l'équation

$$(10) \qquad \frac{dy}{dx} + Xy = X_1 y^{n+1},$$

qui se réduit à l'équation (8) pour $n = -1$. Si l'on divise cette équation (10) par y^{n+1}, on a

$$y^{-(n+1)}\frac{dy}{dx} + y^{-n}X = X_1,$$

et en posant $z = y^{-n}$ et multipliant par $-n$,

$$\frac{dz}{dx} - nXz = -nX_1.$$

Cette équation linéaire s'intègre par la formule (9), et l'on en déduit

$$z = y^{-n} = e^{n\int X dx}\left[C - n \int X_1 e^{-n\int X dx}\, dx\right],$$

ce qui est l'intégrale de l'équation de Bernoulli.

Elle devient illusoire pour $n = 0$, mais dans ce cas l'équation (10) se réduit à

$$\frac{dy}{dx} + (X - X_1)\, y = 0$$

et s'intègre immédiatement par la séparation des variables.

410. *Remarques.* — 1° Parmi les valeurs que l'on doit attribuer à la constante arbitraire pour obtenir toutes les intégrales particulières comprises dans l'intégrale générale, on doit comprendre les valeurs $C = +\infty$ et $C = -\infty$, car si l'on remplace C par $1 : C'$ dans l'inté-

grale, ce qui est évidemment permis, l'intégrale générale transformée admet la valeur $C' = 0$ de la constante.

2° L'intégrale générale peut prendre des formes variées si l'on remplace une fonction de la constante C par une nouvelle constante arbitraire C'. C'est ce qui explique que l'intégrale d'une équation différentielle se présente, soit sous forme algébrique, soit sous forme transcendante. Ainsi l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = 0$$

admet l'intégrale générale immédiate

$$\text{arc sin } x + \text{arc sin } y = C.$$

Mais si l'on multiplie l'équation par $- xy$ et si on l'ajoute à la suivante qui en est une conséquence évidente :

$$dx\sqrt{1 - y^2} + dy\sqrt{1 - x^2} = 0,$$

on obtient celle-ci :

$$\left(dx\sqrt{1 - y^2} - \frac{xy\, dy}{\sqrt{1 - y^2}}\right) + \left(dy\sqrt{1 - x} - \frac{xy\, dx}{\sqrt{1 - x^2}}\right) = 0,$$

dont le premier membre est une différentielle exacte et dont l'intégrale est, par suite,

$$x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2} = C_1.$$

Cette intégrale est algébrique, et l'on a $C_1 = \sin C$, comme on le voit par la formule qui donne le sinus de la somme de deux arcs.

3° Il faut remarquer encore que la forme de l'intégrale peut changer suivant l'intervalle des valeurs de x dans lequel on la considère, une expression réelle dans un certain intervalle pouvant devenir imaginaire dans un autre.

Ainsi, l'équation linéaire

$$\frac{dy}{dx} + \frac{xy}{1 - x^2} = a$$

donne, dans les formules générales (8) et (9),

$$\int X dx = -\frac{1}{2}\,\text{l.}\,(1 - x^2) = -\text{l.}\sqrt{1 - x^2},$$

$$\int X_1 e^{\int X dx}\, dx = a\int\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = a \text{ arc sin } x,$$

et l'intégrale générale est

$$y = \sqrt{1 - x^2}\,(C + a \text{ arc sin } x).$$

Mais ce calcul roule sur la supposition implicite $\text{VA}\, x < 1$. Dans le cas où $\text{VA}\, x > 1$, on a (**287**)

$$\int X dx = -\,\text{l.}\sqrt{x^2 - 1}, \quad \int X_1 e^{\int X dx}\, dx = a\,\text{l.}(x + \sqrt{x^2 - 1}),$$

et l'intégrale générale affecte la forme suivante

$$y = \sqrt{x^2 - 1}\,[C + a\ \text{l.}(x + \sqrt{x^2 - 1})].$$

On passerait d'ailleurs d'une forme à l'autre au moyen des relations des N^{os} **272** et **273**.

4° Quand, pour faciliter l'intégration, on multiplie ou divise l'équation différentielle par une fonction des variables, il faut prendre garde que l'on peut ainsi introduire ou supprimer des solutions, comme on l'a déjà remarqué à propos de l'équation homogène. Ainsi l'équation

$$X_1 Y_1\, dx + X_2 Y_2\, dy = 0$$

est vérifiée, en général, par les valeurs constantes de y que fournit l'équation $Y_1 = 0$, car ces valeurs donnent $dy = 0$. En divisant l'équation par Y_1 pour séparer les variables, on supprime donc ces intégrales qui peuvent être particulières ou singulières. Il y a même des cas où l'hypothèse $X_2 = 0$, qui donne x constant et dx nul, et vérifie par conséquent l'équation ci-dessus, ne doit pas être négligée. Elle correspond géométriquement à des droites parallèles à l'axe des y, lesquelles peuvent répondre au problème proposé.

Exercices.

Vérifier si les équations suivantes satisfont à la condition d'intégrabilité immédiate, et effectuer l'intégration :

1. $\dfrac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} + \dfrac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2} = 0.$ *R.* $y = x \cot(C - \sqrt{1 + x^2 + y^2})$.

2. $\dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \left(1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)\dfrac{dy}{y} = 0.$

R. $x + \sqrt{x^2 + y^2} = C$, ou $y^2 = C^2 - 2Cx$.

3. $(x^3 + 3xy^2)\,dx + (y^3 + 3x^2y)\,dy = 0.$ *R.* $x^4 + 6x^2y^2 + y^4 = C$.

4. $(1+e^{\frac{x}{y}})\,dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0.$ *R.* $x+ye^{\frac{x}{y}}=C.$

Intégrer, par la séparation des variables, les équations

5. $(a^2+y^2)dx-2x\sqrt{ax-a^2}\,dy=0.$ *R.* $y-\sqrt{ax-a^2}=C(a^2+y\sqrt{ax-a^2}).$

6. $(1+x^2)y^3dx+(1-y^2)x^3dy=0.$ *R.* $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=2\mathrm{l}.\frac{Cx}{y}.$

7. $(1+y^2)dx-(y+\sqrt{1+y^2})(1+x^2)^{\frac{3}{2}}dy=0.$

R. $\sqrt{1+y^2}(y+\sqrt{1+y^2})=Ce^{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}.$

8. $\sec^2 x\,\mathrm{tg}\,y\,dx+\sec^2 y\,\mathrm{tg}\,x\,dy=0.$ *R.* $\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,y=C.$

9. $y\,\mathrm{l}.y\,dx-dy=0.$ *R.* $\mathrm{l}.y=Ce^x.$

Intégrer les équations homogènes

10. $xdy-ydx=dx\sqrt{x^2+y^2}.$ *R.* $x^2=C^2+2Cy.$

11. $(x+y)\,dx+(y-x)\,dy=0.$ *R.* $\mathrm{arc\,tg}\frac{y}{x}=\mathrm{l}.\,C\sqrt{x^2+y^2}.$

12. $(8y+10x)dx+(5y+7x)\,dy=0.$ *R.* $(x^2+y^2)^2(y+2x)^5=C.$

13. $\left(x\cos\frac{y}{x}-y\sin\frac{y}{x}\right)dx+x\sin\frac{y}{x}\,dy=0.$ *R.* $y=x\,\mathrm{arc\,cos}\,Cx.$

N. B. L'équation $\cos u=0$ donne $y=\frac{2i+1}{2}\pi x$, intégrales particulières répondant à $C=0$.

14. $xdx+ydy=2my\,dx.$ *R.* Trois cas à distinguer :

1° $m^2>1$, $a=m+\sqrt{m^2-1}$, $b=m-\sqrt{m^2-1}$, $(y-ax)^a=C(y-bx)^b.$

2° $m=\pm1$, $y\mp x=Ce^{-\frac{x}{x\mp y}}.$

3° $m^2<1$, $\mathrm{l}.\sqrt{y^2-2mxy+x^2}+\frac{m}{\sqrt{1-m^2}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{y-mx}{x\sqrt{1-m^2}}=C.$

Intégrer les équations linéaires suivantes :

15. $\frac{dy}{dx}+ay=e^{mx}.$ *R.* $y=Ce^{-ax}+\frac{e^{mx}}{m+a}.$

16. $\frac{dy}{dx}+y=x^n.$ *R.* $y=Ce^{-x}+x^n-nx^{n-1}+n(n-1)x^{n-2}\ldots.$

17. $(1+x^2)\frac{dy}{dx}+y=\mathrm{arc\,tg}\,x.$ *R.* $y=Ce^{-\mathrm{arc\,tg}\,x}+\mathrm{arc\,tg}\,x-1.$

18. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{ny}{x+1} = e^x (x+1)^n.$ *R.* $y = (x+1)^n (e^x + C).$

Intégrer les équations :

19. $(1-x^2)\dfrac{dy}{dx} - xy = axy^2.$ *R.* $y(a + C\sqrt{1-x^2}) + 1 = 0.$

20. $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 2ax^3y^3.$ *R.* $y^2[Ce^{2x^2} - a(1+2x^2)] + 2 = 0.$

CHAPITRE XLI.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DU PREMIER ORDRE QUI NE SONT PAS DU PREMIER ~~ORDRE~~. DEGRÉ.

411. Nous supposerons que le premier membre de l'équation du premier ordre

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

soit une fonction rationnelle et entière de la dérivée de y,

$$(1) \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^n + \varphi_1 \left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + \cdots + \varphi_{n-1}\frac{dy}{dx} + \varphi_n = 0,$$

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ désignant des fonctions données de x et de y. L'équation étant résolue par rapport à cette dérivée fournira n valeurs de celle-ci, savoir

$$(2) \qquad \frac{dy}{dx} = f_1(x, y), \quad \frac{dy}{dx} = f_2(x, y), \quad \ldots, \quad \frac{dy}{dx} = f_n(x, y),$$

$f_1, f_2, \ldots f_n$ étant des fonctions simples des variables dans une région déterminée. L'équation (1), mise sous la forme

$$\left[\frac{dy}{dx} - f_1(x, y)\right]\left[\frac{dy}{dx} - f_2(x, y)\right] \cdots \left[\frac{dy}{dx} - f_n(x, y)\right] = 0,$$

admet comme solution toute solution qui vérifie l'une des équations (2), et elle n'en admet aucune autre. Or, les équations (2) rentrent dans celles du chapitre précédent ; elles auront donc les intégrales générales respectives

$$F_1(x, y, C_1) = 0, \quad F_2(x, y, C_2) = 0, \quad \ldots, \quad F_n(x, y, C_n) = 0$$

que l'on cherchera à trouver par les méthodes exposées; C_1, C_2,... C_n sont les constantes arbitraires. Mais l'équation

(3) $$F_1(x, y, C_1)\, F_2(x, y, C_2) \ldots F_n(x, y, C_n) = 0$$

renferme toutes les précédentes et n'en renferme pas d'autre : elle doit donc être considérée comme *l'intégrale générale* de l'équation (1). D'ailleurs, on peut y remplacer par une même constante C toutes les constantes C_1, C_2,... C_n, sans diminuer la généralité de l'intégrale; car on ne peut satisfaire à cette équation (3) qu'en égalant à zéro séparément les divers facteurs F_1, F_2,..., et si l'on attribue à C toutes les valeurs possibles, les équations

$$F_1(x, y, C) = 0, \quad F_2(x, y, C) = 0, \ldots$$

fourniront toutes les solutions que pourraient donner les équations $F_1(x, y, C_1) = 0$, $F_2(x, y, C_2) = 0$. Donc enfin, l'intégrale générale de l'équation (1) sera

(4) $$F_1(x, y, C)\, F_2(x, y, C) \ldots F_n(x, y, C) = 0,$$

et ne renfermera qu'une constante arbitaire.

Exemple : L'équation

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - (x^2 + xy + y^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (x^3y + x^2y^2 + xy^3)\frac{dy}{dx} - x^3y^3 = 0$$

fournit les trois valeurs de $dy : dx$

$$\frac{dy}{dx} = x^2, \quad \frac{dy}{dx} = xy, \quad \frac{dy}{dx} = y^2,$$

comme on le voit sans peine. Ces équations ont pour intégrales

$$3y = x^3 + C, \quad 2\mathrm{l}.\, y = x^2 + C, \quad xy - Cy + 1 = 0,$$

en sorte que l'intégrale générale de la proposée peut s'écrire

$$(3y - x^3 - C)(\mathrm{l}.\, y^2 - x^2 - C)(xy - Cy + 1) = 0.$$

412. Si l'équation ne renferme explicitement qu'une des variables x, y et se résout facilement par rapport à celle-ci, on opère comme il suit : posant $dy = pdx$, on met l'équation, si elle ne renferme pas y, sous la forme

$$x = f(p).$$

De là prenant p pour variable indépendante

$$dx = f'(p)\,dp, \quad dy = pf'(p)\,dp, \quad y = C + \int pf'(p)\,dp,$$

et cette quadrature fournira la valeur de y en fonction de p. Eliminant p entre cette équation et $x = f(p)$, on aura entre x, y et C l'intégrale générale cherchée. Soit, comme exemple,

$$x\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}} - a\frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{ou} \quad x = \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}.$$

On a donc

$$dx = \frac{a\,dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad dy = \frac{ap\,dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}},$$

et en intégrant

$$y - C\,\frac{a}{\sqrt{1+p^2}}.$$

$y = C - \frac{a}{\sqrt{1+p^2}}$

d'où, éliminant p,

$$x^2 + (y - C)^2 = a^2,$$

ce qui est l'intégrale générale.

De même, si l'équation était réductible à la forme $y = f(p)$, on poserait encore $dy = pdx$, d'où

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{f'(p)\,dp}{p},$$

et une quadrature ferait connaître x en fonction de p.

413. Si l'équation est homogène en x et y, on la divise par une puissance convenable de x, de façon qu'elle ne renferme plus que le rapport $u = y : x$ et la dérivée $p = dy : dx$. On a ainsi une relation qui, résolue par rapport à p, sera de la forme

$$p = f(u).$$

Mais on a

$$y = ux, \quad dy = pdx = xdu + udx,$$

d'où

(5) $$\frac{x}{dx} = \frac{du}{p-u} = \frac{du}{f(u)-u}.$$

Les variables sont séparés; on a l'intégrale

$$\text{l.}x + C = \int \frac{du}{f(u)-u},$$

on effectue la quadrature, on remplace u par $y:x$ et l'on obtient l'intégrale de l'équation donnée. Ainsi, l'équation

$$x\frac{dy^2}{dx^2} - 2y\frac{dx}{dy} - x = 0,$$

mise sous la forme

$$p^2 - 2up - 1 = 0,$$

donne la valeur de p

$$p = u \pm \sqrt{1+u^2}, \quad p - u = \pm\sqrt{1+u^2};$$

l'équation (5) devient

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{\pm\sqrt{1+u^2}},$$

dont l'intégrale est

$$\mathrm{l}.x \mp \mathrm{l}.(u+\sqrt{1+u^2}) = \mathrm{l}.\mathrm{C},$$

d'où, mettant pour u sa valeur et passant des logarithmes aux nombres, on a les deux équations

$$-\frac{x^2}{y+\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} - y = \mathrm{C}, \quad y + \sqrt{x^2+y^2} = \mathrm{C}_1,$$

qui répondent respectivement au signe supérieur et au signe inférieur. L'intégrale générale est donc

$$(\sqrt{x^2+y^2} + y - \mathrm{C}_1)(\sqrt{x^2+y^2} - y - \mathrm{C}) = 0,$$

et en remplaçant C_1 par $-\mathrm{C}$,

$$x^2 - 2\mathrm{C}y - \mathrm{C}^2 = 0.$$

414. Il arrive souvent qu'en différentiant l'équation proposée, on élimine l'une des variables x, y, et l'on obtient entre l'autre variable et p une équation différentielle que l'on sait intégrer. Considérons *l'équation de Monge*

(6) $$y = xf(p) + \varphi(p),$$

f et φ étant des fonctions données de p seulement. En dérivant et remplaçant $dy:dx$ par p, on a

$$p = f(p) + [xf'(p) + \varphi'(p)]\frac{dp}{dx},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{dx}{dp} - \frac{f'(p)}{p-f(p)}x = \frac{\varphi'(p)}{p-f(p)}.$$

Cette équation est linéaire par rapport à x considéré comme fonction de p. On l'intègre par la méthode connue, on élimine p entre l'intégrale et l'équation (6), et l'on a, entre x, y et C, l'intégrale cherchée.

415. L'équation *de Clairaut* est un cas particulier de l'équation de Monge :

$$y = px + \varphi(p). \tag{7}$$

On en déduit

$$[x + \varphi'(p)] \frac{dp}{dx} = 0,$$

équation qui se décompose en deux autres,

$$\frac{dp}{dx} = 0, \quad x + \varphi'(p) = 0.$$

La première donne $p = C$, et la substitution dans l'équation (7) fournit l'intégrale générale

$$y = Cx + \varphi(C). \tag{8}$$

La seconde donnera pour p une valeur en x qui, mise dans l'équation (7), fournira une ***solution singulière***, car elle correspond à une valeur de $dy : dx$ qui est fonction de x, tandis que l'intégrale générale ne peut donner pour p que des valeurs constantes. On remarquera que la solution singulière résulterait aussi bien de l'élimination de C entre les équations

$$Cx + \varphi(C) = y, \quad x + \varphi'(C) - 0,$$

dont la seconde est la dérivée de la première par rapport à C. Ainsi 1° l'intégrale générale de l'équation de Clairaut s'obtient en remplaçant p par une constante arbitraire dans l'équation (7); 2° cette intégrale ne représente que des lignes droites; 3° la solution singulière de l'équation de Clairaut représente l'enveloppe de ces droites, propriété qui s'accorde avec ce qui a été dit au N° **401**.

Exercices.

1. $\frac{dy^2}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 3 = 0.$ *R.* $(y - C^2) - 4x(y - C) + 3x^2 = 0.$

2. $\left(\frac{dy^2}{dx^2} - y\right)^2 - y\left(\frac{dy^2}{dx^2} + y\right)^2 = 0.$ *R.* $x = C \pm 2 \arcsin \sqrt{y} + 2\sqrt{1 - y}.$

3. $\frac{dy^3}{dx^3} - x + 1 = 0.$ *R.* $(4y - C)^3 = 27(x - 1)^4.$

4. $\frac{dy^4}{dx^4} - \left(9x^4 + \frac{y^2}{x^2}\right)\frac{dy^2}{dx^2} + 9x^2y^2 = 0.$

R. $[(y - C)^2 - x^6](y - Cx)(xy - C) = 0.$

5. $\frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = e^x.$ *R.* $2(y - C) = e^x + e^{-x}.$

6. $x + y\frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}.$ *R.* $y = Cx.$

7. $(y^2 + nx^2)\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) - \left(y\frac{dy}{dx} + nx\right)^2 = 0.$

R. $y + \sqrt{y^2 + nx^2} = Cx^{1 \pm \sqrt{\frac{n-1}{n}}}.$

8. $y = x\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} - \frac{dy^2}{dx^2}$ *R.* $y = C(x + 1 - C).$

Solution singulière : $4y = (x + 1)^2.$

9. $y = px + \sqrt{a^2 - b^2p^2}.$ *R.* $y = Cx + \sqrt{a^2 - b^2C^2}.$

Solution singulière : $y = \frac{a(x^2 - b^2)}{b\sqrt{x^2 + b^2}}.$

10. $Axy\frac{dy^2}{dx^2} + (x^2 - Ay^2 - B)\frac{dy}{dx} - xy = 0.$

R. Posant $x^2 = u$, $y^2 = v$, $dv = pdu$, on trouve

$$v = up - \frac{Bp}{1 + Ap},$$

équation de Clairaut; l'intégrale générale est

$$y^2 - Cx^2 = -\frac{BC}{1 + AC},$$

11. $\frac{dy^3}{dx^3} - \frac{3}{2}\frac{dy^2}{dx^2} = (y - x)^2,$ ou $y = x \pm p\sqrt{p - \frac{3}{2}}.$

En dérivant, on élimine y, et l'on a entre x et p l'équation

$$dx = \pm\frac{3}{2}\frac{dp}{\sqrt{p - \frac{3}{2}}}.$$

Intégrant, éliminant p, on trouve

$$y = x \pm \frac{x-C}{3}\left[\left(\frac{x-C}{3}\right)^2 + \frac{3}{2}\right].$$

CHAPITRE XLII.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE SUPÉRIEUR AU PREMIER.

§ 1. CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES.

416. Considérons d'abord une équation différentielle du second ordre entre x et y, résolue par rapport à la dérivée seconde de y par rapport à x,

$$\text{(1)} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right),$$

f désignant une fonction simple des quantités qui y figurent. On appelle *intégrale* de cette équation toute fonction y de x qui la vérifie identiquement quel que soit x, au moins dans un intervalle déterminé pour x. L'*intégrale générale* est celle qui renferme deux constantes arbitraires C_1 et C_2 telles que, pour une valeur donnée x_0 de x, on puisse les déterminer de manière à attribuer à y et à sa dérivée des valeurs données d'avanee, y_0 et y'_0. Toute intégrale déduite de l'intégrale générale par l'attribution de valeurs particulières à C_1 et à C_2 est une *intégrale particulière*; toute intégrale qui ne peut se déduire de l'intégrale générale par des valeurs particulières attribuées aux constantes arbitraires ou à l'une d'elles est une *solution singulière.*

Nous démontrerons plus loin que toute équation de la forme (1), si la fonction $f(x, y, z)$ satisfait à des conditions qui seront indiquées dans une région T des variables x, y, z, admet une intégrale y, fonction continue de x dans cette région, dont on peut se donner arbitrairement les valeurs y_0, y'_0 de y et de $dy : dx$ pour une valeur x_0 de la variable (x_0, y_0, y'_0 appartenant à la région T). Géométriquement, l'équation (1) appartient à une infinité de courbes dont on peut se donner à volonté un point et la tangente en ce point.

Dans ces conditions, l'équation (1) admet donc une intégrale générale, et nous ferons voir que toute solution pour laquelle les valeurs de x_0, y_0, y'_0 appartiennent à la région T, rentre dans cette intégrale et n'est qu'une intégrale particulière. Ce ne peut donc être que dans les régions où les conditions que nous indiquerons ne seraient pas vérifiées, que l'équation (1) admettrait des solutions singulières.

417. Ces propriétés s'étendent à des équations différentielles du 3me, du 4me ordre. En général, une équation de l'ordre n réduite à la forme normale

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right), \tag{2}$$

si la fonction f satisfait à des conditions à définir, admettra une *intégrale générale* renfermant n constantes arbitraires C_1, C_2, ..., C_n qui ne peuvent se réduire à un nombre moindre, et au moyen desquelles on pourra, pour une valeur donnée x_0 de x, faire prendre à la fonction intégrale y et à ses $n-1$ première dérivées des valeurs données d'avance, au moins dans une région déterminée. Toute intégrale de l'équation (2) dans cette region sera comprise comme *intégrale particulière* dans l'intégrale générale, et répondra à des valeurs particulières des constantes. En dehors de cette région, les conditions essentielles n'étant plus vérifiées, il pourra exister des *solutions singulières* non comprises dans l'intégrale générale.

En éliminant les constantes C_1, C_2, ... C_n entre l'intégrale générale et ses n premières dérivées, on retrouvera l'équation différentielle (2), comme on l'a vu (**398**).

§ 2. ÉQUATIONS LINÉAIRES.

418. On appelle *équation linéaire d'ordre n* toute équation de la forme

$$\frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + X_{n-1}\frac{dy}{dx} + X_n y = X, \tag{1}$$

X, X_1, ... X_{n-1}, X_n étant les fonctions données de x seul. Si $X = 0$, l'équation se réduit à

$$\frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + X_{n-1}\frac{dy}{dx} + X_n y = 0, \tag{2}$$

et s'appelle une équation linéaire *sans second membre*. Si, au contraire, on a $X \lessgtr 0$, l'équation (1) est dite *complète* ou *avec second membre*. Occupons-nous d'abord des propriétés de l'équation (2).

419. *Propriétés de l'équation sans second membre.* — **I.** Toute intégrale particulière y_1 de l'équation (2), multipliée par une constante arbitaire C_1, donne une solution plus générale de cette équation.

En effet, si l'on pose dans l'équation (2) $y = C_1 y_1$, toutes les dérivées de y renfermeront C_1 en facteur, et le résultat sera le même que si l'on avait fait $y = y_1$ et multiplié l'équation par C_1.

II. La somme $y_1 + y_2$ des deux intégrales de l'équation (2) est une nouvelle intégrale, car si l'on remplace y par $y_1 + y_2$ dans (2), on a le même résultat que si l'on faisait successivement $y = y_1$, $y = y_2$, et que l'on ajoutât.

Il suit évidemment de là que la somme $y_1 + y_2 + y_3$ de trois intégrales satisfait encore à l'équation (2), et ainsi de suite.

III. De là résulte cette propriété importante, que si l'on connaît n intégrales particulières $y_1, y_2, \ldots y_n$ de l'équation linéaire sans second membre (2), et si on les multiplie respectivement par des constantes arbitraires $C_1, C_2, \ldots C_n$, puis que l'on en fasse la somme, on aura encore une intégrale de l'équation (2), et comme elle renferme n constantes arbitraires, ce sera l'intégrale générale. Ainsi *l'intégrale complète de l'équation* (2) *est représentée par la fonction*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n, \tag{3}$$

$y_1, y_2, \ldots y_n$ *étant des intégrales particulières convenablement choisies, et* $C_1, C_2, \ldots C_n$ *des constantes arbitraires.*

Mais ces intégrales $y_1, y_2, \ldots y_n$ doivent, pour cela, satisfaire à une condition, c'est que l'on puisse déterminer les constantes $C_1, C_2, \ldots C_n$, pour une valeur donnée de x, de façon que y est ses $n - 1$ premières dérivées $y', y'', \ldots y^{(n-1)}$ prennent des valeurs arbitrairement choisies (**417**). Or, l'équation (3) entraîne les suivantes :

$$(4) \quad \begin{cases} y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n, \\ y' = C_1 y'_1 + C_2 y'_2 + \cdots + C_n y'_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{(n-1)} = C_1 y_1^{(n-1)} + C_2 y_2^{(n-1)} + \cdots + C_n y_n^{(n-1)}, \end{cases}$$

où $y_k^{(i)}$ représente en général la dérivée d'ordre i de y_k. Pour que ces équations soient résolubles par rapport à $C_1, C_2, \dots C_n$, quelques valeurs qu'on attribue aux premiers membres, il faut et il suffit que le dénominateur commun des valeurs de ces inconnues, ou le déterminant

$$(5) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \cdots & y'_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro pour toute valeur de x dans un intervalle (a, b). Or, cette condition revient à celle-ci, que les fonctions $y_1, y_2 \dots y_n$ ne soient liées entr'elles par aucune relation de la forme

$$(6) \qquad \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n = 0,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ étant des constantes déterminées.

En effet 1° si ces intégrales y_k satisfaisaient à une telle équation pour toute valeur de x dans l'intervalle (a, b), en la différentiant $n - 1$ fois par rapport à x, on aurait un système de n équations du premier degré en $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$, dont les seconds membres seraient nuls et qui donneraient pour $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ des valeurs nulles, à moins que le dénominateur commun de ces inconnues, c'est-à-dire précisément le déterminant Δ, ne soit égal à zéro. Ainsi la relation (6) entraine l'équation $\Delta = 0$.

2° Réciproquement, si le dénominateur Δ est nul pour toute valeur de x dans l'intervalle (a, b), il existe entre les fonctions $y_1, y_2, \dots y_n$ une relation de la forme (6).

Pour le démontrer, nous nous appuierons sur un lemme que nous allons d'abord établir.

Soient $A_1, A_2, \cdots, A_n$ les mineurs relatifs à la dernière ligne horizontale du déterminant Δ, ce déterminant peut s'écrire

$$(\alpha) \qquad \Delta = A_1 y_1^{(n-1)} + A^2 y_2^{(n-1)} + \cdots + A_n y_n^{(n-1)}.$$

Nous allons montrer que l'on a

$$(\beta) \qquad \frac{d\Delta}{dx} = A_1 y_1^{(n)} + A_2 y_2^{(n)} + \cdots + A_n y^{(n)}.$$

En effet, le théorème est évident pour $n = 2$, et s'il est vrai pour $n - 1$,

il sera vrai pour n, car en dérivant les deux membres de l'équation (α), on voit qu'il suffit de prouver que l'on a, quel que soit x,

$$\frac{dA_1}{dx}y_1^{(n-1)}+\frac{dA_2}{dx}y_2^{(n-1)}+\cdot\cdot+\frac{dA_n}{dx}y_n^{(n-1)}=0.$$

Or, si nous admettons que l'équation (β) soit vraie pour $n-1$, donc pour chacun des mineurs $A_1, A_2, \ldots, A_n$, il est clair que le premier membre de cette égalité n'est autre chose que le déterminant Δ dans lequel on aurait remplacé $y_1^{(n-2)}, y_2^{(n-2)}, \ldots y_n^{(n-2)}$ par $y_1^{(n-1)}, y_2^{(n-1)}, \ldots y_n^{(n-1)}$, c'est-à-dire zéro.

Cela posé, il s'agit de prouver que *si le déterminant Δ est identiquement nul, il existe entre les intégrales particulières $y_1, y_2, \cdots y_n$ une relation de la forme* (6).

Comme le théorème est évident pour $n=1$, nous montrerons que, s'il est vrai pour $n-1$, il est vrai pour n. Il suffit d'ailleurs de prendre $n=3$, la démonstration se faisant absolument de même dans le cas général.

Or, Δ étant nul pour toute valeur de x, au moins dans un certain intervalle, on a aussi identiquement $d\Delta : dx=0$, ou, d'après (β),

$$(\gamma)\qquad A_1y_1'''+A_2y_2'''+A_3y_3'''=0.$$

Nous avons les équations

$$A_1y_1+A_2y_2+A_3y_3=0,\quad A_1y_1'+A_2y_2'+A_3y_3'=0,\quad A_1y_1''+A_2y_2''+A_3y_3''=0,$$

dont les deux premières sont des identités d'après les propriétés des déterminants et la troisième résulte de l'hypothèse $\Delta=0$. Dérivons chacune de ces équations en ayant égard à la suivante et à l'équation (γ); il vient

$$(\delta)\qquad \begin{cases} A_1'y_1+A_2'y_2+A_3'y_3=0,\\ A_1'y_1'+A_2'y_2'+A_3'y_3'=0,\\ A_1'y_1''+A_2'y_2''+A_3'y_3''=0.\end{cases}$$

Nous pouvons toujours supposer qu'aucun des mineurs A_1, A_2, A_3, n'est nul quel que soit x, sans quoi, le théorème étant supposé vrai pour $n-1=2$, on aurait des relations de la forme $\alpha_1 y_2=\alpha_2 y_2=0$, etc. et la proposition à prouver serait établie. Or, cette hypothèse admise, on sait par la théorie des équations qu'il résulte du système (δ), où $\Delta=0$, que les valeurs de A_1', A_2', A_3' sont respectivement proportionnelles à

$$\begin{vmatrix} y_2 & y_3\\ y_2' & y_3'\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} y_3 & y_1\\ y_3' & y_1'\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix},$$

c'est-à-dire que l'on a

$$\frac{A'_1}{A_1} = \frac{A'_2}{A_2} = \frac{A'_3}{A_3} = H,$$

H étant une certaine fonction de x. On en déduit par l'intégration, $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$ étant des constantes,

$$A_1 = \alpha_1 e^{\int H dx}, \quad A_2 = \alpha_2 e^{\int H dx}, \quad A_3 = \alpha_3 e^{\int H dx},$$

et en substituant dans l'équation

$$A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3 = 0,$$

supprimant le facteur $e^{\int H dx}$ qui ne peut être nul, on a

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 = 0,$$

ce qu'il fallait prouver.

De là résulte donc ce théorème : *Pour que n intégrales particulières $y_1, y_2, \ldots y_n$ de l'équation* (2), *associées sous la forme* (3), *fournissent l'intégrale générale, il faut et il suffit que ces intégrales ne soient liées entr'elles par aucune relation de la forme* (6).

420. — IV. On peut d'ailleurs s'assurer que l'équation (2) admet toujours n intégrales particulières distinctes, ne renfermant aucune constante arbitraire, satisfaisant à la condition ci-dessus et propres, par suite, à former l'intégrale générale. Car, supposons qu'il soit impossible de trouver plus de k intégrales $y_1, y_2, \ldots y_k$ sans constante arbitraire qui ne vérifient aucune relation de la forme (6). Toute autre intégrale particulière Y serait donc liée avec les k premières par une équation de la forme

$$\alpha Y + \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_k y_k = 0,$$

$\alpha, \alpha_1, \cdots \alpha_k$ étant des constantes déterminées, ce qui revient à dire que l'expression $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_k y_k$, pour des valeurs arbitraires de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_k$, renferme toutes les solutions de l'équation (2) et en constitue l'intégrale générale y, chose impossible, puisqu'elle ne renferme que k constantes arbitraires.

L'intégrale générale de l'équation (2) est donc bien de la forme (3), et de plus, il ne peut y avoir de solution singulière, car, s'il en existait une, on la choisirait pour l'intégrale y_1 dans la démonstration précédente, ce qui est permis ; on complèterait l'intégrale générale (3) par $n - 1$ autres intégrales $y_2, \cdots y_n$, et il suffirait, dans celle-ci, de poser $C_1 = 1$, $C_2 = C_3 = \cdots = C_n = 0$, pour faire rentrer la solution y_1 dans l'intégrale générale.

421. *Propriétés de l'équation avec second membre.* — I. *Si l'on connaît l'intégrale générale* (3) *de l'équation sans second membre* (2), *on peut en déduire celle de l'équation avec second membre* (1) *par n quadratures.*

Considérons l'intégrale

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n; \tag{3}$$

elle peut représenter l'intégrale générale de l'équation (1) si l'on y remplace les constantes $C_1, C_2, \dots, C_n$ par des fonctions de x convenablement choisies, et l'on peut même disposer arbitrairement de $n - 1$ de ces indéterminées, car il suffira de déterminer la $n^{\text{ième}}$ par la condition que la fonction (3) satisfasse à l'équation (1) et en soit l'intégrale générale. Or, les $n - 1$ conditions arbitrairement choisies que l'on impose aux n quantités $C_1, C_2, \dots C_n$, consistent en ce que les $n - 1$ premières dérivées de y conservent la même forme que si $C_1, C_2, \dots C_n$ étaient des constantes. On obtient ainsi, pour les n premières dérivées de y,

$$\begin{aligned}
y' &= C_1 y'_1 + C_2 y'_2 + \cdots + C_n y'_n, \\
y'' &= C_1 y''_1 + C_2 y''_2 + \cdots + C_n y''_n, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
y^{(n-1)} &= C_1 y_1^{(n-1)} + C_2 y_2^{(n-1)} + \cdots + C_n y_n^{(n-1)}, \\
y^{(n)} &= C_1 y_1^{(n)} + C_2 y_2^{(n)} + \cdots + C_n y_n^{(n)} \\
&+ y_1^{(n-1)} \frac{dC_1}{dx} + y_2^{(n-1)} \frac{dC_2}{dx} + \cdots + y_n^{(n-1)} \frac{dC_n}{dx}.
\end{aligned}$$

Substituons ces valeurs de y et de ses dérivées dans l'équation différentielle (1); le multiplicateur de C_1 après cette substitution sera

$$y_1^{(n)} + X_1 y_1^{(n-1)} + \cdots + X_{n-2} y''_1 + X_{n-1} y'_1 + X_n y_1,$$

et se réduira à zéro puisque y_1 est une intégrale de l'équation (2). Il en sera de même des multiplicateurs de $C_2, \dots C_n$, et l'équation se réduira ainsi à

$$y_1^{(n-1)} \frac{dC_1}{dx} + y_2^{(n-1)} \frac{dC_2}{dx} + \cdots + y_n^{(n-1)} \frac{dC_n}{dx} = X.$$

Telle est l'équation qui exprime que la valeur (3) de y vérifie l'équation (1). Joignons à cette équation les $n - 1$ relations auxquelles doivent satisfaire les fonctions $C_1, C_2, \dots, C_n$ pour que les $n - 1$

premières dérivées de y aient les formes ci-dessus, nous aurons le système de n équations

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} y_1\dfrac{dC_1}{dx}+y_2\dfrac{dC_2}{dx}+\cdots+y_n\dfrac{dC_n}{dx}=0,\\ y'_1\dfrac{dC_1}{dx}+y'_2\dfrac{dC_2}{dx}+\cdots+y'_n\dfrac{dC_n}{dx}=0,\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ y_1^{(n-2)}\dfrac{dC_1}{dx}+y_2^{(n-2)}\dfrac{dC_2}{dx}+\cdots+y_n^{(n-2)}\dfrac{dC_n}{dx}=0,\\ y_1^{(n-1)}\dfrac{dC_1}{dx}+y_2^{(n-1)}\dfrac{dC_2}{dx}+\cdots+y_n^{(n-1)}\dfrac{dC_n}{dx}=X. \end{array}\right.$$

Ces équations sont du premier degré par rapport aux dérivées de C_1, C_2, ... C_n, et seront toujours résolubles par rapport à ces dérivées, car le dénominateur commun des valeurs des inconnues sera précisément le déterminant Δ, qui ne peut être nul pour des valeurs arbitraires de x puisque, par hypothèse, la formule (3) donne l'intégrale générale de (2). On en tirera donc les valeurs de ces dérivées en fonction explicite de x (car y_1, y_2, ... y_n sont censés connus), et l'on aura

$$\frac{dC_1}{dx}=\varphi_1(x),\qquad \frac{dC_2}{dx}=\varphi_2(x),\ \ldots,\qquad \frac{dC_n}{dx}=\varphi_n(x),$$

d'où, par quadratures,

$$C_1=H_1+\int\varphi_1(x)\,dx,\quad C_2=H_2+\int\varphi_2(x)\,dx,\ldots\quad C_n=H_n+\int\varphi_n(x)\,dx,$$

H_1, H_2, ... H_n étant les constantes arbitraires introduites par ces quadratures. Ces valeurs de $C_1, C_2, \ldots C_n$ substituées dans la formule (3) donneront l'intégrale générale de l'équation (1) avec n constantes arbitaires, savoir

$$(8)\quad y=y_1\left[H_1+\int\varphi_1(x)\,dx\right]+y_2\left[H_2+\int\varphi_2(x)\,dx\right]+\cdots+y_n\left[H_n+\int\varphi_n(x)\,dx\right].$$

Cette méthode pour déduire l'intégrale de l'équation (1) de celle de l'équation (2) est due à Lagrange et s'appelle la *méthode de la variation des constantes arbitraires.*

422. II. — *Si* Y *est une intégrale particulière de l'équation complète* (1), *y l'intégrale générale de l'équation sans second membre*, $Y+y$ *sera l'intégrale générale de l'équation* (1).

En effet, on peut toujours représenter l'intégrale générale de l'équa-

tion (1) par $Y + z$, sauf à déterminer convenablement la fonction z. Substituant à y la valeur $Y + z$ dans l'équation (1), on a

$$\left(\frac{d^nY}{dx^n} + X_1\frac{d^{n-1}Y}{dx^{n-1}} + \cdots + X_nY\right) + \left(\frac{d^nz}{dx^n} + X_1\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + \cdots + X_nz\right) = X.$$

Mais, par supposition, Y est une intégrale particulière de l'équation (1), ce qui réduit la formule précédente à

$$(9) \qquad \frac{d^nz}{dx^n} + X_1\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + \cdots + X_nz = 0.$$

Ainsi, la fonction z qui, ajoutée à Y, donne l'intégrale générale de l'équation avec second membre, n'est autre que la solution la plus générale de l'équation (9), c'est-à-dire de l'équation (2); c'est donc l'intégrale complète de celle-ci.

Si donc on sait, par quelque moyen, trouver une intégrale particulière de l'équation (1) le problème de son intégration générale sera ramené à celui de l'intégration de l'équation sans second membre.

423. — III. *Si l'on connaît une intégrale particulière y_1 de l'équation sans second membre* (2), *on abaissera d'une unité l'ordre de l'équation* (1) *ou* (2), *sans qu'elle cesse d'être linéaire.*

Soit $y = y_1z$ l'intégrale générale de l'équation (1), qui renferme (2) en y faisant $X = 0$; il faut déterminer z. On a

$$\frac{dy}{dx} = z\frac{dy_1}{dx} + y_1\frac{dx}{dz}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{dz}{dx}\frac{dy_1}{dx} + y_1\frac{dx^2}{d^2z}, \quad \cdots$$

$$\frac{d^ny}{d^nx} = z\frac{d^ny_1}{dx^n} + n\frac{dz}{dz}\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} + \cdots + y_1\frac{d^nz}{dx^n}.$$

Substituons ces valeurs de y et de ses dérivées dans l'équation (1); la somme des termes affectés du facteur z sera nulle, par la supposition que y_1 soit une intégrale de l'équation (2). L'équation (1) donnera donc, en z, une équation de la forme

$$y_1\frac{d^nz}{dx^n} + P\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + \cdots + S\frac{dz}{dx} = X,$$

P, ..., S étant des fonctions connues de x. Posant

$$\frac{dz}{dx} = u, \quad \text{d'où} \quad z = C + \int u\,dx,$$

et divisant toute l'équation par y_1, on aura une équation d'ordre $n - 1$ par rapport à u, savoir

$$(10) \qquad \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + P' \frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} + \cdots + S'u = X',$$

$P', \ldots, S', X'$ étant les quotients de $P, \ldots, S, X$ par y_1. Le théorème est donc démontré.

On voit aussi par là que l'intégrale générale de l'équation (2) est *nécessairement* de la forme

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n,$$

$y_1, y_2, \ldots, y_n$ désignant des intégrales particulières de cette équation. Admettons, en effet, que le théorème soit démontré pour une équation sans second membre de l'ordre $n - 1$. D'après ce qui précède, y_1 étant une intégrale de l'équation (2) qui est de l'ordre n, l'intégrale générale de celle-ci sera

$$y = y_1 (C + \int u\, dx),$$

u étant déterminé par l'équation (10) dans laquelle X' devra être remplacé par zéro, puisque $X = 0$. Mais, par hypothèse, on a

$$u = C_1 u_1 + C_2 u_2 + \cdots + C_{n-1} u_{n-1},$$

$C_1, C_2, \ldots C_{n-1}$ étant des constantes; $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$ des intégrales particulières de (10). Donc l'intégrale générale de (2) est

$$y = Cy_1 + C_1 y_1 \int u_1 dx + C_2 y_1 \int u_2 dx + \cdots + C_{n-1} y_1 \int u_{n-1} dx.$$

Or, on voit immédiatement que $y_1 \int u_1 dx$, $y_2 \int u_2 dx, \ldots$ sont des intégrales particulières de l'équation (2). Donc, le théorème supposé vrai pour une équation d'ordre $n - 1$ subsiste pour une équation d'ordre n. D'ailleurs, il est vrai pour une équation du premier ordre, ou de la forme

$$\frac{dy}{dx} + Xy = 0,$$

comme il résulte évidemment de l'intégrale (9) du N° **408**, où l'on devra faire $X_1 = 0$.

§ 3. ÉQUATIONS LINÉAIRES A COEFFICIENTS CONSTANTS.

424. Quand les coefficients $X_1, X_2, \ldots X_n$ de l'équation linéaire sans second membre se réduisent à des constantes $a_1, a_2, \ldots, a_n$, l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0$$

s'intègre comme il suit. Cherchons une intégrale particulière de la forme $y = e^{rx}$, r étant une constante à déterminer. Substituons cette valeur de y dans le premier membre de (1), en observant que

$$\frac{d^p e^{rx}}{dx^p} = r^p e^{rx};$$

nous aurons

$$(2) \qquad \frac{d^n e^{rx}}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} e^{rx}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{de^{rx}}{dx} + a_n e^{rx} = e^{rx} f(r),$$

si nous posons, pour abréger,

$$(3) \qquad f(r) = r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n.$$

Donc, pour que l'équation (1) soit vérifiée par la valeur $y = e^{rx}$, il faut et il suffit que le second membre de l'équation (2), ou que $f(r)$, soit nul, c'est-à-dire que r soit une des racines de l'équation $f(r) = 0$. Cette équation, que nous appellerons l'équation auxiliaire, est de degré n, elle admet donc n racines $r_1, r_2, \ldots r_n$, que nous supposerons d'abord *réelles et inégales*. Ainsi $e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \ldots e^{r_n x}$ seront des intégrales particulières de l'équation (1), et elles seront propres à donner l'intégrale générale par la formule (3) du § 2, car si l'on forme ici le déterminant Δ de ce paragraphe, on trouve

$$\Delta = e^{r_1 x} e^{r_2 x} \ldots e^{r_n x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \\ r_1^2 & r_2^2 & \cdots & r_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \cdots & r_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

et l'on sait[1] que ce déterminant ne saurait être égal à zéro si $r_1, r_2, \ldots r_n$ sont inégaux. Ainsi, l'intégrale générale de l'équation (1) sera

$$(4) \qquad y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \cdots + C_n e^{r_n x}.$$

425. Supposons maintenant que l'équation $f(r) = 0$ admette des racines imaginaires. On pourra encore considérer, r_1 étant une telle racine, $e^{r_1 x}$ comme une intégrale de l'équation (1), car la seule propriété de la fonction e^{rx} dont nous ayons fait usage pour prouver qu'elle vérifie l'équation (1) si r est une racine de l'équation auxiliaire, c'est que

(1) Baltzer, *Théorie des déterminants*, § XII.

$D^p e^{rx}$ est égal à $r^p e^{rx}$, et cette propriété subsiste si r est imaginaire, comme on l'a vu au nº **267**. Il est même permis d'attribuer à la constante C_1 une valeur imaginaire, cela ne change rien au résultat. Ainsi l'intégrale générale (4) subsisterait. Mais il vaut mieux lui restituer la forme réelle, et pour cela, nous observerons que l'équation $f(r) = 0$ a ses racines imaginaires conjuguées deux à deux, en sorte que si l'on pose

$$r_1 = \alpha + \beta i, \quad \text{on aura} \quad r_2 = \alpha - \beta i,$$

$$C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} = e^{\alpha x}(C_1 e^{\beta x i} + C_2 e^{-\beta x i})$$
$$= e^{\alpha x}[(C_1 + C_2)\cos\beta x + (C_1 - C_2)i \sin\beta x],$$

ou, si on fait $C_1 + C_2 = A$, $(C_1 - C_2)i = B$,

$$(5) \qquad C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x),$$

et l'on peut regarder A et B comme des constantes arbitraires réelles. Ainsi les termes de l'intégrale générale (4) qui correspondent à deux racines imaginaires conjuguées seront remplacés par deux termes réels, donnés par la relation (5).

426. Supposons que l'équation auxiliaire ait deux racines réelles égales, $r_1 = r_2$. Les deux intégrales $e^{r_1 x}$, $e^{r_2 x}$ se confondant dans la formule (4), les constantes C_1 et C_2 se réduisent à une seule, et cette formule ne peut plus donner l'intégrale générale. D'ailleurs, le déterminant Δ s'annule comme ayant deux colonnes égales. Mais on obtient une nouvelle intégrale particulière en observant que l'équation (2) est une identité qui subsiste quelque valeur qu'on attribue à la constante r, et que, si l'on dérive les deux membres par rapport à r, on en déduira une nouvelle identité. D'ailleurs, on sait que l'on a

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^p e^{rx}}{\partial x^p}\right) = \frac{\partial^p}{\partial x^p}\left(\frac{\partial e^{rx}}{\partial r}\right) = \frac{d^p x e^{rx}}{dx^p},$$

donc on trouvera

$$\frac{d^n . x e^{rx}}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} . x e^{rx}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{d . x e^{rx}}{dx} + a_n x e^{rx} = x e^{rx} f(r) + e^{rx} f'(r).$$

Mais puisque, par l'hypothèse, r_1 est une racine double de l'équation $f(r) = 0$, $f(r)$ et $f'(r_1)$ sont nuls, le premier membre s'annule donc pour $r = r_1$, ce qui montre que $x e^{r_1 x}$ est une intégrale particulière de l'équation (1). On aura donc, pour intégrale générale

$$(6) \qquad y = (C_1 + C_2 x)e^{r_1 x} + C_3 e^{r_3 x} + \cdots + C_n e^{r_n x}.$$

Un raisonnement semblable ferait voir que, si r_1 est une racine triple de l'équation $f(r) = 0$, ce qui donne $f(r_1) = 0$, $f'(r_1) = 0$, $f''(r_1) = 0$, $x^2 e^{r_1 x}$ est encore une intégrale de l'équation (1), et l'intégrale générale est

$$y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)\, e^{r_1 x} + \cdots + C_n e^{r_n x},$$

et ainsi de suite.

La même méthode s'applique aux racines imaginaires multiples. Ainsi, si $\alpha + \beta i$ est une racine double, de même que $\alpha - \beta i$, les termes correspondants dans l'intégrale générale seront

$$(7) \qquad e^{\alpha x}\,[(A_1 + A_2 x)\cos \beta x + (B_1 + B_2 x)\sin \beta x],$$

A_1, A_2, B_1, B_2 étant des constantes arbitraires.

427. Passons à l'équation avec second membre. Si elle se réduit à la forme

$$\frac{d^n y}{dx^n} = X,$$

les coefficients $a_1, a_2, \ldots a_n$ étant nuls, l'intégrale de l'équation sans second membre $y^{(n)} = 0$ sera

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \cdots + C_n x^{n-1},$$

et il suffit de lui ajouter l'intégrale particulière de l'équation complète qu'on obtient en effectuant n quadratures successives sur la fonction X, sans introduire de constantes arbitraires ; on a donc, pour l'intégrale cherchée,

$$y = C_1 + C_2 x + \cdots + C_n x^{n-1} + \int dx \int dx \ldots \int X dx.$$

Soit, en général, l'équation

$$(8) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = X.$$

Si $X = a$ est une constante, il suffit de poser $a_n y - a = a_n z$, l'équation en z sera linéaire sans second membre, son intégrale s'obtiendra par les règles ci-dessus, et l'on aura celle de l'équation (8) par la formule

$$y = z + \frac{a}{a_n}.$$

Si X est fonction de x, on appliquera la méthode de la variation des constantes (**421**). Les racines de l'équation auxiliaire $f(r) = 0$ étant, je suppose, réelles et inégales, en sorte que l'équation sans second membre

ait pour intégrale générale (4), le système des équations (7) du n° **421** deviendra ici, en posant généralement

$$e^{r_i x}\frac{dC_i}{dx}=u,$$

$$\begin{cases} u_1+\ \ u_2+\cdots+\ \ u_n=0,\\ r_1u_1+r_2u_2+\cdots+r_nu_n=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ r_1^{n-2}u_1+r_2^{n-2}u_2+\cdots+r_n^{n-2}u_n=0,\\ r_1^{n-1}u_1+r_2^{n-1}u_2+\cdots+r_n^{n-1}u_n=X. \end{cases}$$

On sait, par les éléments d'Algèbre, que ce système donne pour l'inconnue u_i la valeur

$$u_i=\frac{X}{(r_i-r_1)\dots(r_i-r_{i-1})(r_i-r_{i+1})\dots(r_i-r_n)}=\frac{X}{f'(r_i)},$$

et l'on a, par conséquent,

$$\frac{dC_i}{dx}=\frac{1}{f'(r)}Xe^{-r_i x}.$$

Intégrant et mettant en évidence la constante arbitraire H_i, on trouve

$$C_i=H_i+\frac{1}{f'(r_i)}\int Xe^{-r_i x}dx$$

pour la fonction qui doit remplacer la constante arbitraire C_i dans l'intégrale générale (4). L'intégrale de l'équation (8) est donc

$$y=\sum_{i=1}^{i=n}e^{r_i x}\left[H_i+\frac{1}{f'(r_i)}\int Xe^{-r_i x}dx\right].$$

Si l'équation auxiliaire avait des racines imaginaires, il faudrait appliquer la méthode de la variation des constantes après avoir mis l'intégrale de l'équation (1) sous la forme appropriée. De même, si $f(r)=0$ admettait des racines égales.

Dans beaucoup de cas, on trouve par tâtonnement une intégrale particulière Y de l'équation (8); l'application du théorème du n° **423** facilite alors beaucoup le passage de l'intégrale générale de l'équation sans second membre à celle de l'équation complète.

428. Soit, comme exemple, l'équation

(A) $$\frac{d^5y}{dx^5}+\frac{d^2y}{dx^2}=x.$$

L'équation auxiliaire $r^5 + r^2 = 0$ admettra les racines

$$r_1 = r_2 = 0, \quad r_3 = -1, \quad r_4 = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2},$$

et l'intégrale de l'équation sans second membre sera, d'après ce qui précède,

$$y = (C_1 + C_2 x) + C_3 e^{-x} + e^{\frac{x}{2}}\left(A \cos \frac{x\sqrt{3}}{2} + B \sin \frac{x\sqrt{3}}{2}\right).$$

Cherchons une intégrale particulière de l'équation (A), de la forme

$$Y = \alpha x^3 + \beta x^2,$$

α, β, étant des constantes à déterminer. On trouve

$$\frac{d^2Y}{dx^2} = 6\alpha x + 2\beta, \quad \frac{d^5Y}{dx^5} = 0,$$

et en substituant Y à y dans l'équation (A),

$$6\alpha x + 2\beta = x,$$

équation qui se vérifie par $\beta = 0$, $6\alpha = 1$, donc l'intégrale générale cherchée est

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + e^{\frac{x}{2}}\left(A \cos \frac{x}{2}\sqrt{3} + B \sin \frac{x}{2}\sqrt{3}\right) + \frac{x^3}{6}.$$

Exercices.

Equations sans second membre :

1. $\frac{d^4y}{dx^4} - 10\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 0.$ *R.* $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + C_3 e^{x} + C_4 e^{-x}.$

2. $\frac{d^5y}{dx^5} - 12\frac{d^4y}{dx^4} + 60\frac{d^3y}{dx^3} - 156\frac{d^2y}{dx^2} + 212\frac{dy}{dx} - 120y = 0.$

R. $y = C_1 e^{2x} + e^{2x}(A \cos 2x + B \sin 2x) + e^{3x}(A_1 \cos x + B_1 \sin x).$

Application de la variation des constantes :

3. $\frac{d^3y}{dx^3} - 7a^2\frac{dy}{dx} + 6a^3y = x^2.$

R. $$y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{2ax} + C_3 e^{-3ax} + \frac{1}{6a^3}\left(x^2 + \frac{7x}{3a} + \frac{49}{18a^2}\right).$$

4. $\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} - 6a^2y = e^{mx}.$ *R.* $y = C_1 e^{2ax} + C_2 e^{-3ax} + \frac{e^{mx}}{(m+3a)(m-2a)}.$

Recherche d'une intégrale particulière de l'équation complète :

5. $\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = 2\cos mx + 3\sin mx.$

R. On essaie $Y = \alpha \cos mx + \beta \sin mx$. On trouve l'intégrale générale

$$y = A \cos ax + B \sin ax + \frac{2 \cos mx + 3 \sin mx}{a^2 - m^2}.$$

6. $\frac{d^4y}{dx^4} - 2\frac{d^2y}{dx^2} + y = \alpha e^x + \beta e^{-x} + \gamma \sin x + \delta \cos x.$

R. On trouve une solution de l'équation complète en posant

$$Y = \alpha_1 x^2 e^x + \beta_1 x^2 e^{-x} + \gamma_1 \sin x + \delta_1 \cos x,$$

et l'intégrale générale est

$$y = \left(C_1 + C_2 x + \frac{\alpha}{8} x^2\right) e^x + \left(C_3 + C_4 x + \frac{\beta}{8} x^2\right) e^{-x} + \frac{\gamma}{4} \sin x + \frac{\delta}{4} \cos x.$$

7. $\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = (ax + b) e^x + ce^{-2x}.$

R. L'équation auxiliaire a pour racines $r = 1$ (double), $r = -2$. On a une solution Y de l'équation complète de la forme

$$Y = (\alpha x^2 + \beta x^3) e^x + \gamma x e^{-2x},$$

et l'on trouve

$$y = \frac{e^x}{18} [C_1 + C_2 x + (3b - a) x^2 + a x^3] + \frac{e^{-2x}}{9} (C_3 + cx).$$

8. $\frac{d^4y}{dx^4} + 2a^2 \frac{d^2y}{dx^2} + a^4 y = \cos ax.$

R. Il faut ici essayer une solution de la forme $\alpha x^2 \cos ax$. On a l'intégrale générale

$$y = (C_1 + C_2 x) \cos ax + (C_3 + C_4 x) \sin ax + \frac{1}{8a^2} x^2 \cos ax.$$

9. $\frac{d^n y}{dx^n} - na \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \frac{n(n-1) a^2}{1.2} \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots \pm na^{n-1} \frac{dy}{dx} \mp a^n y = e^{mx}.$

R. $$y = e^{ax} (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \cdots + C_n x^{n-1}) + \frac{e^{mx}}{(m-a)^n}.$$

Équations à coefficients variables :

10. $(x + a)^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 4(x + a) \frac{dy}{dx} + 6y = 0.$

R. Posant $y = (x + a)^r$, on a l'équation auxiliaire

$$r^2 - 5r + 6 = 0, \quad \text{d'où} \quad y = C_1 (x + a)^3 + C_2 (x + a)^2.$$

Généraliser.

11. $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2y = x^2 + px + q.$

R. L'intégrale de l'équation sans second membre est $C_1 x + C_2 x^2$. L'application de la variation des constantes arbitraires conduit à l'intégrale

$$y = C_1 x + C_2 x^2 + \frac{1}{2} q + (x^2 - px)\, \mathrm{l}.x.$$

12. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2 \operatorname{tg} \omega \frac{dy}{dx} + 2y = F(x).$

R. Multipliant par $\cos x$ et posant $y\cos x = u$, on a en u une équation linéaire à coefficients constants. Appliquant la méthode de Lagrange, on trouve pour l'intégrale générale

$$y\cos x = A\cos x\sqrt{3} + B\sin x\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\Big[\cos x\sqrt{3}\int F(x)\sin x\sqrt{3}\cos x\,dx$$
$$- \sin x\sqrt{3}\int F(x)\cos x\sqrt{3}\sin x\,dx\Big],$$

que l'on peut écrire aussi

$$A\cos x\sqrt{3} + B\sin x\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^x F(z)\cos z\sin(z-x)\sqrt{3}\,dz.$$

CHAPITRE XLIII.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS D'ORDRE SUPÉRIEUR AU PREMIER PAR DES PROCÉDÉS PARTICULIERS.

429. En dehors des équations linéaires, on ne sait intégrer qu'un petit nombre d'équations de formes spéciales.

Équations dans lesquelles manque une des variables. — L'ordre de ces équations peut être abaissé d'une unité. Si l'on pose, en effet, $dy = p\,dx$, l'équation du second ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, \frac{dy}{dx}\right) \quad \text{deviendra} \quad \frac{dp}{dx} = f(x, p).$$

Cette équation, intégrée, donnera p en fonction de x avec une constante arbitraire, d'où

$$p = \frac{dy}{dx} = \varphi(x, C), \quad y = C_1 + \int \varphi(x, C)\,dx,$$

ce qui sera l'intégrale générale. Si l'on avait

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(y, \frac{dy}{dx}\right),$$

la même substitution donnerait

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = p\frac{dp}{dy},$$

d'où

$$p\frac{dp}{dy} = f(y, p), \quad p = \varphi(y, C),$$

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{dy}{\varphi(y, C)}, \quad x = C_1 + \int \frac{dy}{\varphi(y, C)}.$$

Soit, comme exemple, l'équation

$$y\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{d^2y}{dx^2}-my\frac{dy}{dx}=0,$$

qui devient, par la substitution indiquée,

$$py\frac{dp}{dy}-p^2-mpy=0,\quad \text{ou}\quad \frac{dp}{dy}-\frac{p}{y}=m,$$

en divisant par py. L'intégrale de cette équation linéaire est

$$p=y(\mathrm{C}+m\,\mathrm{l}.y)=my\,\mathrm{l}.\mathrm{C}'y.$$

De là

$$\frac{dy}{dx}=my\,\mathrm{l}.\mathrm{C}'y,\quad mdx=\frac{y\,\mathrm{l}.\mathrm{C}'y}{dy}=\frac{d.\mathrm{l}.\mathrm{C}'y}{\mathrm{l}.\mathrm{C}'y},$$

$$mx+\mathrm{C}_1=\mathrm{l}.\mathrm{l}.\mathrm{C}'y,$$

et enfin

$$\mathrm{l}.\mathrm{C}'y=e^{mx+\mathrm{C}_1}.$$

430. *Équations qui ne renferment que deux dérivées consécutives.* — Ces équations, qui sont un cas particulier des précédentes, sont de la forme

$$(\alpha)\qquad \frac{d^ny}{dx^n}=f\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).$$

On posera

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=p,\quad \text{d'où}\quad \frac{dx}{dp}=f(p),$$

$$dx=\frac{dp}{f(p)},\quad x=\mathrm{C}+\int\frac{dp}{f(p)},\quad p=\varphi(x,\mathrm{C}),$$

en supposant que l'on sache effectuer la quadrature et en tirer p en fonction de x. De là

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=\varphi(x,\mathrm{C}),$$

équation de la forme traitée au nº **427**. Ainsi, l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}\quad \text{ou}\quad \frac{dp}{dx}=\sqrt{1+p^2}$$

donne

$$dx=\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}},\quad x=\mathrm{C}+\mathrm{l}.(p+\sqrt{1+p^2}),$$

et en résolvant par rapport à p,

$$2p = e^{x-C} - e^{-(x-C)},$$

d'où

$$y = C_1 + \frac{e^{x-C} + r^{-(x-C)}}{2}.$$

On peut aussi, de l'équation

$$dx = \frac{dp}{f(p)},$$

déduire, quand l'équation (α) est du second ordre,

$$dy = pdx = \frac{pdp}{f(p)}, \quad y = C_1 + \int \frac{pdp}{f(p)},$$

et en éliminant p entre cette équation et l'équation

$$x = C + \int \frac{dp}{f(p)},$$

on trouvera entre x et y l'intégrale cherchée

431. Considérons encore les équations de la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(y).$$

En posant toujours $y' = p$, nous aurons

$$\frac{dp}{dx} = p\frac{dp}{dy} = f(y), \quad 2pdp = 2f(y)\,dy;$$

d'où

$$p^2 = 2\int f(y)\,dy + C.$$

De là on tire successivement

$$\frac{dy^2}{dx^2} = C + 2\int f(y)\,dy, \quad dx = \pm\frac{dy}{\sqrt{C + 2\int f(y)\,dy}},$$

et enfin

$$x = C_1 \pm \int \frac{dy}{\sqrt{C + 2\int f(y)\,dy}}.$$

Ainsi, dans ce cas, le problème dépend de deux quadratures.

On ramènerait à ce cas celui d'une équation

$$\frac{d^ny}{dx^n} = f\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right).$$

432 Jacobi a montré que, si une équation du second ordre de la forme

(1) $$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y)$$

peut être abaissée au premier orde par une intégration, soit

(2) $$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y, C),$$

l'intégration s'achèvera par quadrature, parce que l'on aura

(3) $$\frac{\partial\varphi}{\partial C}(dy - \varphi dx) = d.\,F(x, x, C).$$

En effet, différentions (2) et remplaçons, dans le second membre, $dy : dx$ par sa valeur (2); il viendra

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

et comme cette équation doit s'accorder avec l'équation (1), on a

(4) $$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y} = f(x, y).$$

Toute fonction y de x qui satisfait à l'équation (1) doit donc satisfaire à celle-ci, indépendamment de toute valeur particulière de x et de C. Mais il suit de là que cette équation (4) est une pure identité entre x, y et C, sans quoi elle serait l'intégrale générale de l'équation (1), ce qui est impossible, vu qu'elle ne renferme qu'une constante arbitraire C au plus. Si l'on dérive cette identité (4) par rapport à C, on aura donc, abstraction faite de toute relation entre x et y,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial C\,\partial x} + \varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial C\,dy} + \frac{\partial\varphi}{\partial C}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0,$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial C}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial C}\right) = 0,$$

ce qui est (**403**) la condition nécessaire et suffisante pour que l'expression

$$\frac{\partial}{\partial C}dy - \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial C}dx = \frac{\partial\varphi}{\partial C}(dy - \varphi dx)$$

soit une différentielle exacte. L'équation (3) étant démontrée, l'équation (2) sera rendue immédiatement intégrable par la multiplication par le facteur $\varphi'_C(x, y, C)$.

433. *Équations homogènes.* — Lorsqu'une équation du second ordre, multipliée par dx^2, devient homogène par rapport aux quantités x, y, dx, dy, d^2y, considérées comme autant de variables, on pose

(5) $$y = ux,\ dy = pdx,\ d^2y = qx^{-1}dx^2,$$

et y, dy, d^2y étant ainsi remplacés par des facteurs du premier degré en x, dx, l'équation transformée sera homogène par rapport à ces dernières quantités. Mais l'indéterminée dx doit avoir disparu de l'équation; x disparaîtra donc en même temps, et l'on aura entre u, p, q seulement une relation que nous supposerons mise sous la forme

(6) $$q = f(u, p).$$

Ainsi l'équation

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - ny = 0 \quad \text{ou} \quad x^2d^2y - xdxdy - nydx^2 = 0$$

satisfait à la condition supposée. La substitution indiquée donnera

$$q - p - nu = 0 \quad \text{ou} \quad q = p + nu,$$

ce qui rentre dans l'égalité (6). Mais, des deux premières équations (5) on tire

$$dy = pdx = udx + xdu, \quad \text{ou} \quad (7)\ \frac{dx}{x} = \frac{du}{p - u},$$

et de la troisième

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{q}{x}, \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{x} = \frac{dp}{q};$$

donc, en égalant ces valeurs de $dx : x$ et mettant pour q la valeur (6),

(8) $$\frac{dp}{f(u, p)} = \frac{du}{p - u},$$

Cette équation entre p et u est du premier ordre; on saura l'intégrer si elle rentre dans l'un des cas étudiés au chapitre XL, et l'on en tirera

$$p = \varphi(u, C), \quad (C = const.).$$

L'équation (7) deviendra, par substitution de la valeur de p,

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{\varphi(u, C) - u}, \quad \text{d'où} \quad 1.x + C_1 = \int \frac{du}{\varphi(u, C) - u},$$

et en substituant à u sa valeur $y : x$ après l'intégration, on aura la solution du problème.

Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, on a pour l'équation (8)

$$\frac{dp}{p+nu}=\frac{du}{p-u}, \quad \text{ou} \quad (p-u)\,dp-(p+nu)\,du=0,$$

ou encore

$$pdp - nudu - (udp + pdu) = 0.$$

Cette équation s'intègre immédiatement; on a

$$p^2 - nu^2 - 2pu = C, \quad p = u \pm \sqrt{C+(n+1)\,u^2},$$

et en substituant dans l'équation (7),

$$\frac{dx}{x}=\frac{du}{\pm\sqrt{C+(n+1)\,u^2}}.$$

Intégrant de nouveau et ayant égard à la relation $u = y : x$, on trouvera enfin

$$y = x\,(C_1 x^{\sqrt{n+1}} + C_2 x^{-\sqrt{n+1}}).$$

434. Si une équation d'ordre n est homogène par rapport à y, y', ... $y^{(n)}$, on abaissera son ordre d'une unité en posant

$$y' = uy, \quad \text{d'où} \quad y'' = yu' + uy' = y\,(u' + u^2), \text{ etc...}$$

y disparaîtra comme facteur à tous les termes, et l'équation entre u et x sera de l'ordre $n - 1$.

435. *Intégration par les séries.* — Lorsqu'on ne sait pas intégrer une équation différentielle rigoureusement, on calcule par approximation la fonction intégrale y, soit par une méthode qui sera développée plus loin, soit par le développement en série. On se sert pour cela du théorème de Taylor, lorsque l'équation différentielle vérifie certaines conditions dans une région déterminée par rapport à x et à y. Mais si la fonction y n'est pas développable suivant les puissances entières, positives et croissantes de x, ou de $x - x_0$, la formule de Taylor ne pourra s'appliquer, c'est pourquoi nous indiquerons la *méthode des coefficients indéterminés*, qui est plus générale.

Supposons que l'équation différentielle soit ramenée à un polynôme rationnel et entier par rapport à y et à ses dérivées y', y'', ..., égalé à zéro; cherchons à vérifier l'équation par une expression de la forme

$$y = Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + Dx^\delta + \cdots, \tag{9}$$

α, β, γ, δ, ... étant des exposants constants tels que l'on ait $\alpha < \beta < \gamma < \delta$ ...; A, B, C, D, ... des coefficients constants à déterminer. Admet-

tant que l'on puisse, au moins dans un intervalle (a, b) de la variable x, dériver cette expression (9) par la règle du n° **324**, une ou plusieurs fois suivant l'ordre de l'équation donnée, on obtiendra les valeurs de $y', y'', \ldots$ en séries convergentes dans l'intervalle (a, b); on les substituera, ainsi que la valeur (9) de y dans l'équation différentielle, et, en appliquant, s'il y a lieu, la règle du n° **45**, ce qui suppose que les séries soient absolument convergentes, on transformera le premier membre de l'équation donnée en une seule série ordonnée suivant des puissances croissantes de x. Comme x reste variable dans l'intervalle (a, b), l'équation ne pourra être vérifiée que si les coefficients des diverses puissances de x sont nuls séparément, et l'on déduira de là une suite de conditions qui serviront à déduire les uns des autres les exposants $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ et les coefficients A, B, C, D, ... Ceux qui resteront indéterminés fourniront les constantes arbitraires de l'intégrale.

On devra vérifier, après cette détermination, si les séries satisfont bien aux conditions que l'on a supposées en les combinant de la manière indiquée.

436. Appliquons cette méthode à l'équation linéaire

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{m}{x}\frac{dy}{dx}+ny=0, \tag{10}$$

dite ***Équation de Bessel***. On aura, d'après l'équation (9),

$$\frac{dy}{dx}=A\alpha x^{\alpha-1}+B\beta x^{\beta-1}+C\gamma x^{\gamma-1}+D\delta x^{\delta-1}+\cdots$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=A\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}+B\beta(\beta-1)x^{\beta-2}+C\gamma(\gamma-1)x^{\gamma-2}+D\delta(\delta-1)x^{\delta-2}+\cdots,$$

et en substituant dans l'équation (10) et groupant les termes affectés d'un même coefficient, on trouvera

$$A[\alpha(m+\alpha-1)x^{\alpha-2}+nx^{\alpha}]+B[\beta(m+\beta-1)x^{\beta-2}+nx^{\beta}]$$
$$+C[\gamma(m+\gamma-1)x^{\gamma-2}+nx^{\gamma}]+D[\delta(m+\delta-1)x^{\delta-2}+nx^{\delta}]+\cdots=0.$$

L'exposant $\alpha-2$ étant moindre que tous les suivants, on devra poser $\alpha(m+\alpha-1)=0$, d'où résultent deux hypothèses :

$$1^\circ\ \alpha=0, \qquad 2^\circ\ \alpha=1-m.$$

Adoptant d'abord la première, observant que le terme en x^α ne peut être nul et doit être détruit par l'un des suivants, on est amené à poser

$$\alpha=\beta-2, \quad \text{et de même} \quad \beta=\gamma-2,\ \gamma=\delta-2,\ \ldots$$

d'où résultent les valeurs

$$\alpha = 0,\ \beta = 2,\ \gamma = 4,\ \delta = 6,\ \ldots$$

Les coefficients devront, en outre, satisfaire aux relations

$$An + B\beta(m + \beta - 1) = 0,\ Bn + C\gamma(m + \gamma - 1) = 0,$$
$$Cn + D\delta(m + \delta - 1) = 0 \ldots$$

d'où nous tirerons

$$B = -\frac{An}{2(m+1)},\quad C = \frac{An^2}{2.4.(m+1)(m+3)},$$
$$D = -\frac{An^3}{2.4.6(m+1)(m+3)(m+5)},$$

et enfin l'équation (9) deviendra

$$(11)\qquad y = A\left[1 - \frac{nx^2}{2(m+1)} + \frac{n^2x^4}{2.4.(m+1)(m+3)} - \frac{n^3x^6}{2.4.6.(m+1)(m+3)(m+5)} + \cdots\right],$$

la constante A restant arbitraire.

Si l'on adopte pour α la seconde valeur $1 - m$, et que les mêmes relations subsistent entre les exposants $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ et entre les coefficients A, B, C, ..., on en déduira les valeurs suivantes :

$$\alpha = 1 - m,\ \beta = 3 - m,\ \gamma = 5 - m,\ \delta = 7 - m,\ \ldots$$
$$B = \frac{nA}{2(m-3)},\ C = \frac{n^2A}{2.4(m-3)(m-5)},\ D = \frac{n^3A}{2.4.6(m-3)(m-5)(m-7)} + \cdots$$

et on aura une seconde intégrale de l'équation (10), savoir, en désignant par A_1 une constante différente de A,

$$(12)\qquad y = A_1x^{1-m}\left[1 + \frac{nx^2}{2(m-3)} + \frac{n^2x^4}{2.4(m-3)(m-5)} + \frac{n^3x^6}{2.4.6(m-3)(m-5)(m-7)} + \cdots\right].$$

Chacune des intégrales (11) et (12), ne renfermant qu'une constante arbitraire, n'est qu'une intégrale particulière de l'équation (10). Mais celle-ci est linéaire sans second membre; la somme des intégrales (11) et (12) donnera donc l'intégrale générale.

Si l'on suppose que m ne soit pas un nombre impair positif ou négatif,

le rapport du terme de rang $p + 1$ au précédent sera, dans les séries (11) et (12) respectivement,

$$-\frac{nx^2}{2p(m+2p-1)}, \quad -\frac{nx^2}{2p(2p-1-m)},$$

et aura pour limite zéro lorsque p croîtra indéfiniment, quelque valeur qu'on attribue à x. Les séries entre crochets (11) et (12) seront donc absolument convergentes et équiconvergentes dans toute intervalle. On verra qu'il en est de même de celles qu'on obtient par dérivation. Toutes les conditions de la démonstration sont remplies, la solution est donc vérifiée *a posteriori*.

Si m est impair et positif, la formule (12) a tous ses termes infinis à partir d'un certain rang et ne peut plus servir. De même pour l'intégrale (11) si m est impair négatif. Dans ces cas là on ne possède plus qu'une intégrale particulière y_1 de l'équation de Bessel. On en déduira l'intégrale générale par la méthode indiquée au n° **423**, qui conduira ici à l'équation linéaire du premier ordre

$$\frac{du}{dx} + \left(\frac{m}{x} + 2\frac{d.\,\mathrm{l}.\,y_1}{dx}\right)u = 0,$$

d'où

$$ux^m y_1^2 = \text{const.} = \mathrm{C},$$

et par suite

$$y = \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}y_1 \int \frac{dx}{x^m y_1^2}.$$

Si, en particulier, on a $m = 1$, l'équation de Bessel se réduit à

$$\frac{d^2y}{dx} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + ny = 0,$$

et admet l'intégrale particulière

$$y_1 = \mathrm{A}\left(1 - \frac{nx^2}{2^2} + \frac{n^2x^4}{2^2.4^2} - \frac{n^3x^6}{2^2.4^2.6^2} + \cdots\right).$$

Si l'on suppose $n = 2$, les séries (11) et (12) deviennent

$$\mathrm{A}\left(1 - \frac{nx^2}{2.3} + \frac{n^2x^4}{2.3.4.5} - \cdots\right), \quad \frac{\mathrm{A}_1}{x}\left(1 - \frac{nx^2}{1.2} + \frac{n^2x^4}{1.2.3.4} - \cdots\right)$$

et représentent respectivement les fonctions

$$\frac{A \sin x\sqrt{n}}{x\sqrt{n}}, \frac{A_1 \cos x\sqrt{n}}{x}$$

dont la somme fournira en conséquence l'intégrale générale.

Exercices.

Équations ne renfermant pas y (**429**) :

1. $\frac{d^2y}{d^2x} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} = 0.$ *R.* $y = C\,l.x + C_1.$

2. $a^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}} = 0.$ *R.* $y = C_1 \pm \int \frac{(x^2 - C)\,dx}{\sqrt{a^4 - (x^2 - C)^2}}.$

3. $\left(x^2 + a^2\frac{dy^2}{dx^2}\right)\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} = 0.$

R. $x^2 = \frac{C}{p} - \frac{a^2p^2}{3};\quad y = C_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\int\frac{3C + 2a^2p^3}{\sqrt{3Cp - a^2p^4}}\,dp.$

Équations ne renfermant que deux dérivées consécutives (**429**) :

4. $a\frac{d^2y}{dx^2} \pm \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}} = 0.$ *R.* $(x - C)^2 + (y - C_1)^2 = a^2.$

5. $a\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) = 0.$ *R.* $x - C = x\,l.\sin\frac{y - C_1}{a}.$

6. $\frac{d^4y}{dx^4} = \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^{\frac{1}{2}}.$ *R.* $y = \frac{a(x - C)^5}{3 \cdot 4^2 \cdot 5} + C_1x^2 + C_2x + C_2.$

Équations de la forme $y'' = f(y)$ (**431**).

7. $y^3\frac{d^2y}{dx^2} = a^2.$ *R.* $C(x - C_1)^2 = Cy^2 - a^2.$

8. $\frac{d^2y}{dx^2} = (ay)^{-\frac{1}{2}}.$ *R.* $36(x - C_1)^2 = \sqrt{a}\,(C + 4\sqrt{y})(4y - 4C\sqrt{y} + C_2).$

Équations homogènes (**433, 434**) :

9. $ax^3\frac{d^2y}{dx^2} - \left(y - x\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0.$ *R.* $y = ax\,l.\left(\frac{ax}{C_1 + Cx}\right).$

10. $y\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy^2}{dx^2} = 1.$ *R.* $y^2 = x^2 + 2C_1x + C_2.$

11. $y\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy^2}{dx^2} - \frac{y}{x}\frac{dy}{dx} = 0.$ *R.* $y = C_1e^{Cx}.$

12. $y\frac{d^2y}{dx^2} + ax^m\frac{dy}{dx} = 0.$ *R.* $l.y = C_1 + (m + 1)\int\frac{dx}{x(m + 1 + ax^m) + C}.$

Intégration par les séries (**435**) :

13. $\frac{dy}{dx}+ay+bx^3=0.$

R. $y=A\left(1-ax+\frac{a^2x^2}{1.2}-\frac{a^3x^3}{1.2.3}+\cdots\right)-b\left(\frac{x^4}{4}-\frac{ax^5}{4.5}+\frac{a^2x^6}{4.5.6}-\cdots\right).$

[Comparer avec l'intégrale sous forme finie déduite de la méthode pour l'équation linéaire (**408**)].

14. $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{y}{x}=0.$ *R.* $y=A\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2^2.3}-\frac{x^4}{2^2.3^2.4}+\cdots\right).$

Ce n'est qu'une intégrale particulière.

15. $\frac{d^2y}{d\omega^2}+ax^ny=0.$

R.
$$y=A\left[1-\frac{ax^{n+2}}{(n+1)(n+2)}+\frac{a^2x^{2n+4}}{1.2(n+1)(2n+3)(n+2)^2}\right.$$
$$\left.-\frac{a^3x^{3n+6}}{1.2.3(n+1)(2n+3)(3n+5)(n+2)^3}+\cdots\right]+A_1x\left[1-\frac{ax^{n+2}}{(n+3)(n+2)}\right.$$
$$\left.+\frac{a^2x^{2n+4}}{1.2(n+3)(2n+5)(n+2)^2}-\frac{a^3x^{3n+6}}{1.2.3(n+3)(2n+5)(3n+7)(n+2)^3}+\cdots\right].$$

CHAPITRE XLIV.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES SIMULTANÉES.

437. Soient $x, y, z, \ldots, u$, n fonctions d'une même variable indépendante t, que nous supposons définies par un système de n équations différentielles du premier ordre, de la forme

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt}&=f_1(x, y, z, \ldots u, t),\\ \frac{dy}{dt}&=f_2(x, y, z, \ldots u, t),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{du}{dt}&=f_n(x, y, z, \ldots u, t).\end{aligned}\right.$$

On appelle *intégrales générales* de ce système d'équations, tout système de valeurs de $x, y, z, \ldots u$ qui vérifie les équations (1) quel que soit t,

et qui renferme n constantes arbitraires permettant d'attribuer à x, y, z, ... u, pour une valeur donnée t_0 de t, des valeurs données arbitrairement x_0, y_0, ... u_0. Les intégrales qui s'en déduisent en donnant aux n constantes des valeurs particulières se nomment des ***intégrales particulières.***

Il sera démontré plus loin que, si les fonctions f_1, f_2, ... f_n satisfont, dans une région donnée des variables, à des conditions que nous préciserons, les équations (1) admettront toujours un système d'intégrales générales, et que toutes les intégrales rentreront dans ce système comme intégrales particulières. Mais si ces conditions cessent d'être vérifiées dans une région donnée, les équations (1) peuvent admettre des intégrales ne rentrant pas dans les intégrales générales, ou des ***solutions singulières.***

La méthode servant à établir l'existence de ces fonctions x, y, z, ... u, qui vérifient le système (1), permet aussi d'en calculer les valeurs avec autant d'approximation qu'on le veut, pour une valeur donnée de la variable t.

438. L'intégration du système d'équations (1) se ramène aussi à celle d'une équation différentielle d'ordre n de la manière suivante :

Différentions complètement par rapport à t les deux membres de la première équation, ce qui donnera

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{du}{dt},$$

et substituons dans le second membre, aux dérivées y', z', ... u', leurs valeurs fournies par le système (1). Ce second membre deviendra ainsi une fonction explicite de x, y, z, ... u, t, et de x', soit

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi_1\left(x, \frac{dx}{dt}, y, z, \dots u, t\right). \tag{2}$$

Prenant encore les dérivées par rapport à t et remplaçant y', z', ... u' par leurs valeurs (1), on aura

$$\frac{d^3x}{dt^3} = \varphi_2\left(x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, y, z, \dots u, t\right), \tag{3}$$

et ainsi de suite, jusqu'à l'ordre n, ou à l'équation

$$\frac{d^nx}{dt^n} = \varphi_n\left(x, \frac{dx}{dt}, \dots \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}, y, z, \dots u, t\right).$$

Les $n - 1$ équations ainsi obtenues et la première équation (1) forment un système de n équations entre lesquelles nous supposons que l'on sache éliminer les $n - 1$ inconnues $y, z, \ldots u$, dont les dérivées n'y figurent pas, et le résultat sera une équation de la forme

$$\frac{d^n x}{dt^n} = \varphi_n\left(x, \frac{dx}{dt}, \ldots \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}, t\right), \tag{4}$$

c'est-à-dire une équation d'ordre n entre la fonction x et la variable t. Cette équation servira à déterminer la fonction x par les méthodes exposées ci-dessus; admettons qu'on en obtienne l'intégrale générale avec n constantes arbitraires $C_1, C_2, \ldots C_n$. Substituant les valeurs de x et de ses $n - 1$ premières dérivées dans les équations

$$\frac{dx}{dt} = f_1, \frac{d^2x}{dt^2} = \varphi_1, \frac{d^3x}{dt^3} = \varphi_2, \cdot \cdot \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} = \varphi_{n-2}$$

qui ont servi à l'élimination, on aura $n - 1$ équations qui donneront, sans intégration nouvelle, les valeurs de $y, z, \ldots u$ en fonction de t et des mêmes constantes arbitraires.

439. Lorsque le système (1) sera composé d'équations linéaires par rapport aux fonctions $x, y, z, \ldots u$, les équations qu'on en déduira par des différentiations successives seront encore linéaires par rapport à ces variables et à leurs dérivées relatives à t; l'élimination des dérivées de $y, z, \ldots u$ à chaque opération, ayant lieu au moyen des équations linéaires (1), n'altèrera pas ce caractère, et l'équation finale (4) jouira encore de la propriété d'être une équation linéaire de l'ordre n. Si, de plus, dans les équations (1), les coefficients de x, y, $z, \ldots u$ sont constants, l'équation (4) sera aussi à coefficients constants, et l'on pourra appliquer les méthodes du Ch. XLII, § 3. Considérons, par exemple, le système

$$\frac{dx}{dt} + 2x + y = 7t - 9e^t,$$

$$\frac{dy}{dt} + 4x + 5y = 4e^t - 3t.$$

Dérivant la première et remplaçant $dy : dt$ par sa valeur tirée de la seconde, on trouve

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} - 4x - 5y = 7 + 3t - 13e^t.$$

Eliminant y entre cette équation et la première, on a

$$(\alpha) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + 7\frac{dx}{dt} + 6x = 7 + 38t - 58e^t.$$

On intègre d'abord l'équation sans second membre ; l'équation auxiliaire $r^2 + 7r + 6 = 0$ donne les racines réelles $r_1 = -1$, $r_2 = -6$, d'où l'intégrale générale

$$x = C_1e^{-x} + C_2e^{-6x}.$$

Pour trouver une intégrale particulière de l'équation (α), nous poserons $x = \alpha + \beta t + \gamma e^t$, et en substituant, égalant respectivement les termes constants, les coefficients de t et de e^t dans les deux membres, nous trouverons

$$\alpha = +\frac{56}{9}, \beta = \frac{19}{3}, \gamma = -\frac{29}{7},$$

donc, d'après un théorème connu, l'intégrale générale de l'équation (α) sera

$$x = C_1e^{-t} + C_2e^{-6t} - \frac{56}{9} + \frac{19}{3}t - \frac{29}{7}e^t.$$

Substituant cette valeur de x et celle de sa dérivée dans la première des équations données, on obtiendra la valeur de y,

$$y = -C_1e^{-t} + 4C_2e^{-t} + \frac{55}{9} - \frac{17}{3}t + \frac{22}{7}e^t.$$

Si l'équation auxiliaire admettait des racines imaginaires ou des racines égales, on suivrait la marche tracée au chapitre XLII.

440. Lorsqu'on cherche de cette manière à intégrer un système d'équations tel que le système (1), on est généralement conduit, comme nous l'avons vu, à une équation différentielle de l'ordre n entre deux variables x et t ; mais il peut arriver exceptionnellement qu'elle soit d'ordre inférieur à n. Si, par exemple, $n - 2$ différentiations successives sur l'équation

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, y, z, \ldots u, t)$$

suffisaient pour éliminer toutes les fonctions inconnues, sauf x, l'équation finale serait de l'ordre $n - 1$, et son intégrale ne renfermerait que $n - 1$ constantes arbitraires. Néanmoins, les intégrales générales du

système devront en renfermer n, car il faut remarquer que, n'ayant plus actuellement que $n - 2$ équations pour en tirer les valeurs des $n - 1$ variables $y, z, \ldots u$, en fonction de t et des $n - 1$ constantes, il sera nécessaire d'intégrer encore une équation du premier ordre, ce qui introduira une $n^{ième}$ constante arbitraire. Ainsi, le système

$$\frac{dx}{dt} = y + z, \quad \frac{dy}{dt} = z + x, \quad \frac{dz}{dt} = y - x$$

donne immédiatement

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} = z + y = \frac{dx}{dt},$$

équation du second ordre en x dont l'intégrale générale est

$$x = C_1 + C_2 e^t, \quad \text{d'où} \quad \frac{dx}{dt} = C_2 e^t.$$

Combinant la première et la deuxième des équations données, on aura

$$C_2 e^t = y + z, \frac{dy}{dt} = x + C_2 e^t - y = C_1 + 2C_2 e^t - y,$$

et en intégrant cette équation du premier ordre en y,

$$y = C_1 + C_2 e^t + C_3 e^{-t}, \quad z = -C_1 - C_3 e^{-t}.$$

441. Il existe, pour l'intégration du système (1) quand les équations sont linéaires et à coefficients variables, une méthode qui s'applique toujours aux équations à coefficients constants. Prenons un système de deux équations

$$(5) \qquad \frac{dx}{dt} + P_1 x + Q_1 y = T_1, \quad \frac{dy}{dt} + P_2 x + Q_2 y = T_2,$$

$P_1, P_2, Q_1, Q_2, T_1, T_2$ étant des fonctions explicites de t seul. Multiplions la seconde par un facteur indéterminé λ, et ajoutons-les; il viendra

$$\frac{dx}{dt} + \lambda \frac{dy}{dt} + (P_1 + \lambda P_2) x + (Q_1 + \lambda Q_2) y = T_1 + \lambda T_2,$$

et si nous posons

$$V = x + \lambda y, \quad -\frac{d\lambda}{dt} + Q_1 + \lambda Q_2 = \lambda (P_1 + \lambda P_2),$$

cette équation prendra la forme

$$(6) \qquad \frac{dV}{dt} + (P_1 + \lambda P_2) V = T_1 + \lambda T_2.$$

Cette équation sera linéaire du premier ordre en V et son intégrale générale sera

$$(7)\quad V = x + \lambda y = e^{-\int (P_1+\lambda P_2)dt}\left[C + \int (T_1 + \lambda T_2) e^{\int (P_1+\lambda P_2)dt} dt\right],$$

si l'on parvient à déterminer λ en fonction de t par l'équation posée ci-dessus,

$$(8)\qquad \frac{d\lambda}{dt} + P_2\lambda^2 + (P_1 - Q_2)\lambda - Q_1 = 0.$$

On ne sait pas intégrer en général l'équation (8), mais il est des cas particuliers où l'on en tire parti : 1° Si P_1, P_2, Q_1, Q_2 sont des constantes comme au n° **439**, on posera

$$\frac{d\lambda}{dt} = 0,\quad P_2\lambda^2 + (P_1 - Q_2)\lambda - Q_1 = 0;$$

λ sera une constante déterminée par la seconde équation; elle admettra deux valeurs λ_1 et λ_2 que nous supposerons réelles et inégales, et qui, mises successivement dans l'équation (7) avec des valeurs correspondantes C_1 et C_2 de la constante arbitraire C, nous donneront deux équations du premier degré pour déterminer x et y.

2° Posons séparément, dans l'équation (8),

$$\frac{d\lambda}{dt} + (P_1 - Q_2)\lambda = 0,\quad P_2\lambda^2 - Q_1 = 0;$$

si les valeurs de λ tirées de ces équations s'accordent, elles vérifieront l'équation (8) et l'intégrale (7) subsistera. On en déduit respectivement, α étant une constante arbitraire,

$$\lambda = \alpha e^{\int (Q_2 - P_1)dt},\quad \lambda^2 = \frac{Q_1}{P_2},$$

ce qui donne la condition

$$\frac{Q_1}{P_2} = \alpha^2 e^{2\int (Q_2 - P_1)dt}.$$

Si donc, en déterminant convenablement la constante α, les fonctions P_1, Q_1, ... vérifient cette équation, on pourra poser dans l'équation (7) successivement

$$\lambda = \sqrt{\frac{Q_1}{P_2}},\quad \lambda = -\sqrt{\frac{Q_1}{P_2}},$$

et l'on aura deux équations pour x et y comme ci-dessus.

3° On pourrait de même déterminer λ par les égalités

$$\frac{d\lambda}{dt} - Q_1 = 0, \quad P_2\lambda + (P_1 - Q_2) = 0$$

si les coefficients de l'équation satisfaisaient à une relation de la forme

$$\frac{Q_2 - P_1}{P_2} = \int Q_1 dt + \alpha,$$

mais on n'aurait ainsi qu'une intégrale.

442. Lorsque le système (1) n'est pas linéaire, il est rare que la méthode du n° **438** conduise à une équation finale intégrable; mais l'introduction d'une variable auxiliaire permet quelquefois de rendre linéaire un système qui ne l'est pas. Ainsi le système.

$$\frac{dx}{ax + by + cz + d} = \frac{dy}{a'x + b'y + c'z + d'} = \frac{dz}{a''x + b''y + c''z + d''},$$

dans lequel a, b, ... sont des constantes, devient linéaire en égalant ces rapports à la différentielle dt d'une variable auxiliaire.

On a ainsi le système linéaire, à coefficients constants,

$$\frac{dx}{dt} = ax + by + cz + l, \quad \frac{dy}{dt} = a'x + \cdots, \quad \frac{dz}{dt} = a''x + \cdots$$

que l'on intègrera facilement, après quoi l'élimination de t conduira à deux équations entre x, y, et z.

La forme particulière des équations à traiter suggère d'autres artifices élégants, mais pour lesquels on ne peut tracer de règle générale.

443. *Équations simultanées d'ordre quelconque.* — Un système d'équations différentielles d'ordre quelconque se ramène à un système d'équations du premier ordre. Concevons, pour fixer les idées, que l'on ait désigné par x', x'', ..., y', y'', les dérivées successives de x et de y par rapport à t, et que l'on ait deux équations de la forme

$$(5) \qquad x'' = f_1(x, y, x', y', y'', t), \quad y''' = f_2(x, y, x', y', y'', t),$$

c'est-à-dire dans lesquelles la dérivée seconde de x et la dérivée troisième de y soient exprimées en fonction des dérivées d'ordre inférieur. On peut remarquer que ce système est réductible au système d'équations

du premier ordre entre t et cinq fonctions x, x', y, y', y'',

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dy}{dt} = y', \quad \frac{dy'}{dt} = y'', \quad \frac{dx'}{dt} = f_1(x, y, x', y', y'', t),$$

$$\frac{dy''}{dt} = f_2(x, y, x', y', y'', t).$$

Ce système, analogue au système (1), admettra des intégrales générales renfermant cinq constantes arbitraires.

Si l'on avait un système de *trois* équations du second ordre, de la forme

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f_1(x, y, z, t), \quad \frac{d^2y}{dt^2} = f_2(x, y, z, t), \quad \frac{d^2z}{dt^2} = f_3(x, y, z, t),$$

on le réduirait au système de *six* équations du premier ordre,

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dy}{dt} = y', \quad \frac{dz}{dt} = z',$$

$$\frac{dx'}{dt} = f_1(x, y, z, t), \quad \frac{dy'}{dt} = f_2(x, y, z, t), \quad \frac{dz'}{dt} = f_3(x, y, z, t).$$

L'intégration de ce système et l'élimination des variables auxiliaires x', y', z' conduira entre x, y, z et t, à un système d'intégrales comprenant *six* constantes arbitraires.

En général, si le nombre des fonctions inconnues $x, y, z \ldots$ est k, si les ordres des dérivées les plus élevées sont respectivement l pour x, m pour y, n pour z, ..., si enfin les équations données sont supposées résolues par rapport à ces dérivées de l'ordre le plus élevé, elles seront réductibles à un système de $l + m + n + \cdots$ équations du premier ordre, et l'on voit par là que le système de leurs intégrales générales renfermera $l + m + n + \cdots$ constantes arbitraires.

444. La méthode indiquée au nº **438**, pour ramener à l'intégration d'une équation différentielle entre deux variables l'intégration d'un système d'équation du premier ordre, s'applique également à un système d'équations d'ordre plus élevé. En différentiant l'une de ces équations un nombre suffisant de fois et se servant des équations ainsi formées et des équations données pour éliminer les fonctions $y, z, \ldots u$ et leurs dérivées successives par rapport à t, on arrivera à une équation finale entre x et t, dont l'ordre sera, dans le cas général posé plus haut, $l + m + n + \cdots$. L'intégration de cette équation donnera x avec $l + m + n + \cdots$ constantes, et le système qui a servi à l'élimination

fera connaître les autres fonctions inconnues sans nouvelle intégration. Soient, comme exemple, les équations linéaires à coefficients constants

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 3x - 4y + 3 = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + x + y + 5 = 0.$$

Dérivant la première deux fois de suite par rapport à t, remplaçant $d^2y : dx^2$ par sa valeur tirée de la seconde on trouve

$$\frac{d^4x}{dt^4} - 3\,\frac{d^2x}{dt^2} + 4x + 4y + 20 = 0,$$

et par l'élimination de y entre cette équation et la première,

$$\frac{d^4x}{dt^4} - 2\,\frac{d^2x}{dt^2} + x + 23 = 0.$$

L'intégration de cette équation par la méthode connue conduit à

$$x = (C_1 + C_2t)\,e^t + (C_3 + C_4t)\,e^{-t} - 23,$$

et la substitution de cette valeur dans la première équation donnée, à

$$2y = (C_2 - C_1 - C_2t)\,e^t - (C_3 + C_4 + C_4t)\,e^{-t} - 36.$$

On peut aussi, après avoir ramené les deux équations données à un système d'équations du premier ordre, appliquer la méthode proposée au nº **441**.

445. Dans toute cette théorie, on a supposé les équations différentielles résolues par rapport aux plus hautes dérivées des diverses fonctions x, y, ... u respectivement, et les conséquences obtenues ne s'appliquent exactement qu'à cette hypothèse. Si elle n'était pas réalisée dans le système proposé, il faudrait commencer par opérer la résolution par rapport à ces dérivées, après quoi on appliquerait les méthodes ci-dessus. Mais il faut remarquer 1° que cette résolution peut conduire, pour ces dérivées, à des expressions de forme multiple, auquel cas on aura plusieurs systèmes d'équations différentielles à étudier séparément; 2° que cette résolution ne sera pas toujours possible, soit parce que les équations données sont incompatibles, auquel cas le problème est impossible, soit parce que l'élimination de certaines dérivées pourrait en faire disparaître d'autres en même temps. Si l'on arrivait ainsi à une ou plusieurs équations ne renfermant plus aucune dérivée, mais seulement les variables $x, y, z, \ldots u, t$, on devrait considérer le système donné comme un système mixte d'équations différentielles et d'équations ordinaires, et le nombre des constantes arbitraires des intégrales géné-

rales ne serait plus égal à celui que nous avons trouvé dans l'hypothèse normale.

Exercices.

1. $\frac{dx}{dt} + 5x + y = 7e^t - 27, \quad \frac{dy}{dt} - 2x + 3y = 12 - 3e^t.$

R.
$$x = -\frac{93}{17} - \frac{31}{26}e^t + e^{-4t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t),$$
$$y = \frac{6}{17} - \frac{2}{13}e^t - e^{-4t}[(C_1 + C_2)\cos t - (C_1 - C_2)\sin t].$$

2. $\frac{dx}{dt} + 5x + y = 7e^t - 9e^{2t}, \quad \frac{dy}{dt} - x + 3y = 4e^{2t} - 3e^t.$

R.
$$x = (C_1 + C_2 t)e^{-4t} + \frac{31}{25}e^t - \frac{49}{36}e^{2t}.$$
$$y = -(C_1 + C_2 + C_2 t)e^{-4t} - \frac{11}{25}t + \frac{19}{36}e^{2t}.$$

3. $\frac{dx}{\alpha(y+z)} = \frac{dy}{\beta(z+x)} = \frac{dz}{\gamma(x+y)}.$

R. Égalant ces rapports à dt, on trouve
$$x_1 = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} + C_3 e^{r_3 t},$$
r_1, r_2, r_3 étant les racines de l'équation $r^3 - (\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta)r - 2\alpha\beta\gamma = 0$. On trouve ensuite
$$\alpha(y+z) = C_1 r_1 e^{r_1 t} + C_2 r_2 e^{r_2 t} + C_3 r_3 e^{r_3 t}$$
$$\alpha(\beta z + \gamma y) - \alpha(\beta + \gamma)x = C_1 r_1^2 e^{r_1 t} + C_2 r_2^2 e^{r_2 t} + C_3 r_3^2 e^{r_3 t}.$$
L'élimination de t entre ces trois équations conduit aux intégrales du problème.

4. $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{u} = \frac{du}{x}.$

R.
$$(x+z)^2 - (y+u)^2 = C_1, \quad (x-z)^2 + (y-u)^2 = C_2,$$
$$\text{l.}\,(x+y+z+u) = C_3 + \text{arc tg}\,\frac{x-z}{y-u}.$$

5. $\frac{dx}{dt} = \frac{y}{(y-x)^2}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{x}{(y-x)^2}.$

R. On trouve les intégrales
$$y^2 - x^2 = C_1, \quad (y-x)^3 = 2(C_2 - t),$$
d'où l'on tirera facilement x et y en fonctions de t.

6. $\frac{dx}{dt} = u + dy, \quad \frac{du}{dt} = -g\sin\omega + nv,$

$\frac{dy}{dt} = v - nx, \quad \frac{dv}{dt} = -nu,$

$\frac{dz}{dt} = w, \quad \frac{dw}{dt} = -g\cos\omega,$

n, g, ω, sont des constantes données (Bour.).

R On trouve, en désignant par A, B, α, β, C_1, C_2 des constantes arbitraires,

$$x = B\sin(nt+\beta) + At\sin(nt+\alpha) + \frac{g\sin\omega}{n^2}, \quad u = A\sin(nt+\alpha),$$

$$y = B\cos(nt+\beta) + At\cos(nt+\alpha), \quad v = A\cos(nt+\alpha) + \frac{g\sin\omega}{n},$$

$$z = -\frac{gt^2}{2}\cos\omega + C_1t + C_2, \quad w = -gt\cos\omega + C_1.$$

7. $\frac{dx}{dt} + x\varphi'(t) - y\psi'(t) = 0, \quad \frac{dy}{dt} + x\psi'(t) + y\varphi'(t) = 0.$

R. On emploie la méthode du n° **441**, en posant $x + \lambda y = V$ et déterminant λ par la condition $\lambda^2 = -1$. On trouve ainsi, $A + Bi$ étant une constante arbitraire,

$$x + yi = (A + Bi)\, e^{-\varphi(t) - i\psi(t)},$$

d'où

$$x = e^{-\varphi(t)}[A\cos\psi(t) + B\sin\psi(t)],$$
$$y = e^{-\varphi(t)}[-A\sin\psi(t) + B\cos\psi(t)].$$

8. $\frac{dx}{dt} + tx + t^2y = 0, \quad \frac{dy}{dt} + a^2t^2x + ty = 0.$

R. Cas particulier du n° **441**, 2°. On a $\lambda^2 = 1 : a^2$. On trouve

$$y \pm ax = Ce^{-\frac{t^2}{2} \pm \frac{a}{3}t^3}.$$

9. $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 2y = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - 2x = 0$

R. $$x = C_1e^{-2t} + C_2e^t + C_3e^{\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{t}{2}\sqrt{7}\right) + C_4e^{\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{t}{2}\sqrt{7}\right).$$

La première équation donnera ensuite y.

10. $\frac{d^2x}{dt} + m^2x = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} - m^2x = 0.$

$$x = C_1\cos mt + C_2\sin mt, \quad y = C_3 + C_4t - C_1\cos mt - C_2\sin mt.$$

11. $\frac{d^2x}{dt^2} + 5x + y = \cos 2t, \quad \frac{d^2y}{dt^2} - x + 3y = 0.$

R. On trouve l'équation finale en x

$$\frac{d^4x}{dt^4} + 8\frac{d^2x}{dt^2} + 16x = -\cos 2t,$$

qui admet une intégrale particulière $x = \frac{t^2}{32}\cos 2t$. On a donc

$$x = (C_1 + C_2t)\cos 2t + (C_3 + C_4t)\sin 2t + \frac{t^2}{32}\cos 2t,$$

$$y = -\left[\frac{15}{16} + 9C_1 - 4C_4 + 9C_2t + \frac{32}{t^2}\right]\cos 2t + \left[4C_2 - 9C_3 - \left(9C_4 + \frac{1}{4}\right)t\right]\sin 2t.$$

12. $\frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}+\frac{dz}{dt}=t,\quad t\frac{dx}{dt}-t\frac{dy}{dt}+x\frac{dz}{dt}=y,\quad y\frac{dx}{dt}-y\frac{dy}{dt}-t\frac{dz}{dt}=0.$

R. L'élimination des dérivées de x et de y conduit à l'équation

$$x^2+y^2-txy-tx+ty-t^2=0,$$

qui permet d'éliminer y et sa dérivée et d'avoir deux équations du premier ordre entre x, z, t.

CHAPITRE XLV.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

446. Lorsqu'une courbe est définie par une relation qui a lieu en chacun de ses points entre certains éléments géométriques, comme la sous-tangente, le rayon de courbure, la longueur de l'arc, etc..., cette relation s'exprime par une équation entre les coordonnées de la courbe et les dérivées de l'une d'elles par rapport à l'autre, et si l'on sait intégrer cette équation différentielle, on connaîtra l'équation générale des courbes qui vérifient la condition proposée.

Ainsi, si l'on demande *la courbe telle que la longueur de la normale soit égale à l'abscisse du point où cette normale coupe l'axe des x*, cette propriété se traduit par l'équation différentielle du premier ordre

$$x+y\frac{dy}{dx}=y\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}},$$

ou, en élevant au carré,

$$2xy\frac{dy}{dx}+x^2-y^2=0.$$

Cette équation homogène s'intègre facilement et donne, en posant $u=y:x$,

$$(1+u^2)\,dx+2ux\,du=0,$$

d'où intégrant,

$$\mathrm{l}.x+\mathrm{l}.(1+u^2)=\mathrm{l}.\mathrm{C},\quad x^2+y^2-\mathrm{C}x=0.$$

Cette équation représente un cercle de rayon quelconque, ayant son centre sur l'axe des x et passant par l'origine. La vérification se fait immédiatement.

447. Cherchons *la courbe dont les normales sont coupées en deux parties égales par la parabole* $\eta^2 = a\xi$. Si x, y sont les coordonnées d'un point de cette courbe, on a

$$\xi = x + \frac{1}{2} y \frac{dy}{dx}, \quad \eta = \frac{1}{2} y,$$

et la condition proposée s'exprime par l'équation

$$2ay \frac{dy}{dx} + 4ax = y^2.$$

On pose $y^2 = z$, on a l'équation linéaire

$$\frac{dz}{dx} - \frac{z}{a} = -4x,$$

dont l'intégrale est

$$z = e^{\frac{x}{a}} \left[C - 4 \int e^{-\frac{x}{a}} x dx\right], \quad \text{ou} \quad y^2 = Ce^{\frac{x}{a}} + 4a(x + a).$$

448. On demande *une courbe telle que l'aire* S *entre cette courbe, l'axe des* x, *l'axe des* y *et une ordonnée quelconque soit proportionnelle à l'arc* s *terminé aux mêmes ordonnées*.

On a, d'après cette définition,

$$S = as, \quad dS = ads, \quad y = a\sqrt{1 + y'^2},$$

et l'équation différentielle de la courbe est celle-ci :

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{\frac{y^2}{a^2} - 1}, \quad \text{ou} \quad dx = \pm \frac{ady}{\sqrt{y^2 - a^2}}.$$

On néglige le double signe, qui répond à un simple changement du sens des x positifs, et l'on a

$$x - C = a\,\mathrm{l.}\frac{y + \sqrt{y^2 - a^2}}{a}, \quad \text{d'où} \quad y + \sqrt{y^2 - a^2} = ae^{\frac{x - C}{a}}.$$

On en déduit pour la valeur de y

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x - C}{a}} + e^{-\frac{x - C}{a}}\right).$$

La courbe est une *chaînette* (Ch. XVII, ex. **1**).

449. Un problème célèbre dans ce genre est celui des *trajectoires*. Etant donné un système des courbes (C) dont l'équation renferme un paramètre variable α,

(1) $$F(x, y, \alpha) = 0,$$

il faut trouver une courbe qui coupe sous un angle constant toutes les courbes du système (1).

Soient (x, y) les coordonnées du point M où la trajectoire coupe une des courbes (C), $dy : dx$ le coefficient angulaire de la tangente en M à la trajectoire ; φ et ψ les inclinaisons respectives des tangentes à la courbe (C) et à cette trajectoire sur l'axe des x, m la tangente de l'angle constant d'intersection. On a, les axes étant rectangulaires,

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{dy}{dx}, \quad \operatorname{tg} (\psi - \varphi) = m,$$

d'où l'on tire la relation

$$(2) \qquad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} - m\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dy}{6x}\right) = 0.$$

Cette équation renfermera encore, en général, le paramètre α, mais si l'on élimine α entre les équations (1) et (2), on aura entre x, y et $dy : dx$ une équation qui sera l'équation différentielle de la trajectoire cherchée. L'intégration de cette équation fera connaître les courbes qui répondent à la question, et comme l'intégrale renfermera une constante arbitraire, on voit que ces courbes seront généralement en nombre infini, comme il était facile de le prévoir.

Prenons, pour les courbes (C), les *paraboles*

$$y - \alpha x^a = 0,$$

a étant une constante donnée. L'équation (2) sera

$$-\alpha a x^{a-1} + \frac{dy}{dx} - m\left(1 + \alpha a x^{a-1}\frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

ou, multipliant par xdx et remplaçant αx^a par y,

$$xdy - aydx - m(xdx + aydy) = 0.$$

Cette équation homogène a été intégrée au nº **406**. Dans le cas particulier où $a = 1$, elle se réduit à

$$xdy - ydx - m(xdx + ydy) = 0,$$

et s'intègre en divisant par $x^2 + y^2$. On a pour l'équation des trajectoires

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} - \frac{m}{2} \operatorname{l.} (x^2 + y^2) = C,$$

ou, en introduisant les coordonnées polaires r et θ,

$$r = Ce^{\frac{\theta}{m}}.$$

Les lignes (C) sont ici des droites $y = \alpha x$ passant par l'origine; les trajectoires sont des spirales logarithmiques, ce qui s'accorde avec une propriété connue de cette courbe.

450. Signalons deux cas particuliers du problème des trajectoires : 1° l'angle d'intersection est nul, $m = 0$; la trajectoire devient tangente à toutes les courbes (C). L'équation (2) se réduit à

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0,$$

et l'élimination de α entre cette équation et l'équation (1) ne conduit qu'à l'équation différentielle des courbes (C) (**397**). L'intégrale générale ne donnera donc autre chose que ces courbes elles-mêmes, et s'il existe une courbe tangente à toutes les courbes (1), elle ne pourra être représentée que par la solution singulière de l'équation différentielle. Ceci s'accorde encore avec les propriétés des solutions singulières.

2° L'angle d'intersection est droit, $m = \infty$; l'équation (2) prend la forme

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dy}{dx} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0. \tag{3}$$

Les trajectoires sont *orthogonales*. Ainsi, s'il s'agit des courbes paraboliques $y = \alpha x^a$ considérées plus haut, on trouvera pour l'équation de leurs trajectoires orthogonales

$$\alpha a x^{a-1}\frac{dy}{dx} + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad x dx + a y\, dy = 0,$$

dont l'intégrale est

$$x^2 + ay^2 = C.$$

Les trajectoires sont des coniques ayant l'origine pour centre : ellipses si $a > 0$, hyperboles si $a < 0$. L'hypothèse $a = -1$ donne le système orthogonal

$$xy = \alpha, \quad x^2 - y^2 = C,$$

composé d'hyperboles équilatères ayant les axes coordonnés pour asymptotes et d'hyperboles équilatères dont les asymptotes sont les bissectrices des angles formés par ces mêmes axes.

451. Cherchons encore 1° *Les courbes* (C) *telles que les rayons vecteurs menés d'un point* (x,y) *de la courbe à deux foyers fixes* F *et* F′ *fassent*

avec la droite FF′ *deux angles de somme constante* α; 2° *les trajectoires orthogonales du système de ces courbes.*

L'axe des x étant la droite FF′, l'axe des y la perpendiculaire en son milieu O, FF′ $= 2c$, on a

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x-c}+\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x+c}=\alpha$$

ou

$$\text{(C)}\qquad x^2-y^2-2xy\cot\alpha=c^2$$

pour l'équation des courbes (C); α est le paramètre variable. Les courbes (C) sont des hyperboles équilatères de centre O, passant par les foyers F et F′. L'équation (3) devient

$$(x-y\cot\alpha)\frac{dy}{dx}+y+x\cot\alpha=0,$$

et en éliminant $\cot\alpha$ au moyen de l'équation (C), on a pour l'équation différentielle des trajectoires orthogonales

$$(x^2+y^2+c^2)y\frac{dy}{dx}+(x^2+y^2-c^2)x=0,$$

ou, sous une autre forme,

$$(x^2+y^2+c^2)(ydy+xdx)-2c^2x\,dx=0.$$

Le premier membre est une différentielle exacte. L'intégrale générale est

$$\text{(B)}\qquad (x^2+y^2+c^2)^2-4c^2x^2=\beta,$$

β étant la constante arbitraire. Les courbes (B) sont des *cassinoïdes* : le produit des distances d'un point quelconque de la courbe aux foyers F et F′ est constant, comme on le voit en écrivant l'équation (B) sous la forme

$$[y^2+(x+c)^2]\,[y^2+(x-c)^2]=\beta.$$

Les hyperboles (C) et les cassinoïdes (B) forment donc un système orthogonal (1).

452. Si les courbes (C) dont on cherche les trajectoires orthogonales sont définies au moyen de leur équation différentielle $f(x, y, y')=0$,

---

(1) Lamé a discuté en détail ce système orthogonal (*Leçons sur les coordonnées curvilignes*, 13me leçon).

on obtient immédiatement celle de leurs trajectoires orthogonales en observant que l'on a

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{y'}, \quad \text{d'où} \quad f\left(x, y, -\frac{dx}{dy}\right) = 0$$

est l'équation cherchée. On retrouve facilement l'équation (3).

Ainsi, les coniques *homofocales*

$$(\alpha) \qquad \frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} = 1,$$

a^2, b^2 étant donnés, λ le paramètre variable, nous donnent

$$\frac{x}{a^2+\lambda} + \frac{yy'}{b^2+\lambda} = 0, \qquad \frac{x}{a^2+\lambda} = -\frac{yy'}{b^2+\lambda} = \frac{x+yy'}{a^2-b^2}.$$

Remplaçant $a^2+\lambda$, $b^2+\lambda$ par leurs valeurs tirées de ces dernières équations dans l'équation des coniques, on trouve pour l'équation différentielle de celles-ci (Ch. XXXIX, ex. **4**)

$$(\beta) \qquad y'^2 + \frac{x^2-y^2-a^2+b^2}{xy}y' - 1 = 0,$$

et en remplaçant y' par $-dx : dy$, on a l'équation différentielle des trajectoires

$$\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{x^2-y^2-a^2+b^2}{xy} - 1 = 0,$$

c'est-à-dire une équation identique à (β). Ceci nous montre que le système de coniques (α) renferme ses propres trajectoires orthogonales, et en effet l'équation (β) donne pour y' deux valeurs dont le produit est égal à -1 ; ainsi, par chaque point du plan passent deux coniques homofocales qui se coupent à angle droit. Les coniques sont des ellipses pour $a^2 > \lambda > -b^2$, des hyperboles pour $\lambda < -b^2$.

453. La courbe dont la recherche a conduit à une équation différentielle n'est pas toujours donnée par l'intégrale générale : elle peut être fournie par la solution singulière. C'est le cas lorsque la courbe est définie par une propriété des tangentes, et que chaque tangente, prise isolément, est une ligne qui satisfait à la condition donnée. Ainsi, si l'on cherche *la courbe telle que le produit des segments compris, sur deux axes rectangulaires, entre l'origine* O *et une tangente à la courbe, soit*

égal à un carré k^2, on est conduit à l'équation

$$\left(y - x\frac{dy}{dx}\right)\left(x - y\frac{dx}{dy}\right) = k^2, \quad \text{ou} \quad \left(y - x\frac{dy}{dx}\right)^2 = -k^2\frac{dy}{dx}.$$

Mais, sous la forme

$$y = px \pm k\sqrt{-p},$$

elle constitue une équation de Clairaut (**415**) dont l'intégrale générale

$$y = Cx \pm k\sqrt{-C}$$

représente simplement l'une quelconque des tangentes à la courbe, et dont la solution singulière résulte de l'élimination de p entre l'équation différentielle et celle-ci :

$$x \pm \frac{k}{2\sqrt{-p}} = 0.$$

Cette élimination facile conduit à l'équation

$$4xy = k^2;$$

c'est la solution singulière, représentant une hyperbole dont les asymptotes coïncident avec les axes coordonnés. Telle est la vraie solution du problème.

454. D'autres problèmes conduisent à des équations différentielles d'ordre plus élevé. Cherchons *la courbe dans laquelle le rayon de courbure et la normale sont dans un rapport constant,*

$$aR = N.$$

Remplaçant R et M par leurs valeurs connues, on a

$$(\gamma) \qquad 1 + \frac{dy^2}{dx^2} = \pm\frac{y}{a}\frac{d^2y}{dx^2},$$

le signe supérieur se rapportant au cas où la courbe tourne sa concavité vers les y positifs, et où R et N, par conséquent, sont dirigés en sens contraire l'un de l'autre si $y > 0$. L'équation (γ) rentre dans celles du n° **422**. Posant $dy : dx = p$, on a successivement

$$1 + p^2 = \pm\frac{y}{a}\frac{pdp}{dy}, \quad \pm\frac{2ady}{y} = \frac{2pdp}{1+p^2},$$

d'où, en intégrant,

$$\text{l.}(1 + p^2) = \pm 2a\,\text{l.}y = \text{l.}C, \quad 1 + p^2 = Cy^{\pm 2a},$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{Cy^{\pm 2a} - 1}, \quad dx = \pm\frac{dy}{\sqrt{Cy^{\pm 2a} - 1}}.$$

L'équation des courbes qui satisfont au problème est donc

$$x = C_1 \pm \int \frac{dy}{\sqrt{Cy^{\pm 2a} - 1}}.$$

Cas particuliers : 1° $a = 1$; si l'on prend le signe inférieur dans l'équation (γ), le rayon de courbure et la normale sont égaux et de même sens. On a

$$x - C_1 = \pm \int \frac{ydy}{\sqrt{C - y^2}} = \mp \sqrt{C - y^2},$$

$$(x - C_1)^2 + y^2 = C.$$

La courbe est un cercle dont le centre est sur l'axe des x. Prenons le signe supérieur, le rayon R et la normale sont égaux et de sens contraires. On a, en faisant $C = 1 : \alpha^2$,

$$x - C_1 = \pm \int \frac{\alpha dy}{\sqrt{y^2 - \alpha^2}} = \pm \alpha \,\mathrm{l}.\frac{y + \sqrt{y^2 - \alpha^2}}{\alpha}.$$

On en tire la valeur de y,

$$y = \frac{\alpha}{2}\left(e^{\frac{x - C_1}{\alpha}} + e^{-\frac{x - C_1}{\alpha}}\right),$$

la courbe est une chaînette.

2° L'hypothèse $a = 1 : 2$ ou $R = 2N$ conduirait, de même, suivant qu'on prendrait le signe supérieur ou inférieur dans l'équation (α), à

$$y = \frac{1}{C} + \frac{C}{4}(x - C_1)^2 \quad \text{ou} \quad x - C_1 = \pm \int \frac{ydy}{\sqrt{Cy - y^2}},$$

dont la première représente une parabole à axe parallèle à l'axe des y, la seconde une cycloïde ayant pour base l'axe des x ; C est le diamètre du cercle générateur.

455. On tombe encore sur une équation du second ordre lorsqu'on veut tirer l'équation d'une courbe en coordonnées rectangulaires d'une relation donnée

$$s = f(\varphi) \tag{4}$$

entre la longueur de l'arc s et l'inclinaison φ de la tangente sur l'axe des x. Cette relation différentiée donne

$$ds = f'_1(\varphi)\, d\varphi, \quad \text{ou} \quad \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}} = f'\left(\text{arc tg}\,\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx_2},$$

en vertu des valeurs de ds et de $d\varphi$. Mais il vaut mieux ramener directement le problème aux quadratures en prenant φ pour variable indépendante et ayant égard aux relations

$$(5) \qquad \frac{dx}{ds} = \cos\varphi, \quad \frac{dy}{ds} = \sin\varphi,$$

qui donnent, en remplaçant ds par sa valeur et intégrant,

$$x = C + \int f'(\varphi)\cos\varphi\, d\varphi, \quad y = C_1 + \int f'(\varphi)\sin\varphi\, d\varphi.$$

Les constantes C et C_1 peuvent être négligées, car on peut toujours les réduire à zéro par un déplacement de l'origine des axes, et la forme de la courbe n'en dépend pas. L'élimination de φ conduira ensuite à l'équation entre x et y. Ainsi, de la relation $s = a\varphi$, on déduirait

$$x = a\sin\varphi, \quad y = -a\cos\varphi,$$

et par l'élimination de φ

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

équation d'un cercle de rayon a, mais dont le centre est arbitraire.

Le problème de trouver une courbe définie par une équation $R = F(\varphi)$ entre le rayon de courbure et l'inclinaison de la tangente se ramène au précédent par la relation connue $ds = \pm R d\varphi$. On aura donc ici

$$x = \int F(\varphi)\cos\varphi\, d\varphi, \quad y = \int F(\varphi)\sin\varphi\, d\varphi$$

en faisant abstraction du double signe qui s'élimine par un renversement dans le sens des axes positifs.

Par exemple, l'équation $R = a\varphi$ conduit à

$$x = a(\varphi\sin\varphi + \cos\varphi), \quad y = a(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi),$$

d'où

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = a, \quad x\sin\varphi - y\cos\varphi = a\varphi,$$

d'où, élevant au carré et ajoutant,

$$x^2 + y^2 = a^2(1 + \varphi).$$

Eliminant φ, on a enfin

$$x\cos\frac{\sqrt{x^2+y^2-a^2}}{a} + y\sin\frac{\sqrt{x^2+y^2-a^2}}{a} = a,$$

équation d'une développante de cercle.

456. Enfin, la recherche d'une courbe dont la développée est donnée

par une relation $\sigma = f(\theta)$ entre l'arc σ et l'inclinaison θ de la tangente, se ramène encore aux mêmes formules (5). Soient (x, y) les coordonnées d'un point M de la courbe cherchée, R son rayon de courbure, φ l'inclinaison de sa tangente sur l'axe des x. On sait (**210**) que l'on a

$$R = \sigma + C = f(\theta) + C, \quad \varphi = \theta \pm \frac{\pi}{2}, \quad ds = [f(\theta) + C]\, d\theta$$

donc, en vertu des équations (5),

$$x = \pm \int [f(\theta) + C] \sin\theta\, d\theta, \quad y = \pm \int [f(\theta) + C] \cos\theta\, d\theta.$$

La constante C reste arbitraire. Si, par exemple, la développée a pour équation

$$\sigma = f(\theta) = a^2 b^2 (a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta)^{-\frac{3}{2}},$$

on trouvera en vertu des formules qui précèdent

$$x = \pm C\cos\theta \pm \frac{a^2 \cos\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}}, \quad y = \pm C\sin\theta \pm \frac{b^2 \sin\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}},$$

et, en combinant ces deux égalités,

$$\frac{(x \mp C\cos\theta)^2}{a^2} + \frac{(y \mp C\sin\theta)^2}{b^2} = 1.$$

Pour $C = 0$ on trouve une ellipse, qui est donc une des développantes de la courbe donnée. En considérant θ comme une variable auxiliaire et C comme une constante arbitraire, les équations ci-dessus représenteront toutes les *courbes parallèles* à cette ellipse, puisqu'elles auront même développée.

457. *Courbe de poursuite.* — On nomme ainsi la courbe décrite par un point M (x, y) qui se dirige dans un plan, avec une vitesse constante, vers un point M' $(x'y')$ qui décrit une courbe donnée avec une vitesse également donnée. Les axes étant rectangulaires, en exprimant que la tangente en M à la courbe de poursuite passe par le point M' et que le rapport des deux vitesses est égal à une constante donnée n, on a les deux équations

$$(\delta) \quad y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x), \qquad (\varepsilon) \quad \sqrt{dx^2 + dy^2} = n\sqrt{dx'^2 + dy'^2}.$$

Entre ces deux équations et celle de la courbe décrite par le point M' il faut éliminer x' et y' ainsi que leurs différentielles.

Prenons un cas simple. Le point M' décrit une parallèle $x' = a$ à l'axe

des y; le point M part de l'origine à l'instant où M' quitte l'axe des x. Les équations (δ) et (ε) se réduisent à

$$y' = y + (a - x)\frac{dx}{dy}, \quad \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = n\frac{dy'}{dx},$$

et en différentiant la première, on a

$$\frac{dy'}{dx} = (a = x)\frac{d^2y}{dx^2}, \quad \text{d'où} \quad \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = n\,(a - x)\frac{d^2y}{dx^2}.$$

On fera (**429**) $dy = pdx$, et l'on aura

$$\frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{dx}{n(a - x)}, \quad \text{l.}\,(p + \sqrt{1 + p^2}) = -\frac{1}{n}\text{l.}\,(a - x) + \text{l.}\,\text{C},$$

d'où

$$p + \sqrt{1 + p^2} = \text{C}\,(a - x)^{-\frac{1}{n}}.$$

A l'instant du départ, $x = 0$ et $p = 0$, car la vitesse du point M est dirigée suivant l'axe des x. On a donc

$$1 = \text{C}a^{-\frac{1}{n}}, \quad \text{ou} \quad \text{C} = a^{\frac{1}{n}},$$

et en résolvant l'équation par rapport à p, on trouve

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{a}{a - x}\right)^{\frac{1}{n}} - \left(\frac{a - x}{a}\right)^{\frac{1}{n}}\right].$$

Une nouvelle intégration donnera, si n est $>$ ou $<$ 1,

$$y = \text{C}_1 + \frac{a - x}{2}\left[\frac{n}{1 - n}\left(\frac{a}{a - x}\right)^{\frac{1}{n}} + \frac{n}{1 + n}\left(\frac{a - x}{a}\right)^{\frac{1}{n}}\right],$$

et comme x et y s'annulent ensemble,

$$\text{C}_1 = -\frac{an}{1 - n}.$$

Si n était égal à 1, c'est-à-dire si les mobiles avaient des vitesses égales, on trouverait

$$y = a\,\text{l.}\left(\frac{a}{a - x}\right) + \frac{(2a - x)\,x}{2a}$$

pour l'équation de la courbe de poursuite.

Exercices.

1. Trouver la courbe dont la sous-tangente est une fonction donnée $f(x)$ de l'abscisse du point de contact

R.
$$y = Ce^{-\int \frac{dx}{f(x)}}.$$

Cas particuliers : $f(x) = x$, $f(x) = x^2$.

2. Les distances de l'origine aux points où la tangente coupe l'axe des y et où la normale coupe l'axe des x sont dans un rapport constant a. Trouver la courbe.

R. L'équation différentielle est $ydx - xdy = a(xdx + ydy)$. On trouve la spirale logarithmique

$$\text{l.}\sqrt{x^2 + y^2} = C - a \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}, \quad \text{ou} \quad r = Ce^{-\frac{\theta}{a}}.$$

3. L'ordonnée à l'origine de la tangente est égale à $kx^m y^n$. Trouver la courbe.

R. On tombe sur une équation de Bernoulli dont l'intégrale est

$$y^{1-n} = Cx^{1-n} - k \frac{1-n}{m+n-1} x^m.$$

Cas particuliers : $m = 0$, $n = 2$; $m = 0$, $n = -1$.

4. Le segment compris sur l'axe des x entre la tangente et la normale a une longueur constante $2a$. Trouver la courbe.

R. Prenant pour variable auxiliaire l'inclinaison φ de la tangente sur l'axe des x, on trouve

$$y = a \sin 2\varphi, \quad x = a(\cos 2\varphi + \text{l.} \sin^2 \varphi).$$

Discuter la courbe au moyen de ces deux équations.

5. L'aire de la courbe entre l'axe des y et l'ordonnée du point M (x, y) a pour expression $ay - bx$, a et b étant des constantes données. Trouver la courbe.

R.
$$y = b\left(e^{\frac{x}{a}} - 1\right).$$

6. Le rayon vecteur r est proportionnel au cube de la distance P du centre à la tangente; trouver la courbe.

R. On a $r = aP^3$, et l'on trouve, en formant l'équation différentielle et l'intégrant,

$$a^{\frac{1}{3}} r^{\frac{2}{3}} \cos \frac{2}{3} \theta = 1.$$

7. Trouver la projection sur le plan XY d'une courbe qui satisfait, sur la surface

$$z = a\left(\frac{y}{x}\right)^2,$$

à la relation $d^2z = 0$, d^2z étant pris en traitant dx et dy comme constants.

R. L'équation différentielle de la courbe est

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{4y}{x}\frac{dy}{dx} + 3\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0;$$

son intégrale est

$$y^2 - Cxy(1 + x^2) + C^2x^4 = 0.$$

8. L'arc et l'abscisse sont liés par l'une des relations suivantes

$$s = a\,\mathrm{l}.\,x; \quad s^2 = 4ax; \quad 8s^3 = 27ax^2;$$

trouver la courbe.

R 1° $$y = C + \sqrt{a^2 - x^2} + a\,\mathrm{l}.\frac{x}{a + \sqrt{a^2 - x^2}}.$$

2° $$x = \frac{a}{2}(1 - \cos\omega), \quad y = \frac{a}{2}(\omega \sin\omega) \text{ (Cycloïde).}$$

3° $$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

9. La projection, sur le rayon vecteur, de la normale terminée à l'axe des x, est une constante a. Trouver la courbe.

R. $$r = \frac{a}{1 - C\cos\theta} \text{ (Sections coniques).}$$

10. L'aire comprise entre la courbe, l'axe polaire et le rayon vecteur est dans un rapport constant avec l'aire du triangle formé par le rayon vecteur, la normale et la sous-normale polaire. Trouver la courbe.

R. Désignant par $\pm 2k^2$ le rapport du triangle au secteur de la courbe, on arrive à l'équation linéaire

$$\frac{d^2.r^2}{d\theta^2} \pm 4k^2r^2 = 0;$$

la condition pour $\theta = 0$ détermine l'une des constantes. On trouve, suivant le signe,

$$r^2 = C(e^{2k\theta} + e^{-2k\theta}), \quad r^2 = C\cos 2k\theta.$$

11. La courbe est définie par l'équation

$$s = \frac{r^2 + a^2}{a}$$

entre l'arc, le rayon vecteur et une constante a. Trouver la courbe.

R. On trouve respectivement pour l'équation différentielle et pour son intégrale

$$\left(\frac{4r^2}{a^2} - 1\right)\frac{dr^2}{d\theta^2} = r^2, \quad C \pm \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{4r^2}{a^2} - 1} - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{4r^2}{a^2} - 1}.$$

12. Le triangle construit sur l'ordonnée et le rayon de courbure a une aire constante. Trouver la courbe.

R. On suit la méthode du n° **455**. De l'équation

$$Ry\sin\varphi = a^2$$

on tire

$$dy = \sin\varphi\, ds = \mathrm{R}\sin\varphi\, d\varphi = \frac{a^2}{y}\, d\varphi,$$

et par suite

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\left(\frac{y^2 + \mathrm{C}}{2a^2}\right), \quad x = \mathrm{C}_1 + \int \cot\left(\frac{y^2+\mathrm{C}}{2a^2}\right) dy.$$

13. Étant donnée une courbe (A), trouver une courbe (B) qui soit normale à une série de cordes comprises entre la courbe (A) et l'axe des x, et qui coupe en même temps ces cordes en deux parties égales. Cas particuliers où (A) est une droite passant par l'origine, ou une parabole tangente à l'axe des y.

R. Soient (x, y) les coordonnées d'un point M de la courbe cherchée; $(x', 0)$; (x'', y'') celles des extrémités de la corde qu'elle coupe en deux parties égales; $x'' = \varphi(y'')$ l'équation de la courbe donnée (A). On a les relations

$$x' + x'' = 2x, \quad y'' = 2y, \quad \frac{dy}{dx}\frac{y''}{x'' - x'} = -1,$$

d'où

$$y\frac{dy}{dx} - x + \varphi(2y) = 0$$

pour l'équation différentielle de la courbe (B).

1° Dans le cas où (A) est une droite $y = x \operatorname{tg}\lambda$, on trouve

$$\left(y - x\operatorname{tg}\frac{\lambda}{2}\right)^{\sin^2\frac{\lambda}{2}}\left(y + x\cot\frac{\lambda}{2}\right)^{\cos^2\frac{\lambda}{2}} = \mathrm{C}.$$

Pour $\mathrm{C} = 0$ on trouve les bissectrices des angles que fait la droite (A) avec l'axe des x.

Si l'angle λ est droit, on tombe sur des hyperboles équilatères $y^2 - x^2 = \mathrm{C}$; ces courbes jouissent donc de la propriété de partager en deux parties égales leurs normales terminées aux axes.

2° $y''^2 = 2px''$.

$$xdx - ydy = \frac{2y^2}{p}\, dx.$$

Les courbes (B) ont pour équation

$$y^2 = \frac{p}{2}x - \frac{p^2}{8} + \mathrm{C}e^{-\frac{4x}{p}}.$$

Pour $\mathrm{C} = 0$ on a une parabole facile à construire.

14. Trouver les trajectoires orthogonales des paraboles $y^2 = 2p(x - \alpha)$.

R.
$$y = \mathrm{C}e^{-\frac{x}{p}}.$$

15. Trouver les trajectoires orthogonales des cissoïdes comprises dans l'équation

$$y^2(2\alpha - a) = x^3.$$

R. L'équation différentielle des trajectoires est

$$(3x^2 + y^2)\, y\frac{dy}{dx} + 2x^3 = 0;$$

l'intégrale de cette équation est

$$x^2+y^2=C\sqrt{2x^2+y^2} \quad \text{ou} \quad r=C\sqrt{1+\cos^2\theta}.$$

16. Trajectoires orthogonales des cercles

$$x^2+y^2-\alpha x=0$$

tangents, à l'origine, à l'axe des y.

R. L'équation différentielle et l'équation finie des trajectoires sont respectivement

$$(y^2-x^2)\,dy+2xy\,dx=0, \quad x^2+y^2-Cy=0.$$

Cercles tangents, à l'origine, à l'axe des x.

17. Trajectoires orthogonales des courbes représentées, en coordonnées polaires, par l'équation

$$r^2=a^2\,\mathrm{l.}\,\frac{\operatorname{tg}\theta}{\alpha}.$$

R. On se servira de l'expression de $\operatorname{tang}\mu$ donnée au n° **185**. On aura

$$r\frac{d\theta}{dr}=-\frac{a^2}{2r^2\sin\theta\cos\theta}, \quad r=\frac{a}{\sqrt{2(\sin^2\theta+C)}}.$$

18. Trouver la courbe dont la tangente est à une distance constante de l'origine.

R. On trouve, en posant $p=dy:dx$, l'équation différentielle

$$y-px=a\sqrt{1+p^2},$$

équation de Clairaut. La réponse est donnée par la solution singulière $x^2+y^2=a^2$ (cercle de rayon a).

19. Trouver la courbe telle que la portion de sa tangente entre les axes rectangulaires soit constante.

R.

$$y=px\pm\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}.$$

La solution singulière donne la réponse :

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}.$$

20. Le rayon de courbure R est une fonction $f(x)$ de l'abscisse. Trouver la courbe.

R.

$$y=C_1\pm\int\frac{C\pm\varphi(x)}{\sqrt{1-[C\pm\varphi(x)]^2}}dx, \quad \text{où} \quad \varphi(x)=\int\frac{dx}{f(x)}.$$

21. On a entre le rayon de courbure R, la longueur N de la normale et la sous-normale S_n, la relation

$$\left(\frac{N}{y}\right)^3=\frac{2R}{x}\left(\frac{S_n}{y}-\frac{y}{x}\right);$$

trouver la courbe.

R.

$$y=Cx+C_1x^2 \quad \text{ou} \quad y=Cx+C_1x^{-2}.$$

22. Trouver l'équation d'une courbe satisfaisant à la relation $s \cos \varphi = a$.

R. $x = C - a\,\mathrm{l.}\cos\varphi, \quad y = C_1 + a(\operatorname{tg}\varphi - \varphi)$.

23. Trouver la courbe définie par la relation

$$R = a \sin^{-3}\varphi.$$

R. $y^2 + 2ax + a^2 = 0$. (Parabole.)

24. Même problème, la relation étant $R = a\cos^{-2}\varphi$.

R. On trouve la chaînette

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

25. Trouver la développante de la chaînette.

R. L'équation de cette courbe étant mise sous la forme $\sigma = a \operatorname{tg}\theta$, on trouvera pour la développante

$$x = C\cos\theta + a\sin\theta - a\,\mathrm{l.}\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta},$$
$$y = C\sin\theta - a\cos\theta.$$

Si l'on fait $C = 0$ et que l'on élimine θ, on a la développante particulière

$$x = \sqrt{a^2 - y^2} - a.\,\mathrm{l.}\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{-y}.$$

26. Trouver la courbe telle que la distance d'un point quelconque de cette courbe au centre de courbure correspondant de sa développée soit une constante a.

R. On prend pour variable l'inclinaison φ de la tangente sur l'axe des x, et l'on observe que le rayon de courbure R_1 de la développée a pour expression

$$R_1 = \frac{dR}{d\varphi}.$$

On a $R = a\sin(\varphi + C)$ pour l'équation de la courbe cherchée. C'est une cycloïde, comme on le voit en appliquant la méthode du n° **455**.

CHAPITRE XLVI.

EXISTENCE ET ÉVALUATION APPROCHÉE DES INTÉGRALES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

458. Soit une équation différentielle du premier ordre entre x et y,

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y);$$

cherchons sous quelles conditions il est possible de satisfaire à une telle

équation par une fonction convenable y de x, et quelle sera la nature de cette intégrale. Désignons par x_0, y_0 des valeurs arbitraires de x et de y; par a, A, C des quantités positives déterminées et admettons que, dans une région T limitée par les valeurs $x_0 \pm a$ de x, $y_0 \pm Aa$ de y, les fonctions $f(x, y)$, $f'_y(x, y)$ soient simples, continues et telles que l'on ait

$$(2) \qquad \mathrm{M} f(x, y) < \mathrm{A}, \quad \mathrm{M} f'_y(x, y) < \mathrm{C}.$$

Prenons une valeur quelconque X de x, comprise entre x_0 et $x_0 + a$; partageons l'intervalle (x_0, X) en un nombre arbitraire n de parties par les valeurs $x_0, x_1, \dots x_{n-1}, x_n = \mathrm{X}$, et posons en général $x_{i+1} - x_i = \delta_i$. Calculons des valeurs correspondantes pour y par l'équation

$$(3) \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x, y),$$

c'est-à-dire formons la suite d'égalités

$$(4)\, y_1 - y_0 = \delta_0 f(x_0, y_0), y_2 - y_1 = \delta_1 f(x_1, y_1), \dots, \mathrm{Y} - y_{n-1} = \delta_{n-1} f(x_{n-1}, y_{n-1}).$$

On voit d'abord que ces valeurs y_1, y_2, ... Y de y appartiendront à la région T, car si l'on ajoute membre à membre les i premières équations (4) et qu'on applique une formule connue (**1**, III), on aura

$$y_i - y_0 = (\delta_0 + \delta_1 + \cdots + \delta_{i-1}) \mathcal{M} [f(x_0, y_0), f(x_1, y_1), \dots f(x_{i-1}, y_{i-1})]$$

ou

$$(5) \qquad y_i - y_0 = (x_i - x_0) \mathcal{M} [f(x_0, y_0), \dots f(x_{i-1}, y_{i-1})].$$

Si l'on admet que les points (x_0, y_0), (x_1, y_1), ... (x_{i-1}, y_{i-1}) appartiennent à la région T, les quantités $f(x_0, y_0)$, $f(x_1, y_1)$, ... $f(x_{i-1}, y_{i-1})$ seront moindres, en valeur absolue, que A, et il en sera de même de la moyenne entre ces quantités. On a donc

$$x_i - x_0 < a, \quad \mathrm{M}(y_i - y_0) < \mathrm{A}(x_i - x_0) \leqq \mathrm{A}(\mathrm{X} - x_0) < \mathrm{A}a,$$

donc y_i sera compris entre $y_0 - \mathrm{A}a$ et $y_0 + \mathrm{A}a$ et le point (x_i, y_i) appartiendra à la région T. Or, par hypothèse, le point (x_0, y_0) est pris dans cette région, donc, il en sera de même du point (x_1, y_1); cette condition étant vérifiée pour les points (x_0, y_0), (x_1, y_1), le sera pour le point (x_2, y_2) d'après ce qui précède, et ainsi de suite, jusque et y compris le point (X, Y).

De là résulte une autre conséquence. La fonction $f(x, y)$ étant continue dans la région T, la valeur moyenne qui figure dans l'équation (5) ne

peut être que la valeur de $f(x, y)$ qui répond à un point (x, y) de la région qui renferme les points (x_0, y_0), ... (x_{i-1}, y_{i-1}), région limitée par les valeurs

$$(x_0, x_i) \text{ de } x, \quad y_0 - A(x_i - x_0),\ y_0 + A(x_i - x_0) \text{ de } y.$$

Si donc nous désignons, dans tout ce qui suit, par θ une quantité quelconque > 0 et < 1 et par η une quantité > -1 et < 1, nous pourrons poser

$$(6) \qquad y_i - y_0 = (x_i - x_0) f[x_0 + \theta(x_i - x_0),\ y_0 + \mu A(x_i - x_0)],$$

et comme cette égalité subsiste pour $i = 1, 2, .., n$,

$$(7) \qquad Y - y_0 = (X - x_0) f[x_0 + \theta(X - x_0),\ y_0 + \eta A(X - x_0)].$$

459. Cherchons maintenant la variation β_i qu'éprouve l'une quelconque des quantités y_i lorsqu'on fait varier y_0 d'une quantité β_0, telle d'ailleurs que $y_0 + \beta_0$ soit toujours compris dans l'intervalle $(y_0 - Aa,\ y_0 + Aa)$, et lorsqu'on calcule les quantités $y_1, y_2, \ldots$ au moyen de l'équation (3).

Nous aurons d'abord, par là,

$$(y_1 + \beta_1) - (y_0 + \beta_0) = \delta_0 f(x_0, y_0 + \beta_0),$$

d'où, eu égard aux équations (4),

$$\beta_1 - \beta_0 = \delta_0 [f(x_0, y_0) + \beta_0) - f(x_0, y_0)] = \delta_0 \beta_0 f'_y(x_0, y_0 + \theta\beta_0),$$

par l'application de la formule du N° **91**. Mais, dans la région T, à laquelle appartiendra encore le point $(x_1, y_1 + \beta_1)$, $f'_y(x, y)$ a une valeur absolue moindre que C, donc

$$\beta_1 = \beta_0 [1 + \delta_0 f'_y(x_0, y_0 + \theta\beta_0)] = \beta_0 (1 + \eta\delta_0 C),$$

d'où $\mathrm{VA}\, \beta_1 < \mathrm{VA}\, \beta_0 (1 + \delta_0 C)$, et par un raisonnement identique

$$\mathrm{VA}\, \beta_2 < \mathrm{VA}\, \beta_1 (1 + \delta_1 C), \ldots \mathrm{VA}\, \beta_i < \mathrm{VA}\, B_{i-1} (1 + \delta_{i-1} C);$$

d'où, multipliant membre à membre,

$$\mathrm{VA}\, \beta_i < \mathrm{VA}\, \beta_0 (1 + \delta_0 C)(1 + \delta_1 C) \ldots (1 + \delta_{i-1} C).$$

Mais il suit évidemment de la série qui représente e^x que l'on a, pour toute valeur positive de x, $e^x > 1 + x$, donc

$$1 + \delta_0 C < e^{\delta_0 C}, \quad 1 + \delta_1 C < e^{\delta_1 C}, \ldots$$

ce qui nous donnera, en observant que $\delta_0 + \delta_1 + \cdots + \delta_{i-1} = x_i - x_0$,

$$(8) \qquad \mathrm{VA}\, \beta_i < \mathrm{VA}\, \beta_0 e^{C(x_i - x_0)}.$$

Telle est la limite supérieure de la variation qu'éprouve l'une des quantités y_i pour une variation β_0 de la valeur initiale y_0. Si l'on applique cette formule à l'hypothèse $i = n$ et si l'on pose, pour abréger, $X - x_0 = l$, on aura

$$\mathrm{M}\,\beta_n < \mathrm{M}\,\beta_0 e^{Cl}.$$

Si donc on fait décroître indéfiniment $\mathrm{M}\,\beta_0$, il en sera de même de $\mathrm{M}\,\beta_n$, d'où il suit que *la valeur finale* Y *est une fonction continue de la valeur initiale* y_0.

Le même procédé permet d'évaluer la variation β'_n qu'éprouve Y par suite d'une variation β_i qu'éprouverait l'une quelconque des quantités y_i, savoir

(9) $$\mathrm{M}\,\beta_n < \mathrm{M}\,\beta_i e^{C(X-x_i)} < \mathrm{M}\,\beta_i e^{Cl}.$$

460. Ces préliminaires établis, montrons que si l'on fait décroître indéfiniment les éléments $\delta_0, \delta_1, \ldots \delta_{n-1}$ de la différence $X - x_0$, par *des subdivisions successives*, c'est-à-dire en intercalant de nouvelles valeurs de x entre celles qui partagent l'intervalle (x_0, X), puis de nouvelles encore entre les précédentes, et ainsi de suite, la valeur de Y calculée par l'équation (3) au moyen de toutes ces valeurs successives de la variable, tendra vers une limite finie et déterminée.

Concevons d'abord que l'on partage l'intervalle (x_0, x_1) en un nombre quelconque p de subdivisions, et cherchons la quantité y'_1 qui remplacera y_1. Nous aurons, d'après les formules (4) et (6),

$$y_1 - y_0 = \delta_0 f(x_0, y_0), \quad y'_1 - y_0 = \delta_0 f(x_0 + \theta\delta_0, y_0 + \eta A\delta_0).$$

Mais comme les éléments $\delta_0, \delta_1, \ldots$ sont aussi petits qu'on le veut, nous admettrons que la division de l'intervalle (x_0, X) ait déjà été poussée assez loin pour que, dans chacune des régions ayant pour contour $(x_i, x_i + \delta_i, y_i - A\delta_i, y_i + A\delta_i)$, l'oscillation de la fonction $f(x, y)$ soit moindre qu'une fraction donnée σ, arbitrairement petite, ce qui est possible (**138**). Nous aurons donc, d'après la valeur de y'_1,

$$y'_1 - y_0 = \delta_0 [f(x_0, y_0) + \eta_0\sigma], \quad (-1 < \eta_0 < 1),$$

et par suite

$$y'_1 - y_1 = \delta_0 \eta_0 \sigma.$$

Telle est l'expression de l'accroissement qu'éprouve y_1 lorsque, au lieu de passer directement de x_0 à x_1, on y passe par un nombre quelconque de valeurs intermédiaires. D'ailleurs, d'après l'inégalité (9) du

N° précédent, la variation absolue qui en résultera pour Y sera moindre que $\delta_0 \eta_0 \sigma e^{Cl}$ et *a fortiori* que $\delta_0 \sigma e^{Cl}$.

On trouverait de la même manière que si l'on subdivise l'intervalle (x_i, x_{i+1}) en un nombre quelconque d'intervalles plus petits, on aura

(A) $$y'_{i+1} - y_i = \delta_i [f(x_i, y_i) + \eta_i \sigma],$$

d'où

$$y'_{i+1} - y_{i+1} = \delta_i \eta_i \sigma,$$

et il en résultera pour Y une variation plus petite numériquement que $\delta_i \sigma e^{Cl}$, et ainsi de suite. Par conséquent, si nous concevons que l'on passe de la valeur x_0 à la valeur X en intercalant un nombre quelconque de valeurs intermédiaires entre les valeurs successives $x_0, x_1, x_2, \dots x_{n-1}$ X, la variation absolue totale qui en résultera pour la valeur finale Y sera moindre que

$$\delta_0 \sigma e^{Cl} + \delta_1 \sigma e^{Cl} + \cdots + \delta_{n-1} \sigma e^{Cl} = \sigma l e^{Cl}.$$

Mais la quantité σ peut être prise aussi petite qu'on le veut, en supposant les δ_i suffisamment petits; donc, lorsque la division de l'intervalle (x_0, X) a été poussée assez loin, de nouvelles subdivisions, quelque loin qu'on les pousse, ne peuvent plus faire varier Y que d'une quantité moindre qu'une fraction arbitrairement petite. Il en résulte (**18**) que Y tend vers une limite finie et déterminée.

461. Cette limite est indépendante du mode de division de l'intervalle (x_0, X) en éléments indéfiniment décroissants. Pour le démontrer, on suit la même marche que dans d'autres cas analogues (**306**). Considérons deux modes de division distincts, (A) et (B), et supposons d'ailleurs que, dans chacun d'eux, les éléments δ_i soient déjà suffisamment petits pour que l'oscillation de la fonction $f(x, y)$ soit moindre qu'une quantité arbitrairement petite σ dans l'une quelconque des régions $(x_i, x_i + \delta_i, y_i - A\delta_i, y_i + A\delta_i)$. Comparons les valeurs Y_A et Y_B de Y qui résultent respectivement des modes (A) et (B), avec la valeur Y_C qui répondrait à un troisième mode (C) résultant de la superposition des deux autres, c'est-à-dire de la réunion des valeurs de x qui, dans chacun des deux modes (A) et (B), décomposent l'intervalle (x_0, X) en intervalles plus petits. Par rapport à chacun des modes (A) et (B), le mode (C) peut être regardé comme provenant de la subdivision des intervalles $\delta_0, \delta_1, \dots$ qui le constituent en intervalles plus petits, et, d'après ce qui a été établi

plus haut, il résulte de cette comparaison que l'on a les inégalités

$$\mathrm{VA}\,(Y_C - Y_A) < \sigma l e^{Cl}, \quad \mathrm{VA}\,(Y_C - Y_B) < \sigma l e^{Cl},$$

donc enfin,

$$\mathrm{VA}\,(Y_B - Y_A) < 2\sigma l e^{Cl}.$$

Il suit de là que la différence $Y_B - Y_A$ tend vers zéro lorsque, dans les deux modes (A) et (B), les éléments δ_i tendent eux-mêmes vers zéro.

Il est donc démontré que, si l'on partage l'intervalle (x_0, X) en éléments indéfiniment décroissants suivant une loi quelconque; si l'on attribue à y une valeur arbitraire y_0 pour la valeur donnée x_0 de x, et si l'on détermine au moyen des équations (4) la valeur de Y qui se rapporte à la valeur X de x, cette quantité Y tendra vers une limite finie, déterminée et unique, qui ne peut dépendre, par conséquent, que de y_0 et de X, et que pour cette raison nous désignerons par $F(y_0, X)$.

462. Supposons que y_0 reste fixe, mais que l'on fasse varier X, désigné alors par x, et que la valeur limite de Y soit simplement représentée par $F(x)$. Cette fonction $F(x)$ jouit de la double propriété de se réduire à y_0 pour $x = x_0$, et de vérifier l'équation (1) si l'on y fait $y = F(x)$. Remarquons en effet que l'équation (7)

$$Y - y_0 = (X - x_0)\, f[x_0 + \theta (X - x_0),\ y_0 + \eta A (X - x_0)]$$

nous fournit une expression de la valeur Y à laquelle on arrive en partant de la valeur y_0 pour $x = x_0$, et appliquant l'équation (3) en partageant l'intervalle (x_0, X) en un nombre quelconque de parties. Cette relation subsistant quelque grand que soit n, s'appliquera évidemment à la valeur limite de Y, en sorte que si l'on remplace X par x, on aura

$$F(x) - y_0 = (x - x_0)\, f[x_0 + \lambda (x - x_0),\ y_0 + \mu A (x - x_0)],$$

λ et μ ayant des valeurs absolues ou plus égales à l'unité. Si, dans cette équation, on fait $x = x_0$, on trouve $F(x_0) = y_0$, comme nous l'avions annoncé.

D'autre part, cette même équation (7) permet également de représenter la valeur de Y à laquelle on arriverait si l'on partageait l'intervalle (x_i, X) en un nombre arbitraire d'éléments, et si, partant de la valeur y_i pour $x = x_i$, on calculait Y par l'équation (3). On trouverait évidemment par un raisonnement identique

$$Y - y_i = (X - x_i)\, f[x_i + \theta (X - x_i),\ y_i + \eta A (X - x_i)],$$

θ et η ayant des significations semblables à celles qu'ils ont dans l'équation (7). Cette relation subsistera quelque grand que soit le nombre des divisions de l'intervalle (x_0, X) et s'appliquera, par conséquent, aux valeurs limites de y_i et de Y qui correspondent aux valeurs de x choisies pour x_i et X. Ainsi, on aura

$$F(X) - F(x_i) = (X - x_i) f[x_i + \lambda(X - x_i),\ F(x_i) + \mu A(X - x_i)].$$

Si donc nous remplaçons x_i par x, X par $x + h$, il viendra

$$F(x + h) - F(x) = hf[x + \lambda h,\ F(x) + \mu A h].$$

Divisant par h et faisant tendre h vers zéro, observant que $f(x, y)$ est continue dans la région T, nous aurons

$$\lim_{h=0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f[x, F(x)].$$

La démonstration se ferait de même pour les valeurs négatives de h en posant $X = x$, $x_i = x + h$, donc, en général,

$$F'(x) = f[x, F(x)],$$

ce qui montre bien que la fonction $y = F(x)$ vérifie l'équation différentielle (1) dans l'intervalle $(x_0, x_0 + a)$. Ainsi $y = F(x)$, ou $y = F(y_0, x)$ est une intégrale de l'équation (1), et cela, quelle que soit la quantité arbitraire y_0, pourvu que les fonctions $f(x, y)$, $f'_y(x, y)$ satisfassent aux conditions prescrites au n° **458**. L'intégrale n'est donc entièrement déterminée que si l'on attribue à y_0 une valeur parfaitement déterminée.

463. *Remarques*. — 1° Nous avons supposé $x_0 < X$, les accroissements δ_i étant, par conséquent, tous positifs, mais il n'y aurait évidemment aucune difficulté à établir les mêmes propriétés, si l'on supposait que x passât de la valeur x_0 à une valeur plus petite X $(X > x_0 - a)$, par une série d'accroissements négatifs.

2° Nous avons admis que les fonctions $f(x, y)$, $f'_y(x, y)$ vérifiaient certaines conditions de continuité dans une région T limitée par les valeurs $x_0 \pm a$ de x, $y_0 \pm Aa$ de y. Mais si ces fonctions sont continues dans le voisinage du système de valeurs (x_0, y_0), il sera toujours possible de délimiter autour de ce point une région dans laquelle ces conditions seront vérifiées. En effet, les quantités $f(x_0, y_0)$, $f'_y(x_0, y_0)$ ayant des valeurs finies et déterminées, il suit de notre hypothèse qu'il existe autour du point (x_0, y_0) une région T_1 dans laquelle f et f'_y restent

continues et moindres, en valeur absolue, que certains nombres fixes A et C. On aura donc, dans cette région T_1,

$$\mathrm{VA} f(x, y) < A, \quad \mathrm{VA} f'_y(x, y) < C.$$

On déterminera ensuite une quantité positive a assez petite pour que les valeurs $x_0 - a$ et $x_0 + a$ de x, $y_0 + Aa$ et $y_0 + Aa$ de y limitent une région T entièrement comprise dans la région T_1, ce qui est évidemment possible. Cela fait, la région T jouira de toutes les propriétés admises dans notre démonstration, et il suffira de prendre $x_0 < X < x_0 + a$ pour que celle-ci soit applicable.

3° L'interprétation géométrique éclaircit cette théorie. L'équation (1), considérée comme appartenant à une courbe plane, définit la direction de la tangente en un point quelconque de la courbe au moyen des coordonnées de ce point. Partant d'un point arbitraire (x_0, y_0), dans la région du plan où la fonction $f(x, y)$ vérifie les conditions admises, et appliquant les équations (3) ou (4), on construit une série d'autres points tels, que la droite qui joint l'un d'eux au suivant à la même direction qu'aurait la tangente à la courbe si elle passait par le premier. Le polygone qui a ces points pour sommets a ses côtés indéfiniment décroissants, lorsque les δ_i tendent vers zéro ; ses sommets ont pour limites les points d'une certaine courbe dont les tangentes sont les directions limites des côtés du polygone ; cette courbe, parfaitement déterminée dès que le point (x_0, y_0) est donné, représente une intégrale de l'équation différentielle (1).

461. Il suit de la théorie exposée plus haut que, si les fonctions $f(x, y)$, $f'_y(x, y)$ sont simples et continues dans une région T du plan des (x, y), il existera toujours dans cette région une fonction y de x, simple et continue, qui vérifiera l'équation différentielle (1) et qui, de plus, prendra pour une valeur donnée x_0 de x telle valeur arbitraire y_0 que l'on choisira, pourvu que le point (x_0, y_0) appartienne à la région T.

Cette fonction intégrale n'étant déterminée entièrement que si y_0 est donné, doit être regardée comme une fonction du paramètre y_0, ou du moins, son expression, quelle que soit la forme sous laquelle on l'obtient, doit renfermer une constante arbitraire qui permette encore, pour une valeur donnée x_0 de x, de choisir arbitrairement la valeur de y. C'est bien là la démonstration de l'existence de *l'intégrale générale* dans le sens que nous lui avons attribuée au n° **401**.

De plus, il est facile de voir que, dans la région T, la fonction y qui satisfait à ces deux conditions est unique. Supposons en effet que, indépendamment de la fonction $y = F(y_0, x)$ à laquelle nous sommes parvenu au moyen des équations (4), il existe une autre fonction $u = \varphi(x)$ de x qui vérifie l'équation (1) et se réduise, pour $x = x_0$, à la valeur $\varphi(x_0) = y_0$. Donnons à x, comme au n° **458**, les valeurs successives $x_0, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$, X, et soient $u_0, u_1, \ldots u_n$ les valeurs correspondantes de la fonction u; nous aurons en général, d'après le théorème de M. Bonnet,

$$\varphi(x_i + \delta_i) - \varphi(x_i) = \delta_i \varphi')(x_i + \theta\delta_i) = \delta_i [\varphi'(x_i) + \eta_i \sigma],$$

σ désignant une quantité qu'on peut supposer aussi petite qu'on le veut en prenant tous les δ_i suffisamment petits, η_i une fraction comprise entre -1 et $+1$. Cette équation revient à celle-ci, puisque u vérifie l'équation (1),

$$u_{i+1} - u_i = \delta_i [f(x_i, u_i) + \eta_i \sigma],$$

et elle est tout à fait semblable, entre u_i et u_{i+1}, à l'équation (A) que nous avons trouvée (**460**) entre y_i et y_{i+1}, lorsqu'on subdivise d'une manière quelconque l'intervalle (x_i, x_{i+1}). Comme cette relation subsiste pour les valeurs $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, que l'on a supposé $u_0 = y_0$, et comme nous avons montré qu'en conséquence de cette relation la valeur limite de Y pour des valeurs indéfiniment croissantes de n est unique et déterminée, il s'ensuit que la différence entre u_n et Y décroîtra indéfiniment lorsque les éléments δ_i tendront vers zéro; en d'autres termes, les fonctions $F(x)$ et $\varphi(x)$ seront identiques.

Nous pouvons donc conclure que toute intégrale $u = \varphi(x)$ de l'équation (1) dans la région T coïncide avec l'intégrale particulière, déduite de l'intégrale générale $F(y_0, x)$ en attribuant à la constante une valeur convenable pour que, pour une valeur x_0 de x, cette intégrale générale prenne la même valeur y_0 que la fonction u. Ce ne peut donc être que dans une région du plan où les fonctions $f(x, y)$, $f'_y(x, y)$ ne satisferaient pas à toutes les conditions supposées, que l'équation différentielle (1) n'admettrait aucune intégrale, ou admettrait des solutions singulières non comprises dans l'intégrale générale. Ainsi l'équation

$$\frac{dy}{dx} = 1 - (y - x)^{\frac{1}{3}}$$

du n° **401** admet la solution singulière $y = x$; mais on a ici

$$f'_y(x, y) = -\frac{1}{3}(y - x)^{-\frac{2}{3}},$$

et l'hypothèse $y = x$ rend infinie cette expression, quelque valeur qu'on attribue à x. La dérivée f'_y ne reste donc pas finie et continue dans la région du plan à laquelle appartient la droite que représente cette solution singulière.

Nous remarquerons encore que la méthode exposée aux n^os^ **458** et suivants pour établir l'existence de l'intégrale permet d'en calculer la valeur, pour une valeur donnée X de x, avec autant d'approximation qu'on le veut, en partageant l'intervalle (x_0, X) en éléments δ_i, suffisamment petits. De plus, les formules qui donnent une limite supérieure des variations que la fonction Y peut éprouver, par suite de divisions ultérieures de ces éléments en parties plus petites, fournissent le moyen de déterminer l'approximation obtenue.

465. Considérons maintenant un système d'équations différentielles simultanées du premier ordre, tel que celui du n° **437**, et comme les particularités nouvelles qui résultent de la multiplicité des fonctions à déterminer se résolvent de la même manière pour deux fonctions ou pour un plus grand nombre, il suffit de prendre un système de deux équations entre trois variables, tel que

$$(10) \qquad \frac{dx}{dt} = f_1(t, x, y), \quad \frac{dy}{dt} = f_2(t, x, y).$$

Soit t_0 une valeur donnée de t; choisissons arbitrairement des valeurs correspondantes x_0, y_0 pour x et y. Nous admettrons que, a, A, B étant des quantités positives déterminées, dans une région U limitée par les valeurs $t_0 \pm a$ de t, $x_0 \pm Aa$ de x, $y_0 \pm Ba$ de y, les fonctions f_1 et f_2 restent simples, continues et respectivement moindres en valeur absolue que A et B; que, en outre, dans cette même région U, les dérivées partielles

$$f'_{1x}(t, x, y), \quad f'_{1y}(t, x, y), \quad f'_{2x}(t, x, y), \quad f'_{2y}(t, x, y)$$

restent aussi continues et inférieures à des nombres fixes déterminés.

Cela admis, supposons $t_0 < T < t_0 + a$; partageons l'intervalle (t_0, T) en un nombre arbitraire n de parties $\delta_0, \delta_1, \ldots \delta_{n-1}$, par les valeurs

$t_0, t_1, \dots t_{n-1}, t_n = \mathrm{T}$; soient x_i, y_i les valeurs de x et de y qui correspondent à t_i, calculées simultanément à partir de x_0, y_0 au moyen des équations

$$(11) \qquad \frac{\Delta x}{\Delta t} = f_1(t, x, y), \; \frac{\Delta y}{\Delta t} = f_2(t, x, y),$$

en sorte que l'on ait

$$(12) \quad \begin{cases} x_1 - x_0 = \delta_0 f_1(t_0, x_0, y_0),\; x_2 - x_1 = \delta_1 f_1(t_1, x_1, y_1),\; \dots,\; \mathrm{X} - x_{n-1} = \delta_{n-1} f_1(t_{n-1}, x_{n-1}, y_{n-1}), \\ y_1 - y_0 = \delta_0 f_2(t_0, x_0, y_0),\; y_2 - y_1 = \delta_1 f_2(t_1, x_1, y_1),\; \dots,\; \mathrm{Y} - y_{n-1} = \delta_{n-1} f_2(t_{n-1}, x_{n-1}, y_{n-1}). \end{cases}$$

Nous allons montrer d'abord que le point (t_i, x_i, y_i) appartient à la région U. On obtient en effet, en ajoutant membre à membre les i premières équations (12),

$$(13) \quad x_i - x_0 = (t_i - t_0) \; \mathcal{M} \; [f_1(t_0, x_0, y_0), f_1(t_1, x_1, y_1), \dots f_1(t_{i-1}, x_{i-1}, y_{i-1})],$$

et si l'on suppose d'abord que les points $(t_0, x_0, y_0), \dots (t_{i-1}, x_{i-1}, y_{i-1})$ appartiennent à la région U, les valeurs correspondantes de la fonction f_1 seront numériquement moindres que A, il en sera de même de leur moyenne, et l'on aura ainsi

$$\mathrm{VA}\,(x_i - x_0) < (t_i - t_0)\,\mathrm{A} < \mathrm{A}a.$$

On prouverait, par un raisonnement semblable, que l'on a également

$$\mathrm{VA}\,(y_i - y_0) < (t_i - t_0)\,\mathrm{B} < \mathrm{B}a,$$

donc t_i est compris entre t_0 et $t_0 + a$, x_i entre $x_0 - \mathrm{A}a$ et $x_0 + \mathrm{A}a$, y_i entre $y_0 - \mathrm{B}a$ et $y_0 + \mathrm{B}a$, ce qui prouve que le point (t_i, x_i, y_i) appartiendra à son tour à la région U. Or, le point de départ (t_0, x_0, y_0) est intérieur à cette région, donc il en sera de même du point (t_1, x_1, y_1); les points (t_0, x_0, y_0), (t_1, x_1, y_1) étant dans cette région, il en sera de même du point (t_2, x_2, y_2), et ainsi de suite, jusque et y compris le point T, X, Y. La proposition est donc établie, et les fonctions f_1, f_2 sont continues et numériquement moindres que A, B dans le voisinage de chacun des systèmes de valeurs déterminés plus haut.

Les points (t_0, x_0, y_0), $(t_1, x_1, y_1) \dots$ appartenant à la région U et la fonction $f_1(t, x, y)$ étant continue dans cette région, la valeur moyenne qui figure dans l'équation (13) ne peut être que la valeur de cette

fonction qui se rapporte à un point de la région comprenant les points $(t_0, x_0, y_0), \ldots (t_{i-1}, x_{i-1}, y_{i-1})$, et qui est limitée par les valeurs

$$[t_0, t_i, x_0 \pm A(t_i - t_0), y_0 \pm B(t_i - t_0)],$$

en sorte que, si nous désignons généralement par θ une quantité simplement comprise entre o et 1, par η, ξ des quantités comprises entre -1 et $+1$, nous pourrons poser

$$(14) \begin{cases} x_i - x_0 = (t_i - t_0) f_1 [t_0 + \theta(t_i - t_0), x_0 + \eta A(t_i - t_0), y_0 + \xi B(t_i - t_0)] \\ y_i - y_0 = (t_i - t_0) f_2 [t_0 + \theta_1 (t_i - t_0), x_0 + \eta_1 A(t_i - t_0), y_0 + \xi_1 B(t_i - t_0)], \end{cases}$$

la seconde équation se démontrant comme la première. Ces équations s'appliquent aux valeurs 1, 2, ... n de i, et par conséquent aux valeurs finales X et Y de x et de y.

466. Concevons maintenant que l'on fasse subir aux valeurs initiales x_0, y_0 des accroissements positifs ou négatifs α_0, β_0, tels que le point $(t_0, x_0 + \alpha_0, y_0 + \beta_0)$ appartienne toujours à la région U. D'après le raisonnement développé plus haut, les valeurs que l'on en déduira pour $(x_1, y_1), \ldots (X, Y)$ en appliquant toujours les formules (11) resteront comprises dans la région U, mais elles subiront des accroissements dont nous allons chercher la limite absolue. Soient α_i, β_i les variations éprouvées respectivement par x_i, y_i, et posons

$$\rho_i = \sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2},$$

Nous aurons, en vertu des formules (12) et (11),

$$x_{i+1} - x_i = \delta_i f_1 (t_i, x_i, y_i),$$
$$(x_{i+1} + \alpha_{i+1}) - (x_i + \alpha_i) = \delta_i f_1 (t_i, x_i + \alpha_i, y_i + \beta_i),$$

d'où

$$\alpha_{i+1} = \alpha_i + \delta_i [f_1 (t_i, x_i + \alpha_i, y_i + \beta_i) - f_1 (t_i, x_i, y_i)].$$

Posons, pour abréger, θ étant > 0 et < 1,

$$(15)\ P_1 = f'_{1x} (t_i, x_i + \theta\alpha_i, y_i + \theta\beta_i),\ Q_1 = f'_{1y} (t_i, x_i + \theta\alpha_i, y_i + \theta\beta_i),$$

nous aurons, par la formule de Taylor,

$$\alpha_{i+1} = \alpha_i + \delta_i (P_1\alpha_i + Q_1\beta).$$

De même, si l'on désigne par P_2, Q_2 les valeurs des dérivées partielles de f_2 qui se rapportent à un système de valeurs $(t_i, x_i + \theta_1\alpha_i, y_i + \theta_1\beta_i)$ des variables $(0 < \theta_1 < 1)$,

$$\beta_{i+1} = \beta_i + \delta_i (P_2\alpha_i + Q_2\beta_i).$$

Élevant au carré et ajoutant, on a

$$\rho_{i+1}^2 = \rho_i^2 + 2\delta_i [(P_1\alpha_i + Q_1\beta_i)\,\alpha_i + (P_2\alpha_i + Q_2\beta_i)\,\beta_i] + \delta_i^2 [(P_1\alpha_i + Q_1\beta_1)^2 + (P_2\alpha_i + Q_2\beta_i)^2].$$

Mais on a, en général, quels que soient P et Q,

$$(P\alpha_i + Q\beta_i)^2 \leqq \rho_i^2 (P^2 + Q^2),$$

car on sait (**1**, II) que

$$(P^2 + Q^2)(\alpha_i^2 + \beta_i^2) - (P\alpha_i + Q\beta_i)^2 = (P\beta_i - Q\alpha_i)^2.$$

On aura donc

$$(P_1\alpha_i + Q_1\beta_i)^2 + (P_2\alpha_i + Q_2\beta_i)^2 \leqq \rho_i^2 (P_1^2 + Q_1^2 + P_2^2 + Q_2^2),$$

$$\text{VA}\,[(P_1\alpha_i + Q_1\beta_i)\,\alpha_i + (P_2\alpha_i + Q_2\beta_i)\beta_i]$$

$$\leqq \rho_i \sqrt{(P_1\alpha_i + Q_1\beta_i)^2 + (P_2\alpha_i + Q_2\beta_i)^2} \leqq \rho_i^2 \sqrt{P_1^2 + Q_1^2 + P_2^2 + Q_2^2},$$

donc,

$$\rho_{i+1}^2 \leqq \rho_i^2 [1 + 2\delta_i \sqrt{P_1^2 + Q_1^2 + P_2^2 + Q_2^2} + \delta_1^2 (P_1^2 + Q_1^2 + P_2^2 + Q_2^2)]$$

d'où enfin

$$\rho_{i+1} \leqq \rho_i (1 + \delta_i \sqrt{P_1^2 + Q_1^2 + P_2^2 + Q_2^2}).$$

Si, par conséquent, K représente une quantité plus grande que la valeur de l'expression

$$\sqrt{f'^2_{1x} + f'^2_{1y} + f'^2_{2x} + f'^2_{2y}}$$

dans la région U, ce qui est possible d'après nos hypothèses, on aura toujours

$$\rho_{i+1} < \rho_i (1 + \rho_i K).$$

Remplaçons successivement i par $0, 1, 2, \ldots i-1$, et multiplions membre à membre les inégalités obtenues; il viendra

$$\rho_i < \rho_0 (1 + \delta_0 K)(1 + \delta_1 K) \ldots (1 + \delta_{i-1} K),$$

d'où, raisonnant comme au n° **459** et observant que $\delta_0 + \delta_1 + \cdots + \delta_{i-1} = t_i - t_0$, posant $t_n - t_0 = l$,

(16) $$\rho_i < \rho_0 e^{K(t_i - t_0)} < \rho_0 e^{Kl}.$$

Cette équation s'applique en particulier pour la valeur $i = n$, et donne

(17) $$\rho_n < \rho_0 e^{Kl}.$$

On verrait de même que si, dans le calcul des équations (11), les quantités x_i et y_i éprouvent des variations quelconques α_i, β_i, il en

résultera pour X, Y des variations α_n, β_n telles que, désignant par ρ_i la racine $\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2}$, par ρ_n la racine $\sqrt{\alpha_n^2+\beta_n^2}$, on aura

$$\rho_n < \rho_i e^{Kl}.$$

Il suit de là que les valeurs absolues des variations α_n, β_n que déterminent, dans les valeurs finales X et Y, des variations α_0 et β_0 attribuées à x_0 et y_0, sont moindres que la valeur de l'expression $\rho_0 e^{Kl}$ et deviennent, par conséquent, infiniment petites en même temps que α_0, β_0. Donc X et Y sont des fonctions continues de x_0, y_0.

467. Ces préliminaires permettent d'établir que, si l'on fait tendre vers zéro les éléments δ_i de l'intervalle (t_0, T) par des subdivisions successives, les quantités X et Y convergeront vers des limites finies et déterminées. Considérons d'abord l'intervalle (t_0, t_1). Nous avons trouvé

$$x_1 - x_0 = \delta_0 f_1(t_0, x_0, y_0), \quad y_1 - y_0 = \delta_0 f_2(t_0, x_0, y_0).$$

Concevons que l'on subdivise l'intervalle (t_0, t_1) en un nombre arbitrairement grand p d'intervalles plus petits, et cherchons les variations α_1, β_1 qui en résulteront dans les valeurs de x_1, y_1. Nous aurons, en vertu des formules (14),

$$(x_1+\alpha_1) - x_0 = \delta_0 f_1(t_0+\theta\delta_0,\ x_0+\eta A\delta_0,\ y_0+\zeta B\delta_0),$$

d'où

$$\alpha_1 = \delta_0\,[f_1(t_0+\theta\delta_0,\ x_0+\eta A\delta_0,\ y_0+\zeta B\delta_0) - f_1(t_0, x_0, y_0)].$$

Les fonctions f_1, f_2 étant continues dans la région U, il résulte d'un théorème connu (**138**, **140**) que l'on peut supposer toutes les divisions δ_i suffisamment petites pour que l'oscillation de chacune de ces fonctions soit moindre qu'une quantité arbitrairement petite σ dans chacune des régions limitées par les valeurs $t_i \pm \delta_i$ de t, $x_i \pm A\delta_i$ de x, $y_i \pm B\delta_i$ de y. Nous aurons ainsi, en raisonnant pour β_1 comme pour α_1,

$$\mathrm{VA}\,\alpha_1 < \delta_0\sigma, \quad \mathrm{VA}\,\beta_1 < \delta_0\sigma, \quad \text{d'où} \quad \rho_1 < \delta_0\sigma\sqrt{2}.$$

Ainsi, lorsqu'on subdivise l'intervalle (t_0, t_1) en autant de parties qu'on le veut, la somme des carrés des variations qui en résultent dans les valeurs de x et de y qui répondent à $t = t_1$ est moindre que $2\delta_0^2\sigma^2$.

D'après ce qu'on a vu au n° précédent, il en résulte, dans les valeurs de X, Y, calculées au moyen des formules (11), des variations plus petites, en valeur absolue, que $\rho_1 e^{Kl}$ et *a fortiori* que $\delta_0\sigma\sqrt{2}e^{Kl}$. Subdivisons de même les intervalles $\delta_1, \delta_2, \dots \delta_{n-1}$ en parties aussi petites que

nous voudrons; les variations correspondantes dans les valeurs de X et Y seront, en valeur absolue, respectivement moindres que

$$\delta_1\sigma\sqrt{2}\,e^{Kl},\quad \delta_2\sigma\sqrt{2}\,e^{Kl},\quad \ldots,\quad \delta_{n-1}\sigma\sqrt{2}\,e^{Kl};$$

donc, si l'on passe d'un mode de division $\delta_0, \delta_1, \ldots \delta_{n-1}$ de l'intervalle (t_0, T) à un autre, par la subdivision de chacun des éléments du premier en autant de parties qu'on le veut, mais en partant toujours d'un même système de valeurs (x_0, y_0) pour $t = t_0$, les variations absolues de X et de Y seront moindres que

$$(\delta_0 + \delta_1 + \cdots + \delta_{n-1})\,\sigma\sqrt{2}\,e^{Kl} = \sigma l\sqrt{2}\,e^{Kl}.$$

Mais σ peut être supposé aussi petit qu'on le veut, les δ_i étant pris suffisamment petits; donc les variations de X, Y finissent par décroître au-dessous de toute grandeur donnée par des subdivisions ultérieures de ces éléments δ_i, et par suite (**18**) les quantités X, Y tendent vers des limites déterminées et finies.

468. Ces valeurs limites de X et de Y ne dépendent nullement de la loi suivant laquelle on partage l'intervalle (t_0, T) en éléments indéfiniment décroissants. La démonstration se fait de la même manière qu'au n° **461**. Considérons deux modes de division (A) et (B) de l'intervalle (t_0, T), dans chacun desquels les éléments soient déjà assez petits pour que, par des subdivisions ultérieures de ces éléments, les variations absolues de X et de Y restent toujours moindres qu'une quantité donnée ε (**467**). On considérera un troisième mode de division (C) formé par la superposition des deux autres; relativement au premier (A), il pourra être regardé comme résultant d'une subdivision ultérieure des éléments de celui-ci, et par suite, les valeurs de X et de Y qui s'y rapportent différeront de celles qui se rapportent au mode (A), respectivement, de quantités absolues moindres que ε. Il en sera de même si l'on compare la mode (C) au mode (B), donc les valeurs de X et de Y qui résultent du mode (A) ne peuvent différer respectivement de celles qui résultent du mode (B), en grandeur absolue, que de quantités moindres que 2ε, c'est-à-dire aussi petites qu'on le veut.

Il est donc démontré que, de quelque manière que l'on partage l'intervalle (t_0, T) en éléments indéfiniment décroissants, les valeurs de X, Y qui répondent à $t = T$ dans les formules (12), et à des valeurs données x_0, y_0 pour $t = t_0$, tendent vers des limites déterminées, finies,

qui ne dépendent conséquemment que de x_0, y_0, T, et que pour cette raison nous représenterons comme il suit :

$$\lim X = F_1(x_0, y_0, T), \quad \lim Y = F_2(x_0, y_0, T).$$

469. Si, supposant x_0, y_0 fixes, on attribue à T une valeur variable t entre t_0 et $t_0 + a$, et si l'on désigne par $F_1(t)$, $F_2(t)$ simplement ce que deviennent alors les fonctions F_1 et F_2 ci-dessus, nous allons montrer que les expressions

$$x = F_1(t), \quad y = F_2(t)$$

vérifient le système (10), et se réduisent, pour $t = t_0$, aux valeurs données x_0, y_0. Les équations (14) étant applicables pour $i = n - 1$, nous donnent

$$X - x_0 = (T - t_0) f_1 [t_0 + \theta(T - t_0),\ x_0 + \eta A(T - t_0),\ y_0 + \zeta B(T - t_0)],$$

et comme cette égalité subsiste quelque grand que soit le nombre n, elle doit subsister pour la valeur limite de X qui répond à $n = \infty$. Remplaçant T par t, on a donc, λ, μ, ν ayant des valeurs absolues au plus égales à l'unité,

$$F_1(t) - x_0 = (t - t_0) f_1 [t_0 + \lambda(t - t_0),\ x_0 + \mu A(t - t_0),\ y_0 + \nu B(t - t_0)],$$

et en faisant $t = t_0$, on trouvera $F_1(t_0) = x_0$. De même $F_2(t_0) = y_0$.

D'autre part, ces mêmes équations (14) permettent de représenter les valeurs de X et de Y auxquelles on parviendrait si l'on partait des valeurs x_i, y_i pour $t = t_i$, et si, partageant l'intervalle (t_i, T) en un nombre arbitrairement grand d'éléments, on calculait par les équations (11) les valeurs de x et de y qui répondent à $t = T$. On trouverait par un raisonnnement identique

$$X - x_i = (T - t_i) f_1 [t_i + \theta(T - t_i),\ x_i + \eta A(T - t_i),\ y_i + \zeta B(T - t_i)],$$
$$Y - y_i = (T - t_i) f_2 [t_i + \theta'(T - t_i),\ \ldots\ldots,\ \ldots\ldots].$$

Ces égalités subsistant quelque grand que soit le nombre des éléments dans lesquels on partage les intervalles (t_0, T), (t_i, T), elles doivent subsister pour les valeurs limites des quantités x_i, y_i, X, Y, c'est-à-dire que l'on a, en conservant à λ, μ, ν les significations ci-dessus,

$$\begin{cases} F_1(T) - F_1(t_i) = (T - t_i) f_1 [t_i + \lambda(T - t_i),\ F_1(t_i) + \mu A(T - t_i),\ F_2(t_i) + \nu B(T - t_i)] \\ F_2(T) - F_2(t_i) = (T - t_i) f_2 [t_i + \lambda(T - t_i),\ \ldots,\ \ldots]. \end{cases}$$

Remplaçons t_i par t, T par $t - h$, divisons par h et faisons tendre h vers zéro, nous aurons

$$\lim \frac{F_1(t+h) - F_1(t)}{h} = f_1[t, F_1(t), F_2(t)],$$

$$\lim \frac{F_2(t+h) - F_2(t)}{h} = f_2[t, F_1(t), F_2(t)],$$

d'où l'on déduit sans peine que les équations (10) sont vérifiées par les valeurs $x = F_1(t)$, $y = F_2(t)$.

470. Nous avons admis que les fonctions f_1, f_2, f'_{1x}, ... vérifiaient certaines conditions de continuité dans une région de U limitée par les valeurs $t_0 \pm a$, $x_0 \pm Aa$, $y_0 \pm Ba$; mais on reconnaîtra sans peine, en raisonnant comme au n° **463**, que si ces diverses fonctions sont continues par rapport à t, x, y dans le voisinage du système de valeurs t_0, x_0, y_0, il sera toujours possible de déterminer pour a, A, B des valeurs convenables, telles que, dans une certaine région qui s'étend autour du point (t_0, x_0, y_0), toutes les conditions supposées dans la démonstration ci-dessus soient vérifiées. Il existera donc, dans cette région, un système d'intégrales des équations (10) ou de fonctions x, y de t, jouissant de la double propriété de satisfaire à ces équations dans la région définie, et de se réduire respectivement, pour la valeur donnée t_0 de t, aux valeurs arbitrairement choisies x_0, y_0. On conclut de là 1° que dans toute région U des variables (t, x, y) où les fonctions f_1, f_2, f'_{1x}, ... restent continues et finies, le système (10) admet des intégrales; 2° que ces intégrales ne sont entièrement déterminées que si l'on assigne les valeurs x_0, y_0 qu'elles doivent acquérir pour une valeur donnée t_0 de la variable, appartenant à la région U, en sorte qu'elles dépendent encore de ces quantités x_0, y_0 qui jouent le rôle de constantes arbitraires. Ce sont là les intégrales générales dont nous avons admis l'existence au n° **437**; 3° enfin, on démontrerait par des raisonnements analogues à ceux du n° **464** que, si les conditions relatives à la continuité des fonctions f_1, f_2, ... sont vérifiées, il est impossible de trouver dans la région U un deuxième système d'intégrales vérifiant les mêmes conditions, de satisfaire au système d'équations différentielles (10) et de prendre, pour une valeur donnée t_0 de t, des valeurs assignées d'avance x_0 et y_0. En d'autres termes, toute intégrale doit être comprise dans le système des intégrales

générales, moyennant une détermination convenable des constantes arbitraires.

471. La méthode exposée dans les numéros précédents pour un système de deux équations s'étendrait évidemment sans difficulté à un système composé d'un nombre quelconque d'équations différentielles du premier ordre, et conduirait à des conclusions semblables qui ont été énoncées au n° **437**.

472. Il nous reste à déduire des théories précédentes les théorèmes concernant les équations différentielles d'un ordre supérieur au premier. Considérons une équation du second ordre à deux variables,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right). \tag{18}$$

On la ramène à un système de deux équations du premier ordre, savoir

$$\frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{dy'}{dx} = f(x, y, y'). \tag{19}$$

Si donc f désigne une fonction continue des variables x, y, y' dans le voisinage d'un système de valeurs x_0, y_0, y'_0 de ces variables, et s'il en est de même de ses dérivées partielles par rapport à y et à y', en vertu des propriétés démontrées ci-dessus, il existera un système d'intégrales pour les équations (19), c'est-à-dire un système de fonctions y, y' de t qui vérifieront ces équations et qui, pour $x = x_0$, prendront les valeurs arbitraires y_0, y'_0. Comme l'élimination de y' ramène à l'équation (18), on en conclut que cette équation est vérifiée par une fonction y de x qui, pour la valeur donnée x_0 de x, admet des valeurs arbitrairement choisies pour elle et pour sa dérivée, et qui, par suite, renferme deux constantes arbitraires C_1 et C_2 satisfaisant aux conditions du n° **416**.

On ramènerait de même l'équation du troisième ordre.

$$\frac{d^3y}{dx^3} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) \tag{20}$$

à un système de trois équations du premier ordre

$$\frac{dy}{dx} = y', \frac{dy'}{dx} = y'', \frac{dy''}{dx} = f(x, y, y', y''),$$

et on lui appliquerait les conclusions auxquelles nous sommes parvenus ci-dessus; on verrait que, dans une région où $f(x, y, y', y'')$ est fonction

continue des variables x, y, y', y'' ainsi que ses dérivées partielles par rapport à y, y', y'', l'équation (20) admet toujours comme intégrale une fonction y de x telle que cette fonction et ses deux premières dérivées peuvent prendre des valeurs arbitraires y_0, y'_0, y''_0 pour une valeur donnée x_0 de la variable, dans la région dont il s'agit. C'est l'intégrale générale avec ses trois constantes arbitraires. Et ainsi de suite.

NOTE I.

SUR L'EXISTENCE DE LA DÉRIVÉE DANS LES FONCTIONS CONTINUES.

(Voir N° 76.)

La propriété, pour une fonction continue d'une variable x, d'admettre pour chaque valeur de cette variable une dérivée déterminée, continue elle-même en général, a été longtemps considérée comme une conséquence nécessaire de la continuité de la fonction. On a même essayé, à diverses reprises, d'établir cette proposition (1). Mais depuis que Riemann, dans son mémoire sur la série de Fourier (2), a prouvé la possibilité d'intégrer une fonction discontinue qui vérifie certaines conditions, et que M. Weierstrass, dans son enseignement si profond, a donné plusieurs exemples de fonctions continues qui n'admettent pas de dérivée, on a dû abandonner cette opinion et de nombreux travaux des géomètres ont mis en pleine lumière ce point fondamental dans le calcul différentiel.

Nous nous proposons de donner ici une idée de ces travaux qui ont un rapport intime avec l'objet de ce cours, en résumant principalement le travail également remarquable par la clarté et par la rigueur que M. Darboux a publié en 1875, renvoyant pour les démonstrations au mémoire lui-même (3).

---

(1) V. Ampère, *Journal de l'École polytechnique*, XIIIe cahier, p. 148; Lamarle, *Mémoires de l'Acad. de Belgique*, t. XXIX; Ph. Gilbert, *Mémoires in-8° de l'Acad. de Belgique*, t. XXIII.

(2) *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigon. Reihe; Abhand. der Götting. Gesellschaft*, t. XIII.

(3) *Annales scient. de l'École normale*, 2me série, t. IV, p. 57-112. — On peut consulter encore sur ce sujet : *Bulletins de l'Acad. de Belg.*, 2me série, t. XXXV, 1873; Schwarz, *Mém. de la Soc. Helv. des sciences naturelles*, 1873; F. Klein, *Ueber den allg. Functions-begriff*, *Berichte* d'Erlangen, 1873; du Bois-Reymond, *Journal de Borchardt*, t. 79, p. 21. — H. Hankel, *Ueber die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen*, Tübingen, 1870. — Dini, *Teorica delle funzioni di variabili reali*, Pise, 1878. — Wiener, *Journal de Borchardt*, t. XC, p. 222.

Dans cet écrit, M. Darboux envisage les fonctions, d'abord à un point de vue général, puis au point de vue de l'intégrabilité; il étudie ensuite les fonctions définies par des séries, et enfin les diverses classes de fonctions continues qui n'admettent pas de dérivée.

I. M. Darboux considère une fonction réelle simple $f(x)$ (**62**), dans le sens le plus général; il donne de la continuité par une valeur x ou dans un intervalle (a, b) des définitions qui s'accordent avec celles que nous avons adoptées (**63**). Il établit sur cette fonction les théorèmes que nous avons démontrés au Chapitre I, plus le suivant :

Si la fonction simple $f(x)$, continue ou discontinue, reste dans l'intervalle (a, b) comprise entre deux quantités fixes A et B, et si l'on divise cet intervalle en n intervalles plus petits δ_1, δ_2, ... δ_n, en représentant respectivement par L_i, l_i, Δ_i la limite maximum, la limite maximum et l'oscillation de la fonction dans l'intervalle δ_i, les quantités

$$L = \Sigma L_i \delta_i, \quad l = \Sigma l_i \delta_i, \quad \Delta = \Sigma \Delta_i \delta_i$$

tendront toujours vers des limites finies et déterminées lorsque tous les δ_i tendront vers zéro, et ces limites seront indépendantes de la loi suivant laquelle les éléments δ_i tendent vers zéro.

Soit Δ_{ab} la limite de Δ; les fonctions discontinues se partagent en deux classes : celles pour lesquelles $\Delta_{ab} = 0$, celles pour lesquelles Δ_{ab} est différent de zéro. On voit d'ailleurs sans peine que, *pour que Δ_{ab} soit nul, il est nécessaire et suffisant que la somme des intervalles δ_i dans lesquels l'oscillation Δ_i de la fonction surpasse une fraction donnée σ, quelque petite qu'elle soit, tende vers zéro lorsque n croît indéfiniment.*

II. *De l'intégration.* — Soit la fonction simple $f(x)$, continue ou discontinue dans l'intervalle (a, b), mais dont la valeur absolue ne surpasse pas une limite fixe; ξ_i une valeur arbitraire de x appartenant à l'intervalle δ_i. L'expression (**305**)

$$\Sigma f(\xi_i) \delta_i$$

tendra vers une limite déterminée et finie lorsque les δ_i tendront vers zéro, toutes les fois que Δ_{ab} sera égal à zéro. Cette limite est l'*intégrale définie* de $f(x)\,dx$ prise entre les limites a et b; on a

$$\lim \Sigma f(\xi_i) \delta_i = \int_b^a f(x)\,dx.$$

De là le théorème de Riemann : *Pour qu'une fonction $f(x)$ soit intégrable dans un intervalle (a, b), il faut et il suffit que la somme des intervalles δ_i dans lesquels l'oscillation Δ_i de la fonction surpasse une fraction donnée σ, prise d'ailleurs aussi petite qu'on le veut, tende vers la limite zéro lorsque tous les intervalles δ_i tendent vers zéro.*

Ainsi les deux classes de fonctions continues correspondent à la propriété d'être ou de n'être pas *intégrables.*

Ces résultats comprennent comme cas particuliers ceux que nous avons établis au Chapitre XXVI (**305-307**).

L'intégrale définie $\displaystyle\int_a^x f(x)\,dx$ est toujours une fonction continue de l'argument x, et, elle a pour dérivée $f(x)$, pour toute valeur de x pour laquelle la fonction $f(x)$ est continue (**311**).

III. Séries *absolument convergentes*; séries *équiconvergentes*. Exemple d'une série non équiconvergente

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \left[n^2x^2e^{-n^2x^2} - (n+1)^2 x^2e^{-(n+1)^2x^2}\right] = x^2e^{-x^2}.$$

Démonstration II du n° **110**. La série

$$\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots$$

dont la somme est $\pi : 4$ si $0 < x < \pi$, $-\pi : 4$ si $-\pi < x < 0$, zéro si $x = 0$, ne peut être équiconvergente dans un intervalle renfermant la valeur $x = 0$.

Lorsque $f(x)$ est continue pour une valeur x de la variable, on a (**63**)

$$f(x-0) = f(x) = f(x+0),$$

mais il n'en est pas ainsi si la fonction est discontinue. Ainsi, représentons par $E(x)$ le plus grand nombre entier contenu dans x; si $x = n$, n étant un nombre entier, on aura

$$E(x+0) = n = E(x),\ E(x-0) = n - 1.$$

Il est des fonctions pour lesquelles $f(x)$ existe, tandis que $f(x-0)$, $f(x+0)$ sont indéterminés.

La série

$$f(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \cdots + \varphi_n(x) + \cdots$$

étant équiconvergente dans l'intervalle (a, b), *si pour toute valeur de* $x > a$ *et* $< b$, $\varphi_n(x-0)$ *et* $\varphi_n(x+0)$ *ont des valeurs déterminées, les séries*

$$\Sigma\, \varphi_n(x-0) \text{ et } \Sigma\, \varphi_n(x+0)$$

seront convergentes dans l'intervalle (a, b) *et auront pour sommes respectives* $f(x-0)$, $f(x+0)$.

Ainsi, si la série $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \Sigma a_n$ est absolument convergente, la série

$$f(x) = a_1\frac{E(x)}{x} + a_2\frac{E(2x)}{2x} + \cdots + a_n\frac{E(nx)}{nx} + \cdots$$

sera équiconvergente dans tout intervalle et la fonction $f(x)$ sera continue pour toute valeur irrationnelle de x. Mais pour une valeur rationnelle $x = p : q$, on trouvera

$$f(x+0) = f(x),\ f(x-0) = f(x) - \frac{1}{qx}\left(a_q + \frac{a_{2q}}{2} + \frac{a_{3q}}{3} + \cdots\right).$$

Donc la fonction $f(x)$ devient discontinue un nombre indéfini de fois dans le plus petit intervalle.

Autre exemple : désignons par (x) la différence entre x et le nombre entier qui s'en rapproche le plus, en sorte que (x), toujours compris entre $-1 : 2$ et $1 : 2$, deviendra indéterminé pour $x = n + \frac{1}{2}$, n étant un entier quelconque; dans ce cas nous lui attribuerons la valeur zéro. La série

$$f(x) = a_1(x) + a_2(2x) + a_3(3x) + \cdots$$

sera équiconvergente dans tout intervalle, et l'on démontre 1° que la fonction $f(x)$ est continue pour toute valeur de x irrationnelle, ou rationnelle de la forme $p:(2q+p)$; 2° que, pour toute valeur de x de la forme $p:2q$, on a

$$f(x+0)=f(x)-\frac{1}{2}(a_q+a_{2q}+a_{3q}+\cdots),$$

$$f(x-0)=f(x)+\frac{1}{2}(a_q+a_{2q}+a_{3q}+\cdots).$$

IV. *Toute fonction $f(x)$ qui est discontinue, mais qui, pour chaque valeur de x, admet des valeurs déterminées pour $f(x-0)$ et pour $f(x+0)$, est une fonction susceptible d'intégration.*

Si les termes d'une série sont des fonctions continues ou discontinues, mais intégrables dans un intervalle (a, b), et si la série est équiconvergente dans cet intervalle, la somme de la série est aussi une fonction intégrable et son intégrale est la somme de la série formée par les intégrales des termes de la première. La nouvelle série est équiconvergente dans le même intervale que la première (**323**).

Soit $f(x)$ la somme d'une série dont les termes sont des fonctions continues admettant des dérivées. Si la série formée par ces dérivées est équiconvergente dans un intervalle (a, b) et que ses termes soient intégrables, la somme de la nouvelle série sera la dérivée de $f(x)$ (**324**).

Exemple : la série

$$\sum_1^\infty\left[-2x\,n^2e^{-n^2x^2}+2x(n+1)^2e^{-(n+1)^2x^2}\right]=-2x\,e^{-x^2}$$

est convergente dans l'intervalle $(0, 1)$, et ses termes sont des fonctions continues de x; mais elle n'est pas équiconvergente. Si l'on intègre à partir de zéro, le premier membre donnera une série convergente ayant pour somme e^{-x^2}, tandis que l'intégrale du second membre est $e^{-x^2}-1$.

V. *Soit toujours*

$$f(x)=\varphi_1(x)+\varphi_2(x)+\cdots+\varphi_n(x)+\cdots;$$

si la série

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\Sigma\,\frac{\varphi_n(x+h)-\varphi_n(x)}{h}$$

considérée comme fonction de h, est équiconvergente dans l'intervalle $(0, h>0)$, on aura, en faisant tendre h vers zéro,

$$\lim\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\Sigma\lim\frac{\varphi_n(x+h)-\varphi_n(x)}{h}.$$

De même pour les valeurs négatives de h.

VI. *Fonctions continues dépourvues de dérivées.* — Les théorèmes précédents en fournissent autant qu'on veut. Soit $f(x)$ une fonction continue, intégrable dans l'intervalle (a, b), $a<x<b$, et

$$F(x)=\int_a^x f(x)\,dx.$$

Si $f(x-0)$ et $f(x+0)$ diffèrent l'un de l'autre, on aura (**311**)

$$\lim \frac{F(x-h)-F(x)}{-h} = f(x-0), \quad \lim \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x+0),$$

$F(x)$ n'a donc pas de dérivée pour cette valeur de x. Soit, par exemple, la série

$$f(x) = \frac{E(x)}{x} + \frac{E(2x)}{2^s x} + \frac{E(3x)}{3^s x} + \cdots, \quad (1 < s < 2).$$

On trouve

$$F(x) = \int_0^x f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^s} \,\mathrm{l}.\, \frac{nx^{E(nx)}}{1 \cdot 2 \ldots E(nx)},$$

et cette fonction $F(x)$ n'a pas de dérivée pour les valeurs rationnelles de x.

VII. On peut former une infinité de fonctions qui n'ont pas de dérivée sans faire intervenir l'intégration.

Exemple de M. Schwarz. — Posons

$$\varphi(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)},$$

et soient $a_1, a_2, \ldots$ des constantes positives, telles que Σa_n soit une série convergente. La série

$$f(x) = \Sigma a_n \varphi(nx)$$

sera équiconvergente dans tout intervalle; la fonction $f(x)$ est toujours continue et croissante, et l'on peut démontrer 1° que pour toute valeur rationnelle $x = p : q$ on a, h étant positif,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} > a_n \sqrt{\frac{q}{h}}, \quad \lim_{h=0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \infty;$$

il existe donc dans le plus petit intervalle une infinité de valeur de x pour lesquelles la dérivée est infinie; 2° que pour les valeurs irrationnelles de x, la dérivée est tantôt finie, tantôt infinie (1).

Soit encore, la série Σa_n étant absolument convergente,

$$f(x) = \Sigma a_n \sin^{\frac{2}{3}} n\pi x.$$

La série est équiconvergente et $f(x)$ est une fonction continue dans tout intervalle. On s'assure 1° que pour toute valeur rationnelle de x, h étant positif ou négatif, l'accroissement de la fonction est de la forme $(K+\varepsilon)\,h^{\frac{2}{3}}$; son rapport à h change de signe avec h et croît indéfiniment lorsque h tend vers zéro; 2° pour les valeurs irrationnelles de x, ce rapport a une limite, tantôt finie, tantôt infinie. Cet exemple (Hankel) montre qu'il y a des fonctions qui ne sont, ni constamment croissantes, ni constamment décroissantes, dans aucun intervalle quel que petit qu'il soit, et qui ont une infinité de maxima entre deux valeurs quelconques de x, si rapprochées qu'on les suppose.

La fonction

$$f(x) = \sum_1^{\infty} \frac{a_n}{n\pi} \sin n\pi x \sin \frac{1}{2}(\mathrm{l}.\sin^2 n\pi x)$$

---

(1) *Archives des sciences de la Bibl. universelle*, sept. 1873.

admet, pour toute valeur irrationnelle de x, une dérivée déterminée, qui est la somme de la série formée des dérivées de ses termes; mais si x est rationnel, le rapport

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

ne converge vers aucune limite déterminée lorsque h tend vers zéro.

En général, si $\varphi(y)$ est une fonction finie et continue dans l'intervalle $(-1, +1)$, sauf pour $y=0$ où elle s'annule, la fonction

$$f(x)=\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\varphi(\sin n\pi x)}{n^s},$$

pour toute valeur constante de s surpassant un certain nombre positif, aura une valeur finie, comprise entre des limites fixes, mais elle sera continue pour toute valeur irrationnelle de x, discontinue pour toute valeur rationnelle.

Si $\varphi(y)$ est continue aussi pour $y=0$ et admet une dérivée déterminée et finie dans l'intervalle $(-1, +1)$, pour $s>2$ la fonction $f(x)$ sera continue et aura une dérivée finie et déterminée dans le même intervalle. Mais si la dérivée de $\varphi(y)$ n'est pas déterminée pour $y=0$, et si s atteint une valeur suffisamment grande, la fonction $f(x)$, tout en étant continue dans l'intervalle $(-1, +1)$, aura une dérivée finie et déterminée pour toute valeur irrationnelle de x, et n'aura aucune dérivée pour les valeurs irrationnelles (1).

VIII. Enfin, M. Weierstrass (2) a trouvé un exemple très simple d'une fonction continue qui n'admet de dérivée pour aucune valeur de la variable.

Soit a un nombre entier impair, b une constante positive moindre que l'unité; la série

$$f(x)=\sum_{n=0}^{n=\infty} b^n \cos\pi a^n x$$

est équiconvergente dans tout intervalle et représente une fonction continue de x. Soit m un nombre entier arbitraire, α_m un entier positif tel que l'on ait

$$-\frac{1}{2}<a^m x-\alpha_m \leq \frac{1}{2}.$$

Posons enfin

$$x'=\frac{\alpha_m-1}{a^m}, \quad x''=\frac{\alpha_m+1}{a^m},$$

en sorte que $x'<x<x''$; on pourra toujours faire croître m suffisamment pour que $x-x'$, $x''-x$ deviennent moindres que toute fraction donnée. On démontre ensuite que l'on a

$$\frac{f(x')-f(x)}{x'-x}=(-1)^{\alpha_m}(ab)^m\left(\frac{2}{3}\zeta+\frac{\pi}{ab-1}\eta\right),$$

$$\frac{f(x'')-f(x)}{x''-x}=-(-1)^{\alpha_m}(ab)^m\left(\frac{2}{3}\zeta'+\frac{\pi}{ab-1}\eta'\right),$$

ζ et ζ' étant >1, η et η' compris entre -1 et $+1$.

---

(1) Dini, ouvrage cité, p. 135.

(2) *Abhandlungen aus der Functionenlehre*, p. 98.

Si donc on choisit a et b de manière que l'on ait

$$ab > 1 + \frac{3\pi}{2},$$

les deux rapports ci-dessus resteront de signes contraires et leurs valeurs absolues croîtront au-dessus de tout nombre donné, lorsque m croîtra indéfiniment et que par suite, $x - x'$, $x'' - x$ tendront vers zéro. Et comme x est arbitraire, il s'ensuit que pour aucune valeur de la variable x la fonction continue $f(x)$ n'admet une dérivée finie et déterminée, ni même une dérivée infinie de signe déterminé (1).

M. Darboux donne encore l'exemple remarquable qui suit : soit

$$\varphi(y) = y^2 \sin \frac{1}{y}$$

une fonction dont la dérivée est nulle pour $y = 0$, et égale à

$$2y \sin \frac{1}{y} - \cos \frac{1}{y}$$

pour toute autre valeur de y. Si les constantes a_n forment une série absolument convergente la série

$$f(x) = \Sigma \pi a_n \varphi' (\sin n\pi x) \cos n\pi x$$

sera équiconvergente dans tout intervalle, et la fonction $f(x)$ sera discontinue pour toute valeur rationnelle de x. On aura ensuite

$$F(x) = \int_0^x f(x)\, dx = \Sigma \frac{a_n}{n} \varphi (\sin n\pi x),$$

et $f(x)$ sera la dérivée de $F(x)$ pour toute valeur de x. La fonction $F(x)$ est donc continue ; sa dérivée est déterminée et finie pour toute valeur de x, mais elle est discontinue pour toutes les valeurs rationnelles de la variable. On conclut de là qu'il existe des fonctions discontinues une infinité de fois dans le plus petit intervalle, et qui pourtant ne peuvent passer d'une valeur à une autre, dans cet intervalle, sans passer par toutes les valeurs intermédiaires.

---

(1) M. Wiener (*Journal de Borchardt*, t. 90) a contesté cette conclusion, mais son travail renferme une confusion manifeste, comme l'a montré M. Weierstrass (*Abhandl. aus der Functionenlehre*, 1886, p. 100).

NOTE II.

SUR LES FONCTIONS DÉFINIES PAR UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS SIMULTANÉES (n° **167**, p. 158).

Théorème général. — ***Si l'on a un système de m fonctions de $n+m$ variables $x_1, \dots x_n, y_1, \dots y_n$, savoir***

$$F_1(x_1, \dots x_n, y_1, \dots y_m), \dots, F_m(x_1, \dots x_n, y_1, \dots y_m),$$

qui s'annulent pour un système de valeurs

(S) $$x_1 = a_1, \dots, \; x_n = a_n, \; y_1 = b_1, \dots \; y_m = b_m$$

de ces variables, qui restent finies et continues ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre par rapport à ces variables, dans le voisinage du système (S) de valeurs de celles-ci; si, de plus, le déterminant

$$\Delta = D\left(\frac{F_1, \dots, F_m}{y_1, \dots y_m}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}, & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}, & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}$$

formé avec les dérivées partielles de $F_1, \dots F_m$ par rapport à $y_1, \dots, y_m$, ne s'annule pas pour le système de valeurs (S), il existera un système de fonctions simples

$$y_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots y_m = \varphi_m(x_1, \dots, x_n)$$

des variables $x_1, \dots x_n$, et un seul, vérifiant identiquement, quels que soient $x_1, \dots x_n$, les équations

$$F_1 = 0, \; F_2 = 0, \dots F_m = 0,$$

et se réduisant respectivement aux valeurs $b_1, \dots, b_m$ pour $x_1 = a_1, \dots, x_n = a_n$; enfin ces fonctions $\varphi_1, \dots \varphi_n$ seront continues et auront des dérivées partielles continues dans le voisinage du système $x_1 = a_1, \dots, x_n = a_n$.

Nous démontrerons que si le théorème est vrai pour une valeur $m-1$ du nombre

m, il subsistera pour la valeur m, et comme il a été établi pour $m = 1$ au n° **164** (la démonstration faite pour $n = 2$ s'applique quel que soit n), il sera établi d'une manière générale.

Puisque le déterminant Δ est supposé différent de zéro pour le système (S) de valeurs des variables, il est nécessaire qu'il y ait au moins une des dérivées

$$\frac{\partial F_1}{\partial y_m}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial y_m}, \dots \frac{\partial F_m}{\partial y_m}$$

qui soit, pour ces valeurs, différente de zéro; nous pouvons toujours supposer que ce soit la dernière; ainsi donc, on a

$$\frac{\partial F_m}{\partial y_m} \gtrless 0 \quad \text{pour} \quad x_1 = a_1, \dots, x_n = a_n, \;\; y_1 = b_1, \dots, y_m = b_m.$$

Nous concluons de là et des autres hypothèses admises, par l'application du théorème du n° **164**, que l'équation

$$F_m(x_1, \dots x_n, \; y_1, \dots y_m) = 0$$

définit une fonction simple y_m des $n + m - 1$ autres variables,

$$y_m = \varphi(x_1, \dots x_n, \; y_1, \dots y_{m-1})$$

qui, pour les valeurs $a_1, \dots a_n, \; b_1, \dots b_{m-1}$ de celles-ci, prend la valeur b_m; qui, dans le voisinage du système de valeurs (S), reste finie et continue par rapport à ces $n + m - 1$ variables, et qui, dans la même région, admet des dérivées partielles continues

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y_1}, \quad \dots, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y_{m-1}}.$$

Si l'on remplace y_m par cette fonction φ dans chacune des fonctions $F_1, \dots F_{m-1}$, elles se transformeront en un système de fonctions

$$f_1(x_1, \dots x_n, \; y_1, \dots y_{m-1}), \dots, \; f_{m-1}(x_1, \dots x_n, \; y_1, \dots y_{m-1})$$

des $n + m - 1$ variables, lesquelles seront aussi des fonctions continues de ces dernières, puisqu'elles proviennent de fonctions continues dans lesquelles une variable a été remplacée par une fonction continue des autres (**73**).

Le système $x_1 = a_1, \dots, x_n = a_n, \;\; y_1 = b_1, \dots, y_{m-1} = b_{m-1}$ vérifie les équations

$$f_i(x_1, \dots, x_n, \; y_1, \dots, y_{m-1}) = 0,$$

car, d'après l'origine des f_i, le premier membre n'est autre chose que la valeur que prend $F_i(x_1, \dots x_n, \; y_1 \dots y_m)$ lorsqu'on y remplace respectivement $x_1, \dots, x, \; y_1, \dots y_m$ par $a_1, \dots, a_n, \; b_1, \dots, b_m$. De plus, les fonctions $f_1, \dots, f_{m-1}$ admettent des dérivées partielles déterminées et continues, car on a, en général,

$$(\alpha) \qquad \frac{\partial f_i}{\partial x_k} = \frac{\partial F_i}{\partial x_k} + \frac{\partial F_i}{\partial y_m}\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial f_i}{\partial y_k} = \frac{\partial F_i}{\partial y_k} + \frac{\partial F_1}{\partial y_m}\frac{\partial \varphi}{\partial y_k},$$

et les dérivées partielles qui figurent dans les seconds membres existent et sont

continues, dans la région qui avoisine le système (S). Enfin, nous allons prouver que le déterminant

$$D\left(\frac{f_1, \ldots, f_{m-1}}{y_1, \ldots, y_{m-1}}\right)$$

ne peut s'annuler pour le système

(S') $$x_1 = a_1, \ldots, x_n = a_n, \quad y_1 = b_1, \ldots, y_{m-1} = b_{m-1}.$$

Pour cela, observons que le déterminant Δ peut s'écrire sous la forme

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \frac{\partial F_1}{\partial y_m}\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}, & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} + \frac{\partial F_1}{\partial y_m}\frac{\partial \varphi}{\partial y_2} & \ldots, & \frac{\partial F_1}{\partial y_{m-1}} + \frac{\partial F_1}{\partial y_m}\frac{\partial \varphi}{\partial y_{m-1}}, & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} + \frac{\partial F_2}{\partial y_m}\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} + \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}.$$

En effet, d'après les propriétés des déterminants, on n'a fait, dans cette transformation, qu'ajouter à Δ une somme de déterminants qui ont chacun deux colonnes identiques et se réduisent à zéro. Mais l'expression $y_m = \varphi$ vérifie l'équation $F_m = 0$ pour des valeurs quelconques de $y_1, \ldots, y_{m-1}$ donc on a identiquement

$$\frac{\partial F_m}{\partial y_1} + \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} = 0, \quad \ldots \frac{\partial F_m}{\partial y_{m-1}} + \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\frac{\partial \varphi}{\partial y_{m-1}} = 0,$$

et la valeur précédente de Δ, eu égard aux équations (α), se réduit à

$$\Delta = \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \cdot D\left(\frac{f_1, \ldots, f_{m-1}}{y_1, \ldots, y_{m-1}}\right).$$

Or, par hypothèse, Δ n'est pas nul pour le système des valeurs (S); il en est de même de la dérivée partielle $\frac{\partial F_m}{\partial x_m}$; donc il est impossible que le déterminant

$$D\left(\frac{f_1, \ldots, f_{m-1}}{y_1, \ldots, y_{m-1}}\right)$$

soit nul pour le système (S'). D'après cela, si les fonctions $F_1, \ldots, F_m$ vérifient les conditions énoncées dans le théorème général, toutes ces conditions subsisteront également pour les $m - 1$ fonctions $f_1, f_2, \ldots f_{m-1}$. Or, le théorème a été supposé vrai pour $m = m - 1$, il s'appliquera donc à ces fonctions; c'est-à-dire que les $m - 1$ équations

$$f_1(x_1 \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{m-1}) = 0, \quad \ldots f_{m-1}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{n-1}) = 0$$

définiront un système de $m - 1$ fonctions simples $y_1, \ldots, y_{m-1}$ des n variables $x_1, \ldots, x_n$, qui prendront les valeurs respectives $b_1, \ldots, b_{m-1}$ pour $x_1 = a_1, \ldots, x_n = a_n$, qui satisferont identiquement aux équations $f_1 = 0, \ldots f_{m-1} = 0$ et seront finies et continues dans

le voisinage de ce système, qui admettront enfin des dérivées partielles déterminées et continues par rapport à $x_1, \dots x_n$. Désignons par

$$y_1 = \varphi_1(x_1, \dots x_n), \dots, \quad y_{m-1} = \varphi_{m-1}(x_1, \dots, x_n)$$

ces $m - 1$ fonctions; substituons-les à $y_1, \dots, y_{m-1}$ dans la fonction ci-dessus

$$y_m = \varphi(x_1, \dots x_n, \quad y_1, \dots y_{m-1});$$

celle-ci sera transformée en une fonction

$$y_m = \varphi_m(x_1, \dots, x_n)$$

qui sera simple et continue par rapport aux variables $x_1, \dots x_n$ dans le voisinage du *point* $x_1 = a_1, \dots x_n = a_n$, qui prendra la valeur b_m en ce point, et aura des dérivées partielles par rapport à ces variables. On voit clairement par là que le système de valeurs

$$y_1 = \varphi_1(x_1, \dots x_n), \dots, \quad y_m = \varphi_m(x_1, \dots x_m)$$

jouit de toutes les propriétés énoncées dans le théorème général, et que celui-ci est par conséquent établi.



NOTE III.

SUR LES INTÉGRALES DOUBLES

PAR

C. DE LA VALLÉE POUSSIN.

On sait (**362**) que si $f(x, y)$ est une fonction simple, finie et continue de x et de y dans une région déterminée T, le calcul de l'intégrale double (**357**) $\int_{\mathrm{T}} f(x,y)\,d\mathrm{T}$ se ramène à deux intégrales simples successives. Dans la plupart des traités d'analyse, on étend plus ou moins explicitement ce théorème au cas où le champs d'intégration est illimité et où la fonction passe par l'infini, *pourvu que l'intégrale double ait un sens*. Cette extension est trop générale.

Pour montrer la marche à suivre, supposons que le champ T s'étende indéfiniment dans une ou plusieurs directions. On limitera par une ligne arbitraire (C′) une portion T′ de la région T et l'on fera varier cette ligne de manière que la portion T′ finisse par embrasser tous les points de la région T. Si l'intégrale $\int_{\mathrm{T}} f(x,y)\,d\mathrm{T}'$ tend vers une limite fixe, indépendante du contour arbitraire, cette limite est par définition la valeur de l'intégrale $\int_{\mathrm{T}} f(x,y)\,d\mathrm{T}$, étendue à la région indéfinie.

L'intégrale ayant un sens, le contour (C′) peut être choisi de la manière la plus avantageuse au but que l'on poursuit. Dans l'étendue de la région T′, limitée par le contour (C′), la fonction restant finie et le champ d'intégration limité, l'intégrale double s'exprime par deux intégrations successives par rapport à x et y (**362**) ou par rapport à r et θ (**360**) (ou par rapport à d'autres variables) ; donc l'intégrale $\int_{\mathrm{T}} f(x,y)\,d\mathrm{T}$ sera la limite commune vers laquelle tendront les intégrales prises par rapport aux deux variables x et y, ou r et θ, lorsque le contour (C′) se développera indéfiniment.

C'est à la remarque précédente qu'il faut avoir recours, lorsque l'on doit calculer une intégrale double à champ infini, ou effectuer un changement de variable dans une telle intégrale.

Considérons, par exemple, le cas où la région T est étendue à la portion du plan comprise entre les axes des cordonnées positives. Choisissons d'abord comme région T′ un rectangle indéfiniment croissant, formé sur l'abscisse $\mathrm{OX} = \mathrm{X}$ et l'ordonnée $\mathrm{OY} = \mathrm{Y}$. Le raisonnement précédent montre que l'intégrale $\int_{\mathrm{T}} f(x,y)\,d\mathrm{T}$ sera la limite commune des deux quantités

$$\int_0^{\mathrm{X}} dx \int_0^{\mathrm{Y}} f(x, y)\,dy = \int_0^{\mathrm{Y}} dy \int_0^{\mathrm{X}} f(x, y)\,dx,$$

quand X et Y tendront vers l'infini. Il ne s'ensuit pas cependant que l'on puisse toujours remplacer X et Y par l'infini dans ces expressions, parce que dans l'une ou l'autre X ou Y tend vers l'infini sous le signe $\int$.

Prenons ensuite pour région T′ un quart de cercle de rayon indéfiniment croissant, l'intégrale double sera encore la limite des deux expressions

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^r f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, rdr = \int_0^r rdr \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, d\theta,$$

quand r tendra vers l'infini. La seconde tend, par définition, vers l'intégrale

$$\int_0^\infty rdr \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, d\theta;$$

mais il n'est par certain que l'on puisse remplacer r par l'infini dans la première pour la même raison que tout à l'heure.

Dans bien des cas, ces substitutions seront permises et la démonstration se fera sans difficulté. Soit, par exemple, l'intégrale

$$S = \int_T e^{-(x^2+y^2)}\, dT,$$

la région indéfinie T étant encore comprise entre les axes des coordonnées positives. La condition (γ) (**392**) est vérifiée et l'intégrale S existe. Nous aurons donc

$$S = \lim_{r=\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^r e^{-r^2}\, rdr = \lim \frac{\pi}{2}\left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^r = \frac{\pi}{4}.$$

Mais si on limite la région T′ par deux parallèles aux axes,

$$S = \lim_{x=\infty}\lim_{y=\infty} \int_0^x e^{-x^2}\, dx \int_0^y e^{-y^2}\, dy = \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx \int_0^\infty e^{-y^2}\, dy;$$

donc, si I désigne l'intégrale finie et déterminée

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx,$$

on aura

$$S = I^2, \quad I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

ou

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Des considérations analogues s'appliquent au cas où la fonction $f(x,y)$ passe par l'infini.



